This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

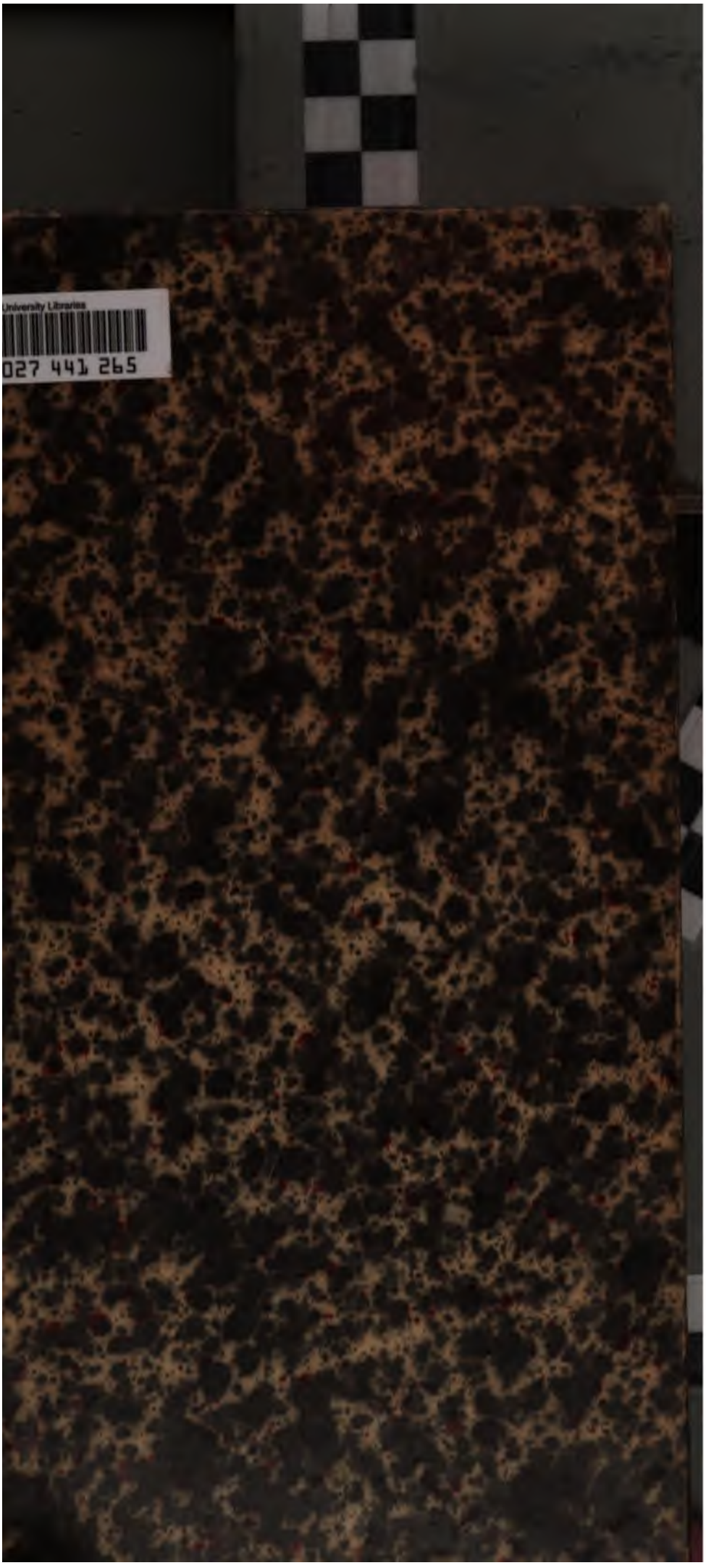
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

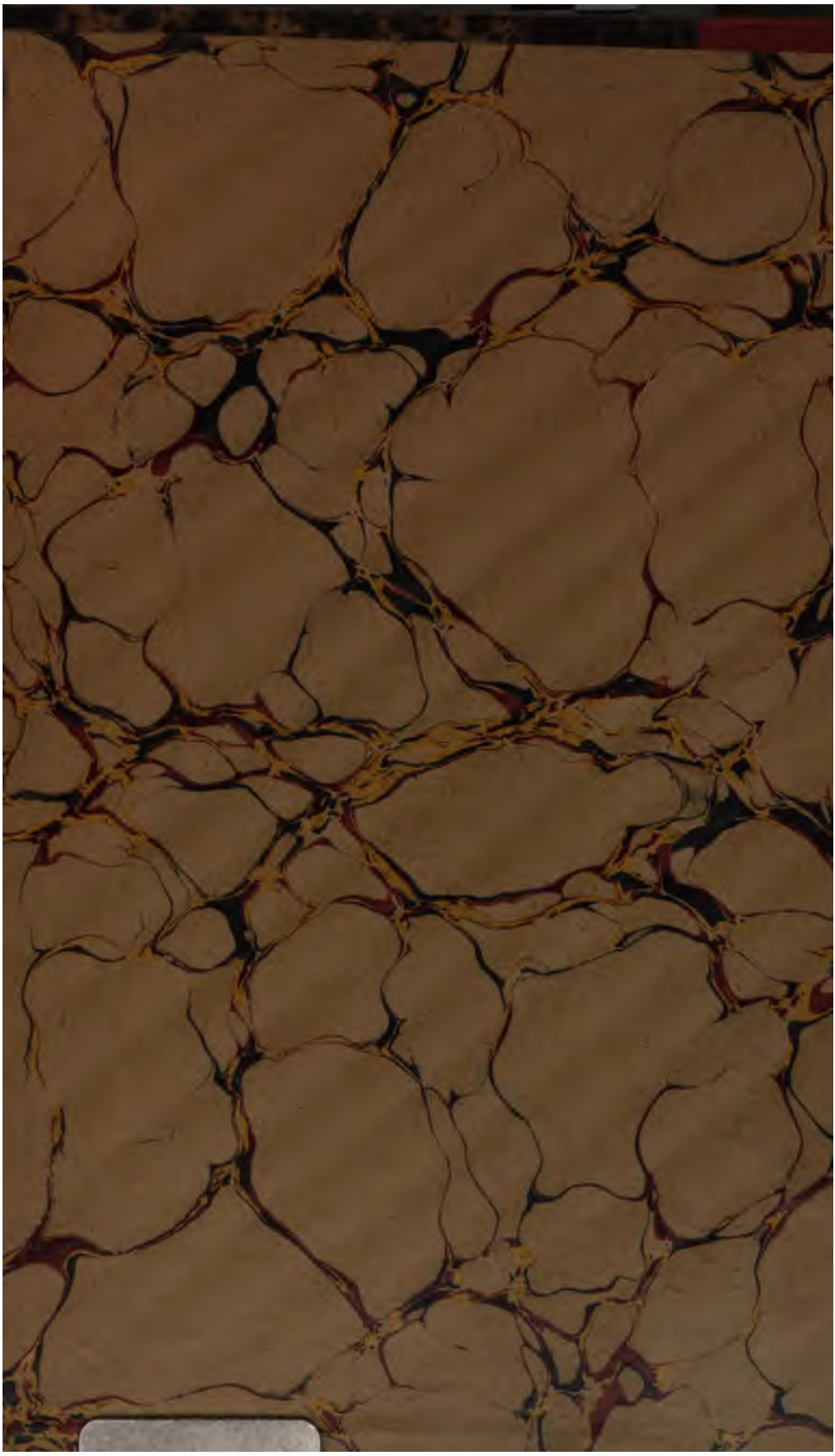
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

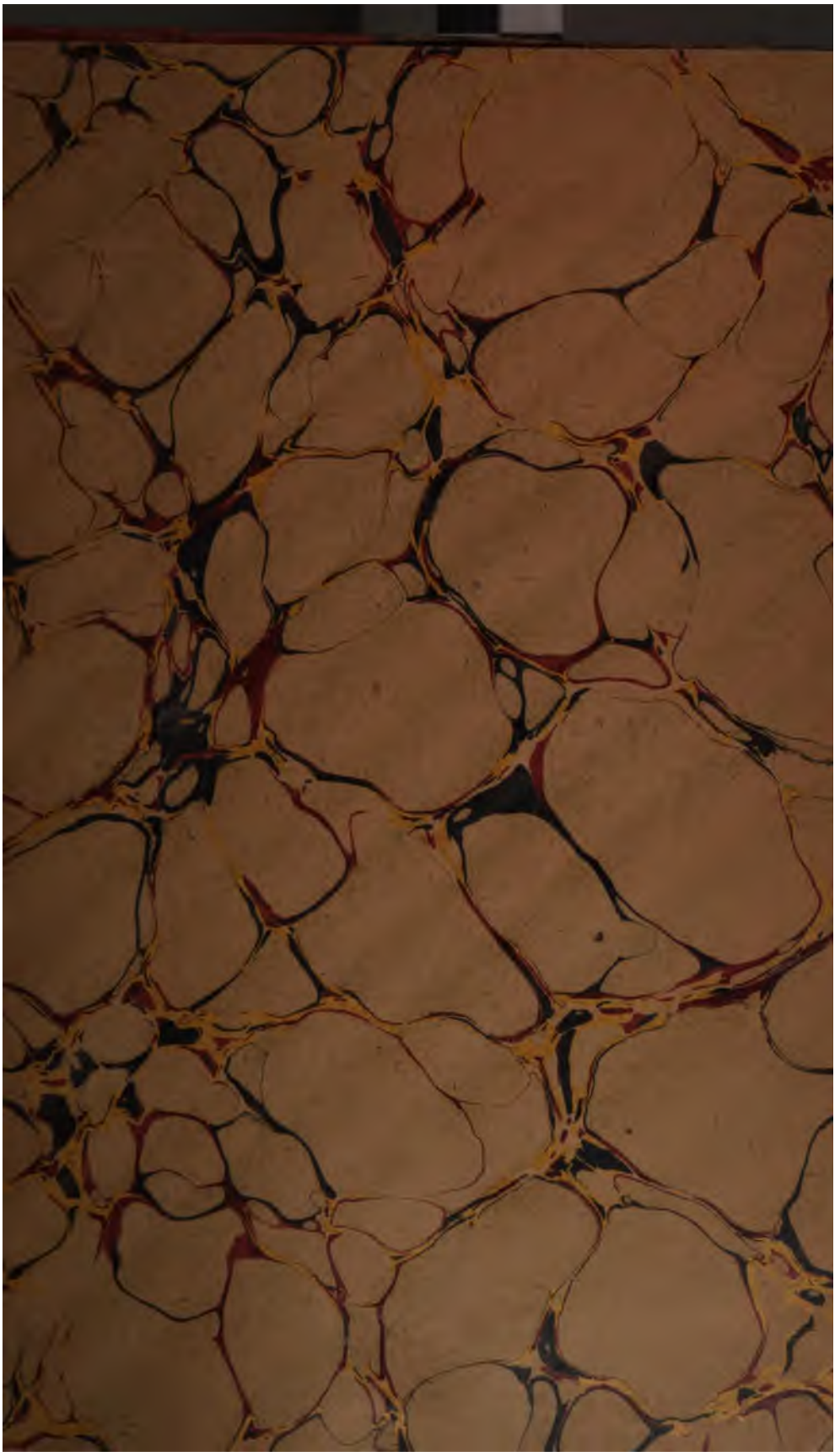
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


University Libraries
027 441 265





BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. HERMITE, *président.*

BERTRAND.

DARBOUX.

TISSERAND.

J. TANNERY.

PHILIPPON, *secrétaire.*

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux,* Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

13747 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, A. HARNACK, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE,
MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME XII. — ANNÉE 1888.
(TOME XXII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

STANFORD LIBRARY

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1888

158528

STANFORD LIBRARY

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PETERSEN (J.). — Lehrbuch der Dynamik fester Körper. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von v. Fischer-Benzon. 1 vol. in-12, 213 p. Copenhague, Host et Sohn; 1887.

M. Petersen a un rare talent : il sait être court en restant toujours clair. Le petit Volume que nous signalons aujourd'hui à nos lecteurs complète le Cours de Mécanique rationnelle dont il avait déjà publié la Statique et la Cinématique (¹).

Il contient les parties essentielles de la Dynamique. Trois Chapitres concernent le mouvement d'un point matériel libre ou assujetti à se mouvoir soit sur une courbe, soit sur une surface. Un important Chapitre est consacré aux principes généraux du mouvement d'un système : mouvement du centre de gravité, théorème des aires, relation entre la force vive et le travail, principe de Gauss, principe de la moindre action et principe d'Hamilton, équations générales de Lagrange et d'Hamilton. L'auteur traite ensuite des moments d'inertie, des percussions; du mouvement d'un corps solide dont un point est fixe ou qui est entièrement libre. Dans l'avant-dernier Chapitre, il s'occupe du mouve-

(¹) Voir *Bulletin*, VIII, p. 53, t. IX, p. 58.

ment relatif; dans le dernier, enfin, il donne quelques indications rapides sur les questions suivantes : mouvement des systèmes semblables, stabilité de l'équilibre, petites oscillations, cordes vibrantes. De nombreux et intéressants exercices sont placés à la suite de chaque Chapitre. J. T.

GILBERT (Ph.). — Cours d'Analyse infinitésimale. Partie élémentaire. Troisième édition. 1 vol. in-8°; XII-552 p. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Le *Bulletin* a rendu compte successivement (¹) des deux premières éditions de l'excellent Livre de M. Gilbert; nous sommes heureux d'annoncer aujourd'hui la troisième. L'auteur a donné à cette édition des soins particuliers : le légitime succès de son Livre lui en faisait un devoir.

Nous croyons inutile de revenir sur la division des matières, d'ailleurs conforme aux usages, puisqu'elle a été développée dans les analyses précédentes; il suffira d'insister sur les principales additions et améliorations. Rappelons toutefois que l'auteur tient à rester élémentaire et que son Livre est spécialement destiné aux commençants et aux élèves-ingénieurs, à qui il importe plus de se familiariser avec les procédés du Calcul différentiel et intégral, que d'en approfondir les subtiles théories. Mais M. Gilbert est de ceux qui pensent qu'il ne faut cacher la vérité à personne, qu'il vaut mieux signaler les difficultés là où elles sont, et que l'effort que coûte à l'esprit l'acquisition de certaines notions est bien récompensé par la sécurité qu'il y trouve ensuite. C'est surtout dans le sens de la rigueur, en donnant à ce mot sa signification la plus stricte, que M. Gilbert a voulu améliorer son Livre. Assurément, surtout quand on s'adresse à des lecteurs qui ne font point des mathématiques une étude entièrement désintéressée, qui recherchent la vérité, mais aussi le parti qu'on en peut tirer; il est aussi important que difficile de garder une juste mesure : il faut éviter la lourdeur qui ennuie, la subtilité qui fatigue. Il nous a paru que M. Gilbert y

(¹) *Voir* 1re série, t. IV, p. 33, et 2e série, t. II$_1$, p. 244.

avait entièrement réussi, sans cesser d'être rigoureux et précis. Il a introduit, au début de son livre, un Chapitre sur les nombres irrationnels, où les choses sont présentées de manière à ne pas laisser de place à l'erreur, mais avec la sobriété qui convient; ce n'est pas le lieu, dans un Cours d'Analyse, d'insister sur cette matière. La théorie des séries de termes constants ou variables, et en particulier des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de la variable, la notion de convergence uniforme et les propositions essentielles qui s'y rattachent sont présentées d'une façon aussi simple que claire. Les notions relatives à la continuité, à la limite supérieure ou inférieure d'une fonction dans un intervalle sont exposées complètement, de manière à permettre, en particulier, de présenter d'une manière rigoureuse la belle démonstration que l'on doit à M. O. Bonnet de la formule des accroissements finis. Signalons aussi la façon dont est démontrée l'existence d'une fonction implicite d'une variable; M. Gilbert a même donné, dans une Note placée à la fin du Volume, la démonstration de la proposition générale relative au cas d'un nombre quelconque de fonctions définies par un nombre égal d'équations. Un Chapitre relatif aux séries qui procèdent suivant les puissances entières d'une variable imaginaire termine la partie du cours consacrée au Calcul différentiel.

La définition de l'intégrale définie, dans le cas très suffisant d'une fonction en général continue, est présentée avec rigueur. L'auteur donne les deux théorèmes de la moyenne, il étudie plus tard le cas où la fonction devient infinie dans le champ d'intégration, lorsque l'intégrale est simple et lorsqu'elle est multiple.

Pour ce qui est des procédés d'intégration, il semble que M. Gilbert, sans excéder le cadre qu'il s'était tracé, aurait pu donner quelques notions succinctes sur les courbes unicursales et montrer le parti qu'on en peut tirer pour éclairer la méthode d'intégration par substitution qui, autrement, n'apparaît que comme un recueil de recettes ingénieuses. Il aura sans doute voulu renvoyer à la seconde Partie de son Cours, non encore publiée, cette théorie, avec les beaux développements qu'elle comporte.

L'existence de l'intégrale pour une équation différentielle ordinaire est établie en suivant une voie analogue à celle qu'a indiquée

M. Lipschitz (¹). M. Gilbert se borne d'ailleurs à exposer les procédés d'intégration des types d'équations les plus simples. La théorie des équations aux dérivées partielles n'est pas abordée.

Trois Notes terminent le Volume; j'ai déjà signalé l'une d'elles, qui est la seconde; la troisième touche un point de la théorie des équations différentielles linéaires; quant à la première, elle est relative à l'existence de la dérivée dans les fonctions continues : elle contient l'analyse d'un Mémoire bien connu de M. Darboux (²) et l'exemple simple que l'on doit à M. Weierstrass d'une fonction continue n'admettant point de dérivée.

Il convient de signaler enfin le nombre et l'intérêt des exercices que M. Gilbert a placés à la fin de chaque Chapitre. On reconnaît, au soin qui a été apporté à cette partie essentielle d'un Ouvrage élémentaire, le professeur soucieux des besoins de ses élèves. J. T.

G. DARBOUX. — LEÇONS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES, ET LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL. Première Partie. Gr. in-8°. 1 vol. 513 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Alors que de nombreuses monographies étaient consacrées aux diverses branches de l'Analyse, on en était encore à regretter que la Géométrie infinitésimale n'eût été l'objet d'aucun Traité spécial.

Malgré la place importante qui lui est attribuée dans plusieurs Traités généraux d'Analyse, on conviendra qu'elle méritait d'être développée sur un terrain moins étroit; nous pouvons même ajouter que le besoin en était urgent. Des découvertes récentes ont considérablement agrandi le domaine de la Géométrie infinitésimale, en y introduisant l'idée générale et féconde des transformations. Des méthodes déjà anciennes, dont les géomètres admiraient l'ingéniosité et le succès imprévu, ont été ramenées à leurs

(¹) *Voir* t. X de la première série du *Bulletin*, p. 149.

(²) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ série, t. IV, p. 37.

vrais principes, qui contiennent et font connaître la raison de leur succès; en un mot, un pas important a été fait dans la voie synthétique si propre à faire ressortir l'unité dans la Géométrie.

Un Livre était donc nécessaire, qui servît d'intermédiaire entre les cours classiques et les Mémoires innombrables écrits sur la Géométrie infinitésimale, qui, unifiant les méthodes et les résultats de ces divers écrits, en présentât au monde savant une sorte de synthèse générale : c'est pourquoi l'intérêt toujours croissant du cours de Géométrie de la Sorbonne faisait vivement souhaiter à ses auditeurs de le voir fixé d'une façon durable; sa publication aura pour effet certain de répandre le goût de la Géométrie infinitésimale dans tout notre pays.

Le premier Volume de l'Ouvrage vient de paraître : il contient des généralités, la théorie des coordonnées curvilignes sur les surfaces et, comme application, l'exposition de la théorie des surfaces minima. Il est divisé en trois Livres.

Le premier Livre est intitulé : *Application à la Géométrie de la théorie des mouvements relatifs.*

L'emploi d'un trièdre trirectangle de référence mobile, et l'introduction comme éléments généraux de recherches des translations de son sommet estimées suivant ses axes, et des rotations autour de ces mêmes axes sont le premier objet de ce Livre.

M. Darboux étudie deux cas distincts, celui où le mouvement du trièdre dépend d'un seul paramètre, et celui où il dépend de deux. Étant donné que les rotations du trièdre suivant ses axes, et aussi les composantes suivant les mêmes axes du déplacement de son sommet constituent les éléments généraux de toutes les recherches de géométrie métrique, il y a un grand intérêt à savoir remonter de ces rotations et translations, supposées connues, au mouvement lui-même. Ce problème est traité dans les deux cas avec beaucoup de détails; l'emploi dans la question des coordonnées sphériques isotropes, dont le rôle est si important en Géométrie et en Analyse, ramène le problème à l'intégration d'une ou de deux équations de Riccati. La propriété anharmonique des solutions de ces équations se rattache à ce fait bien connu et si fécond, qu'une même substitution linéaire effectuée sur les deux variables équivaut à une rotation de la sphère autour d'un de ses diamètres.

Les applications de la théorie générale qui précède sont des plus variées; la théorie des courbes gauches y trouve une exposition des plus élégantes; la théorie de Poinsot sur la rotation des corps y apparaît sous un jour beaucoup plus élevé, ainsi que le problème, si étudié dans ces derniers temps, des courbes dont les courbures sont liées par une relation.

Le cas du déplacement à deux paramètres offre un champ plus vaste encore aux applications; mais le but de ce Chapitre étant surtout de faire connaître une méthode générale, dont la fécondité se fera jour dans tout le cours de l'Ouvrage, M. Darboux se borne à montrer avec quelle facilité elle donne le théorème de Schönemann-Mannheim et celui de Ribaucour sur le déplacement d'un solide dans l'espace.

Après avoir exposé quelques notions générales sur les coordonnées curvilignes, l'auteur étudie plusieurs surfaces, susceptibles d'une définition cinématique. Signalons la surface pseudo-sphérique, les hélicoïdes et les surfaces de révolution dont l'applicabilité a été découverte par Bour, les surfaces à courbure constante positive, les surfaces engendrées par le déplacement, et notamment par la translation, d'une courbe de forme invariable. Ce dernier exemple présente un intérêt particulier à cause de ses attaches avec la théorie des systèmes conjugués et celle des surfaces minima. Ce Livre se termine par une étude des curieuses surfaces que M. Maurice Lévy a introduites en Géométrie sous le nom de *surfaces spirales*.

Si le premier Livre consacre sous une forme précise l'emploi d'un trièdre de référence mobile, des rotations de ce trièdre et, plus généralement, l'usage des méthodes cinématiques en Géométrie infinitésimale, le deuxième Livre, de son côté, conquiert définitivement le droit de cité à une méthode générale entièrement due à M. Darboux, et qui consiste dans l'emploi uniforme des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.

Il est question dans le Livre II des systèmes conjugués, des lignes asymptotiques, des lignes de courbure, des systèmes isothermes et de la représentation conforme, et enfin de certaines transformations, qui jouent le plus grand rôle en Géométrie.

Les systèmes conjugués se présentent dans un très grand nombre

de questions de Géométrie projective et de Géométrie métrique. Il ne faut donc point s'étonner si en tête d'un Chapitre sur les systèmes conjugués nous trouvons une élégante digression sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont dans des plans passant par une droite fixe. L'imprévu des méthodes, les liens inattendus, lors même et par cela même qu'ils sont des plus simples, ne constituent pas le moindre attrait de ces leçons. Après cette digression, nous revenons à la théorie générale des systèmes conjugués; leur invariance par homographie et par dualité, leur représentation ponctuelle ou tangentielle, tout cela se trouve rattaché à l'emploi des équations aux dérivées partielles auxquelles il a été déjà fait allusion. Pour donner une idée précise de cette méthode, il nous suffira de citer le théorème général suivant :

Si l'on considère l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} + A'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B'\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + C'\theta = 0,$$

que vérifient les quatre coordonnées homogènes ponctuelles (ou tangentielles) *des points d'une surface exprimées en fonction de deux paramètres* α, β, *les caractéristiques de cette équation tracent sur la surface un système conjugué.*

Si, par exemple, A et C sont nuls, les courbes α, β forment un réseau conjugué. Si l'équation (1) admet les solutions x, y, z, 1, $x^2+y^2+z^2$, le réseau conjugué est celui des lignes de courbure sur la surface dont x, y, z seraient des coordonnées rectangulaires, etc.

Ces équations aux dérivées partielles interviennent non moins utilement dans la théorie des lignes asymptotiques. Au sujet de ces lignes, M. Darboux étudie une transformation importante qui permet de faire disparaître le rectangle de l'équation différentielle qui les représente, et de ramener dans plusieurs cas leur intégration aux quadratures. Tel est le cas, par exemple, des surfaces tétraédrales de Lamé.

Les systèmes orthogonaux et isothermes sont en relation étroite avec plusieurs théories d'Analyse générale, à cause de la représentation conforme; on sait, d'autre part, qu'ils sont la clef de certains problèmes de la théorie des surfaces minima : aussi ces systèmes

et le problème de la représentation conforme sont-ils l'objet de deux Chapitres spéciaux.

Après le problème des cartes géographiques, qui est complètement résolu dans plusieurs cas, M. Darboux s'occupe de la représentation conforme des aires planes, et notamment de la représentation sur la partie supérieure du plan d'un contour limité par des droites ou des arcs de cercles. L'auteur expose les beaux travaux de M. Schwarz sur ce sujet, et donne leur application au cas du rectangle et du triangle limité par trois arcs de cercles; les fonctions elliptiques fournissent la solution du premier problème, la série hypergéométrique celle du second.

La théorie des lignes de courbure et diverses questions qui s'y rattachent occupent les derniers Chapitres de ce deuxième Livre.

Qu'il s'agisse de coordonnées ponctuelles, tangentielles ou pentasphériques, nous y retrouvons encore les équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires et à deux variables; elles dominent le sujet. On sait quel parti l'auteur en a tiré dans ses recherches sur les systèmes orthogonaux et sur la représentation sphérique; les géomètres seront donc heureux de retrouver ici une exposition complète de ces méthodes, suivie de plusieurs applications. Les coordonnées pentasphériques, qui interviennent dans tant de recherches métriques, sont étudiées dans un Chapitre spécial; signalons à leur propos le théorème suivant :

Si les cinq coordonnées pentasphériques des points d'une surface exprimées en fonction de deux paramètres vérifient une équation telle que (1), *les caractéristiques de l'équation sont les lignes de courbure de la surface.*

Un autre Chapitre a pour titre : *Les lignes de courbure en coordonnées tangentielles.* On comprend que la représentation sphérique de Gauss en doit être un des objets; entre autres le problème important de la recherche des surfaces dont la représentation sphérique est donnée, et aussi la notion de ces coordonnées ingénieuses inventées par M. Ossian Bonnet, qui reviennent à l'emploi des coordonnées symétriques sur la sphère pour la représentation sphérique, et à l'aide desquelles le plan tangent à la surface prend la forme

$$(1-\alpha\beta)x+i(1+\alpha\beta)y+(\alpha+\beta)z+\xi=0.$$

Avec ces coordonnées α, β, les lignes de courbure sont représentées par l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} d\beta^2 = 0,$$

et ce fait, rapproché d'un fait analogue déjà signalé pour les lignes asymptotiques, conduit à la correspondance entre la théorie de ces lignes et celle des lignes de courbure dont la découverte est due à M. S. Lie. Ajoutons qu'avec ces coordonnées α, β les éléments métriques de la surface ont des expressions des plus simples et des plus utiles.

Enfin, sous le titre d'*Applications diverses,* le dernier Chapitre développe plusieurs méthodes de transformation, dont le propre est de conserver les lignes de courbure.

Le Livre III offre une des plus brillantes applications des théories générales, les *surfaces minima,* pour lesquelles ces théories peuvent être poussées et réussissent toutes jusqu'au bout. Après un Chapitre entièrement historique, M. Darboux débute par la représentation ponctuelle des surfaces minima. Il l'obtient en exprimant que les lignes de longueur nulle forment un réseau conjugué; en prenant ces lignes pour coordonnées, il se trouve que l'équation aux dérivées partielles (1) se réduit ici à la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0,$$

dont l'intégration est immédiate. Les formules de Monge, de Legendre, de Weierstrass en résultent sans difficulté, et l'auteur fait connaître les conditions que doivent remplir les fonctions pour que la surface soit réelle, ou bien algébrique.

L'emploi des coordonnées tangentielles, avec les variables de M. Bonnet, permet d'écrire sous une forme très simple l'équation tangentielle la plus générale des surfaces minima; de plus, les lignes de courbure, les lignes asymptotiques se trouvent avec la plus grande facilité. Ces mêmes coordonnées tangentielles se prêtent fort bien à l'étude des modifications apportées dans les fonctions arbitraires par un changement du trièdre de coordonnées. La détermination des surfaces minima qui sont hélicoïdales, de révolution, ou spirales résulte immédiatement des formules

obtenues. Ces mêmes coordonnées enfin fournissent une représentation conforme sur la sphère des surfaces minima. Un Chapitre entier traite de la représentation conforme des surfaces minima; cette question est en effet de la plus haute importance dans la détermination des surfaces qui passent par un contour donné. Il ne nous est pas possible de rapporter tous les faits que l'auteur a groupés ici, comme par exemple la détermination de toutes les surfaces minima dont les deux systèmes de lignes de courbure sont planes, une construction nouvelle de la surface de M. Enneper, etc.; mêmes omissions à propos du Chapitre suivant, où il est question de la surface adjointe de M. Bonnet, ou, plus généralement, des surfaces minima associées; ces surfaces se correspondent par applicabilité, de plus, aux points correspondants les plans tangents sont parallèles.

Dans ces dernières années, les surfaces minima ont été l'objet de recherches fécondes et étendues; M. Sophus Lie, et, après lui, M. Ribaucour, se sont rencontrés sur ce terrain de recherches. M. Lie, interprétant géométriquement les équations de Monge, a remarqué qu'une surface minima peut être considérée comme engendrée par la translation d'une ligne de longueur nulle glissant sur une autre ligne de longueur nulle. M. Lie a donné aux courbes de longueur nulle le nom de *courbe minima*. Si les deux lignes minima qui engendrent la surface sont distinctes, celle-ci est dite *simple,* au contraire, elle est dite *double* si les deux courbes minima sont superposables. La distinction entre ces deux cas, l'étude des conditions pour que la surface soit réelle ou algébrique donnent lieu à des développements étendus. Les surfaces doubles réelles rentrent dans la catégorie de ces curieuses surfaces de Möbius qui n'ont qu'un seul côté. Mais c'est surtout dans l'étude des surfaces minima algébriques que l'on sent toute l'importance des recherches de M. Lie : la détermination de l'ordre, de la classe, des singularités des surfaces algébriques minima d'après les méthodes de l'illustre géomètre norwégien sont l'objet d'un Chapitre spécial.

Nous arrivons maintenant au problème capital de la théorie des surfaces minima, problème dont la solution, quoique incomplète, a jeté un grand jour sur divers points de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. Ce problème consiste dans la détermination de la surface minima qui passe par un con-

tour donné et admet en chaque point un plan tangent donné. C'est Björling qui a posé ce problème; outre les solutions données par lui et M. Bonnet, M. Schwarz en a fait connaître une autre fondée sur d'élégantes formules dans lesquelles intervient la surface adjointe. M. Darboux développe cette méthode et l'applique à la recherche de la surface minima réglée, ou de la surface minima qui admet une ligne plane donnée pour ligne de courbure ou pour ligne géodésique. Après quoi il aborde la question suivante : une développable algébrique étant donnée, trouver toutes les surfaces algébriques minima inscrites. M. Lie a montré comment d'une solution *supposée connue* on pouvait en déduire toutes les autres; mais il restait à trouver cette première solution. En résolvant complètement ce problème, M. Darboux a donc fait faire un pas à la théorie des surfaces minima, et sa solution, fondée sur l'emploi du trièdre de référence mobile et des mouvements relatifs, montre une fois de plus tout l'avantage de cette méthode. Signalons ce théorème curieux :

Étant donnée une courbe algébrique (R), *si l'on porte sur les tangentes à cette courbe, à partir du point* M *de contact, une longueur* MC *égal à* $\tau \frac{d\tau}{ds}$ (τ est le rayon de torsion), *on obtiendra une courbe* (c) *suivant laquelle une surface minima algébrique sera inscrite à la développable formée par la tangente de* (R).

Ajoutons que cette surface minima se détermine complètement *sans intégration ni quadrature.*

M. Darboux reprend encore le même problème par les méthodes ingénieuses (¹) de M. Ribaucour.

Dans les trois derniers Chapitres, M. Darboux s'occupe de la détermination des surfaces minima assujetties à passer par des contours rectilignes donnés, et à couper à angle droit des plans donnés. Riemann, M. Weierstrass et M. Schwarz ont le plus contribué aux résultats acquis à la Science dans cet ordre de recherches.

Une première méthode consiste dans l'emploi d'une représentation géographique plane propre à toute surface minima, et dans

(¹) Le Travail de M. Ribaucour a été analysé au tome VI du *Bulletin*, p. 11.

laquelle les lignes de courbure sont représentées par des parallèles aux axes de coordonnées et les lignes asymptotiques par des parallèles aux bissectrices de ces axes.

L'emploi simultané de cette représentation et de la représentation conforme sur la sphère, qui résulte de la représentation sphérique (suivant Gauss) de la surface, permet de ramener le problème à celui de la représentation conforme d'une aire sphérique sur une aire plane. Cette méthode réussit pour le cas de deux droites indéfinies, et pour le cas de deux droites qui se coupent et d'un plan qui leur est sécant. Malheureusement, elle présente au delà de ces exemples des difficultés sérieuses qui tiennent à plusieurs raisons, que M. Darboux met en lumière. D'abord, la représentation sphérique n'est pas absolument déterminée; en second lieu, l'hypothèse d'une représentation plane parfaitement limitée ne saurait convenir à tous les cas par suite de la présence possible de points de ramification, qui empêchent l'uniformité de la fonction au moyen de laquelle s'effectue la représentation conforme. Si l'on impose à cette fonction l'uniformité, le contour par lequel doit passer la surface minima *se trouve être déterminé par la simple direction de ses éléments.*

Ces difficultés ont porté l'auteur à rechercher une autre solution du problème, et il a utilisé les indications si précieuses que M. Weierstrass a données sur ses recherches à l'Académie de Berlin; en partant des formules dues à cet illustre géomètre, M. Darboux est parvenu à constituer une méthode qui répond pleinement au but.

Cette méthode fait dépendre la représentation ponctuelle d'une surface minima de deux fonctions G, H d'une variable, définies par M. Weierstrass. Une substitution linéaire de déterminant $+1$ effectué sur ces fonctions équivaut à un déplacement de la courbe minima génératrice et de la surface elle-même. Si donc on forme l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0. \tag{2}$$

dont G et H sont deux solutions, p et q ne dépendent aucunement de la position de la surface, mais seulement de sa forme. L'intérêt se concentre donc sur ces fonctions p, q, et l'on voit que pour leur étude il sera permis de placer les axes de coordonnées

successivement là où ils seront utiles. La surface adjointe intervient également dans la méthode; la limite du segment adjoint sera, comme pour la surface elle-même, une chaîne de segments de droites et de plans; mais deux éléments correspondants des deux chaînes sont toujours d'espèces différentes. Enfin *l'équation* (2) *convient également à la surface adjointe.*

M. Darboux étudie ensuite l'équation différentielle, et enseigne à la former. Il reste encore, une fois ce résultat atteint, à intégrer l'équation et à chercher deux intégrales convenablement choisies, qui subissent des modifications parfaitement déterminées lorsqu'on suit un chemin fermé quelconque; ce problème posé dans toute sa généralité est encore insoluble, mais on en possède la solution dans certains cas particuliers. Pour achever le problème, il ne restera plus qu'à déterminer les constantes arbitraires qui restent dans l'équation par l'identification du contour obtenu avec le contour proposé, ce qui exigera encore la résolution d'équations transcendantes. On voit que cette méthode ne fait pour ainsi dire pas appel aux représentations conformes de la surface.

Si l'emploi direct de cette méthode offre encore des difficultés d'exécution pour un contour quelconque donné *a priori,* on a du moins la ressource de suivre la marche inverse et, partant d'équations du second ordre dont les intégrales soient connues, d'étudier les surfaces et les contours qui leur correspondent.

M. Darboux suit cette méthode inverse, et étudie notamment les surfaces que l'on peut déduire de l'équation de la série hypergéométrique dont la marche des intégrales a été si complètement étudiée dans le beau Mémoire de M. Goursat.

Il suppose ensuite que les fonctions G et H aient des valeurs de la forme

$$A\Pi(t-a)^{\alpha} \quad \text{ou} \quad A\Pi\Theta^{\alpha}(t-a)\,\Pi H^{\beta}(t-a).$$

Mais nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer au Livre lui-même le lecteur désireux d'apprécier pleinement et dans leurs détails ces savantes applications. G. K.

MÉLANGES.

SUR LES COURBES ET SURFACES DÉCRITES PENDANT LE MOUVEMENT A CINQ CONDITIONS;

PAR M. SCHOENFLIES.

Dans la Communication suivante je donnerai quelques théorèmes sur les courbes et les surfaces décrites pendant le mouvement d'un corps invariable assujetti à cinq conditions. La plupart de ces théorèmes me paraissent nouveaux; quelques-uns sont déjà contenus dans le beau Mémoire de M. Thévenet intitulé : « Étude analytique du déplacement infiniment petit d'un corps solide » (1).

Soit Σ le système solide qui se déplace dans l'espace Σ'. Pour un observateur lié invariablement avec Σ, le système Σ' se déplace par rapport à Σ; c'est ce mouvement de Σ' dans le système Σ que j'ai nommé le *mouvement indirect* (2). Il est clair que les lois qui régissent le mouvement direct et le mouvement indirect sont exactement les mêmes.

Pour la démonstration on peut supposer que les positions consécutives Σ_0, Σ_1, Σ_2 du système Σ soient prises à volonté; mais il nous suffira d'énoncer les résultats seulement pour le cas du mouvement continuel.

1. *Lieu des centres des sphères osculatrices des trajectoires des points d'une droite.* — Pour un point quelconque P d'une droite d les trois plans normaux consécutifs π_0^v, π_1^v, π_2^v se coupent dans un point P^v, centre de la sphère osculatrice de la trajectoire de P. Les plans normaux relatifs aux différents points de la droite d forment trois faisceaux homographiques qui, en général, engendrent une cubique gauche k_3 (3). J'ajoute que, pour le

(1) Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1886.

(2) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CI, p. 150.

(3) Ce théorème est dû à M. Haag. *Voir* aussi MANNHEIM, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 551.

mouvement indirect, P est le centre de la sphère osculatrice de la trajectoire du point P (¹).

A chaque moment il existe dans le système Σ une courbe gauche du sixième ordre k_6 (²) dont les points ont un axe de courbure stationnaire; nous en concluons que les trajectoires de ces points sont surosculatrices à des cercles. Pour un point quelconque K de cette courbe les plans normaux $\varkappa_0^\nu$, $\varkappa_1^\nu$, $\varkappa_2^\nu$ passent par la même droite a_k.

La courbe k_6 contient les quatre points imaginaires qui sont points principaux du complexe $C_{01}^{(2)}$ engendré par les systèmes de plans normaux correspondants Σ_0^ν et Σ_1^ν. En regardant que pour chacun de ces points deux positions consécutives coïncident, nous trouvons qu'ils appartiennent aussi à la courbe d'inflexion i_3 (³). En général, ce sont *les seuls points* qui sont en commun à ces deux courbes.

Si la droite d rencontre la courbe k_6 une fois, la cubique gauche k_3 se réduit à une conique, ou plutôt se compose de cette conique et de l'axe de courbure stationnaire du point de rencontre (³).

Si la droite d rencontre la courbe k_6 dans deux points K et L, les centres des sphères osculatrices forment une droite d', composant avec les axes a_k et a_l des points K et L la cubique gauche k_3 (⁴). A un point quelconque P de la droite d correspond un point P′ de d' comme centre de la sphère osculatrice. Mais, comme nous l'avons mentionné plus haut, le point P est centre de la sphère osculatrice de P′ pour le mouvement indirect; donc la droite d' rencontre deux fois la courbe k_6' du système Σ′. Ainsi, quand on fait abstraction des axes de courbure stationnaires comme a_k et a_l, on obtient le résultat suivant :

Les cordes des courbes k_6 et k_6' des systèmes Σ et Σ′ se correspondent de telle manière que les centres des sphères osculatrices relatives aux différents points d'une corde de

---

(¹) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CI, p. 151.

(²) *Voir* la *Geometrie der Bewegung* de l'auteur, p. 142-145. Leipzig, 1886.

(³) Ce sont les quatre points imaginaires mentionnés par M. Thévenet, *loc. cit.*, p. 24.

(⁴) *Voir* THÉVENET, *loc. cit.*, p. 46 et 47.

l'une de ces deux courbes forment eux-mêmes une corde de l'autre courbe.

2. *Lieu des points dont les trajectoires sont surosculatrices à des cercles. Surface gauche composée des axes de courbure de ces points.* — Il peut arriver que la droite d rencontre la courbe k_6 trois fois; soient K, L, M les points de rencontre. Dans ce cas, excepté les axes a_k, a_l, a_m, la courbe k_3 se réduit à un seul point S, ce qui exige que les axes a_k, a_l, a_m passent tous par S.

Soit maintenant P un point quelconque de la droite d; les quatre positions P_0, P_1, P_2, P_3 ont la même distance du point S. Par conséquent, pour le mouvement indirect, S comme point K' de Σ' appartient à la courbe k'_6 du système Σ' et la droite d est son axe de courbure a'_k. En regardant que les trois axes a_k, a_l, a_m concourent dans le même point de k'_6, nous trouvons que par un point quelconque de k'_6 il passe les axes de trois points de la courbe k_6.

Les courbes k_6 et k'_6 obéissant aux mêmes lois, il s'ensuit que la surface réglée formée par les axes de courbure des différents points de k_6 est composée de toutes les droites qui rencontrent trois fois la courbe k'_6. Mais, comme nous venons de démontrer, par chaque point de k'_6 il passe trois de ces droites; une quelconque d'elles est donc rencontrée par six autres. Il s'ensuit que la surface considérée est du huitième ordre. Donc :

Les droites rencontrant trois fois la courbe k_6 sont les axes de courbure stationnaires pour le mouvement indirect; pour chacune d'elles la courbe des centres des sphères osculatrices se réduit à un seul point appartenant à la courbe k'_6 du mouvement indirect.

La surface réglée formée par les axes de courbure des points de la courbe k_6 est du huitième ordre et contient la courbe k'_6 du mouvement indirect comme courbe triple.

On sait que les droites telles que les axes de courbure relatifs à tous leurs points forment un cône, constituent un complexe du second ordre, et que les axes de courbure sont les droites ana-

logues pour le mouvement indirect. Avec M. Thévenet (1) nous désignons ces droites sous le nom de *droites pivotantes*. En effet, si S est le sommet du cône relatif à la droite, il est clair que la droite pivote autour du point S.

En faisant usage de cette définition, nous désignons les droites a_k, a_l, ... sous le nom de *droites pivotantes stationnaires* et nous avons le résultat suivant. A chaque moment, il existe une surface gauche du huitième ordre composée des droites pivotantes stationnaires. Les sommets des cônes formés par les axes de courbure relatifs aux points de ces droites constituent la courbe k'_6 du mouvement indirect.

Les théorèmes que nous venons d'établir s'obtiennent aussi comme conséquence des théorèmes généraux énoncés pour la première fois par MM. *Noether* et *Cremona* (2). Nous avons vu que le point P′, centre de la sphère osculatrice du point P, est le point d'intersection des plans normaux π_0^ν, π_1^ν, π_2^ν. Mais les systèmes Σ_0^ν, Σ_1^ν, Σ_2^ν formés par l'ensemble des plans normaux homologues sont homographiques; donc il existe une correspondance du troisième ordre entre les points P et les points P′, et les courbes k_6 et k'_6 ne sont autre chose que les courbes principales de cette correspondance (3). Cependant, pour faire voir clairement le caractère cinématique des courbes et surfaces, j'en ai donné la déduction précédente, qui découle immédiatement des lois connues de la théorie du mouvement.

3. *Génératrices singulières des surfaces réglées. Droites dont trois positions consécutives passent par le même point. Surface gauche formée par les tangentes des points de la courbe d'inflexion.* — Une droite quelconque d de Σ engendre une surface réglée. Mais à chaque moment il y a un complexe tétraédral $C_0^{(2)}$ formé par les droites dont les positions suivantes d_0 et d_1 se coupent.

En général, une telle droite est une génératrice singulière de sa surface; donc il s'ensuit que les génératrices singulières des sur-

(1) *Loc. cit.*, p. 26.

(2) *Voir* NOETHER, *Math. Annalen*, t. III, p. 552. CREMONA, *Annali di Math.*, 2e série, t. V, p. 131. *Voir* aussi STURM, *Math. Annalen*, t. XXII, p. 480.

(3) Voir *Geometrie der Bewegung*, p. 139-144.

faces réglées décrites par les différentes droites de Σ constituent un complexe tétraédral $C_0^{(2)}$.

Dans un plan quelconque les droites du complexe enveloppent une parabole; donc les deux complexes $C_0^{(2)}$ et $C_1^{(2)}$ ont en commun une congruence du quatrième ordre et de la troisième classe. A proprement parler, il faudrait adjoindre la congruence spéciale qui contient toutes les droites du plan à l'infini; mais on peut bien en faire abstraction. Pour chaque droite d de cette congruence les positions d_0, d_1 et d_1, d_2 se coupent; on peut donc dire qu'une telle droite est *génératrice singulière persistante* de la surface réglée correspondante.

Parmi ces droites il en peut exister telles que deux quelconques des positions d_0, d_1, d_2 se coupent. Dans ce cas, ou d_0, d_1, d_2 passent par le même point, ou elles sont situées dans un seul plan.

Soit r une droite dont les trois positions r_0, r_1, r_2 concourent dans le même point R', pour le mouvement indirect le point R' restera dans trois positions consécutives R'_0, R'_1, R'_2 sur la droite r; donc R' appartient à la courbe d'inflexion pour le mouvement indirect et la droite r est la tangente de sa trajectoire. Ainsi on peut dire que les droites cherchées de l'un des deux systèmes Σ et Σ' sont formées par les tangentes des points de la courbe d'inflexion de l'autre système.

Les tangentes de tous les points de la courbe d'inflexion i_3 forment une surface réglée. Pour en trouver le degré, nous cherchons combien de ces tangentes rencontrent une quelconque d'elles.

Soient A et B deux points de la courbe d'inflexion dont les tangentes t_a et t_b se coupent, la corde AB sera une droite du complexe $C_0^{(2)}$ formé par les tangentes des trajectoires de tous les points de Σ. De même, si la corde AB de la courbe i_3 appartient au complexe $C_0^{(2)}$, les tangentes t_a et t_b des points A et B concourent dans le même point.

Toutes les droites du complexe $C_0^{(2)}$ qui passent par le point A constituent un cône du second ordre, et le cône formé par les cordes de la courbe i_3 dont A est le sommet est de même du second ordre. Ces deux cônes ont en commun la droite u parallèle à l'axe instantané x; donc ils se coupent en outre dans trois autres

droites. Mais la droite u n'est pas tangente d'un point fini du système Σ; d'où l'on conclut que par chaque point de la courbe d'inflexion passent trois cordes qui appartiennent au complexe $C_0^{(2)}$.

La tangente de la trajectoire d'un point quelconque de la courbe i_3 est donc rencontrée par trois autres, par conséquent :

La surface réglée formée par les tangentes des trajectoires des points de la courbe d'inflexion est du cinquième ordre (1).

Toutes les droites qui, dans trois positions consécutives, passent par le même point de leurs surfaces réglées, constituent à chaque moment une surface gauche du cinquième ordre (2). *Ces points forment eux-mêmes une courbe gauche du troisième ordre, courbe d'inflexion du mouvement indirect.*

Nous nommons cette surface réglée la surface R_5.

4. *Droites dont trois positions consécutives sont contenues dans le même plan. Surface enveloppée par les plans qui passent par des droites stationnaires de leurs développables. Courbe double de la surface gauche* R_5. — Soit h une droite dont les trois positions consécutives h_0, h_1, h_2 sont situées dans un seul plan. Pour les trois positions considérées elle obéit aux lois du mouvement plan. Par conséquent, sur cette droite il y a deux points d'inflexion : elle est donc nécessairement une corde de la courbe d'inflexion i_3. En outre, il est évident qu'une telle droite h appartient au complexe $C_0^{(2)}$. Mais il est aussi vrai que chaque droite du complexe $C_0^{(2)}$ qui est une corde de la courbe d'inflexion est une telle droite h.

Nous avons démontré plus haut que par un point quelconque de la courbe i_3 passent trois de ces droites. D'autre part, il est évident que le point d'intersection de deux droites h est un point de la courbe i_3. Une droite h est donc coupée par quatre autres de ces droites, d'où l'on conclut que leur ensemble forme une

(1) Dans ces deux théorèmes, nous avons fait abstraction des droites du plan à l'infini. Ce plan se meut dans lui-même; donc ce mouvement obéit aux lois connues du mouvement plan.

(2) M. Thévenet, *loc. cit.*, p. 60, trouve que la surface est du quatrième degré. Ce résultat a donc besoin d'une modification.

surface gauche du sixième ordre sur laquelle la courbe d'inflexion est une courbe triple. Donc :

L'ensemble des droites qui dans trois positions consécutives sont contenues dans un même plan tangent de leurs surfaces réglées forment à chaque moment une surface gauche du sixième ordre R_6. *La courbe d'inflexion est une courbe triple de cette surface.*

Je remarque encore que les droites r et les droites h sont les droites analogues et communes des trois complexes $C^{(2)}_{12}$, $C^{(2)}_{20}$, $C^{(2)}_{01}$ formés par deux quelconques des trois systèmes normaux Σ^{ν}_0, Σ^{ν}_1, Σ^{ν}_2.

Nous allons enfin étudier la surface développable formée par l'ensemble des plans que nous venons de considérer. Si τ_i' est le plan de Σ' qui contient les trois droites h_0, h_1, h_2, pour le mouvement indirect, le plan τ_i' passe dans trois positions consécutives par la droite h_0; cela veut dire que la droite h est une droite stationnaire de la surface développable. La surface cherchée peut donc être considérée comme l'ensemble des plans qui passent par des droites stationnaires de leurs développables.

Maintenant, considérons un point quelconque S de Σ et les trois gerbes de plans, dont les sommets sont S_0, S_1, S_2. Dans ces gerbes, il y a, en général, six plans τ_i dont les positions τ_{i0}, τ_{i1}, τ_{i2} concourent dans la même droite : donc l'ensemble des plans τ_i enveloppe une surface développable Φ_6. Ainsi :

L'ensemble des plans passant par des droites stationnaires de leurs développables constituent une surface développable du sixième ordre Φ_6. *Ces droites forment elles-mêmes une surface gauche du sixième ordre, surface* R'_6 *du mouvement indirect.*

Les plans tangents τ_i *relatifs aux différentes droites de la surface gauche* R_6 *forment une surface développable du sixième ordre. Cette développable est la surface* Φ'_6 *du mouvement indirect.*

Revenons encore une fois à la courbe d'inflexion. Soit, comme précédemment, t_a la tangente de la trajectoire du point A de cette courbe; soient $AH = h$, $AK = k$, $AL = l$ les trois droites de R_6 passant par le point A. Les plans joignant la droite t_a et une quelconque des droites h, k, l sont trois plans de la surface Φ_6.

La tangente t_a est coupée par les tangentes t_h, t_k, t_l des points H, K, L, et ces tangentes sont les génératrices de la surface R_6. Nous en concluons que chaque plan de la surface Φ_6 contient deux génératrices de la surface R_5 et que par une génératrice de cette surface passent trois plans de la développable Φ_6.

Cette développable est donc composée des plans tangents doubles de la surface R_5, par conséquent, selon les propriétés connues des surfaces réglées, nous obtenons le résultat que la surface R_5 possède une courbe double du sixième ordre rencontrant chaque génératrice trois fois. Ainsi :

La surface gauche R_5 *composée des tangentes des trajectoires des points de la courbe d'inflexion possède une courbe double du sixième ordre. La surface* R_5 *est formée par les cordes triples de cette courbe* (1).

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. ED. WEYR A M. HERMITE.

Permettez que je vous soumette une observation qui concerne la troisième des Notes tirées des lettres que vous avez écrites à M. Craig. Vous y donnez les deux expressions pour $\cos x$

$$(1) \qquad \cos x = \prod\left[\left(1 - \frac{2x}{m\pi}\right) e^{\frac{2x}{m\pi}}\right], \qquad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

$$(2) \qquad \cos x = \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right) \prod\left\{\left[1 - \frac{2x}{(2n-1)\pi}\right] e^{\frac{x}{n\pi}}\right\}, \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

et vous montrez leur coïncidence, en les déduisant, comme cas particuliers, d'une même formule plus générale. Or il ne me semble pas sans intérêt de démontrer directement l'égalité de ces deux expressions. Pour cela écrivons dans la première formule $2n - 1$ au lieu de m, et mettons à part le facteur qui correspond à $n = 0$; nous aurons

$$(1') \qquad \left\{ \cos x = \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right) e^{-\frac{2x}{\pi}} \prod\left\{\left[1 - \frac{2x}{(2n-1)\pi}\right] e^{\frac{2x}{(2n-1)\pi}}\right\}, \right.$$
$$\left. (n = \pm 1, \pm 2, \ldots). \right.$$

(1) Les surfaces réglées du cinquième ordre ont été étudiées en détail par M. H.-A. Schwarz; voir *Journal de Crelle*, t. 67.

En divisant l'expression (1′) par (1), nous obtenons le quotient

$$Q = e^{-\frac{2x}{\pi}} \prod \left[e^{\frac{2x}{(2n-1)\pi} - \frac{x}{n\pi}} \right],$$

ou bien

$$Q = e^{-\frac{2x}{\pi} + \frac{x}{\pi} \sum \frac{1}{n(2n-1)}},$$

Mais

$$\sum \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu(2\nu-1)} + \frac{1}{-\nu(-2\nu-1)} \right] = 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2-1},$$

et comme

$$\frac{1}{4\nu^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1} \right),$$

nous avons

$$\sum \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1} \right)$$
$$= 2\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots \right] = 2.$$

Par suite $Q = 1$, ce qu'il s'agissait de faire voir.

Je saisis cette occasion pour faire une remarque sur la formule

$$(3) \qquad \frac{1}{\cos x} = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)}{x^2 - (2\nu-1)^2 \frac{\pi^2}{4}},$$

qu'on déduit du développement connu

$$(4) \qquad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{x^2 - \nu^2\pi^2},$$

en y mettant $x + \frac{\pi}{2}$ à la place de x.

Tandis que la série qui figure dans la formule (4) est absolument convergente, la série (3) ne l'est pas.

On peut remédier à cet inconvénient de la manière suivante. Prenons la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

c'est-à-dire

$$-1 = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu-1},$$

et mettons (3) sous la forme

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)}{x^2 - (2\nu-1)^2 \frac{\pi^2}{4}} + \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{2\nu-1},$$

ou bien, en réunissant les deux sommes,

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{4x^2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu-1)\left[x^2 - (2\nu-1)^2 \frac{\pi^2}{4}\right]}.$$

La série qui figure maintenant à droite est absolument convergente; de plus, elle converge plus rapidement que la série (4).

D'ailleurs on peut parvenir à ce résultat en appliquant à la fonction impaire $\frac{1}{x\cos x}$ la méthode de Cauchy pour le développement en une somme infinie de fonctions rationnelles (*Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, 2e édition, n° 184). On trouve

$$\frac{1}{x\cos x} = \lim_{m=\infty} \sum \int \frac{1}{z(x-z)\cos z},$$

la somme se rapportant aux résidus relatifs aux points $z = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \ldots, \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}$. Le résidu relatif au point 0 est $\frac{1}{x}$; celui relatif au point $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ est $\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\frac{\pi}{2}\left[x-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]}$, tandis que celui qui se rapporte au point $-(2k+1)\frac{\pi}{2}$ est égal à $\frac{(-1)^{k}}{-(2k+1)\frac{\pi}{2}\left[x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]}$. On a donc

$$\frac{1}{x\cos x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\frac{\pi}{2}\left[x-(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]} - \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)\frac{\pi}{2}\left[x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]} \right\},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{x\cos x} = \frac{1}{x} + \frac{4x}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\left[x^2 - (2k+1)^2 \frac{\pi^2}{4}\right]}.$$

Si l'on y met $2\nu - 1$ à la place de $2k + 1$, on retrouve la formule

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{4x^2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu-1)\left[x^2 - (2\nu-1)^2 \frac{\pi^2}{4}\right]}.$$

UN THÉORÈME CONCERNANT LA SURFACE DE STEINER, ET L'ENSEMBLE DE TROIS CONIQUES QUI SE COUPENT DANS L'ESPACE;

PAR M. G. KOENIGS.

La surface de Steiner est une surface du quatrième ordre, de troisième classe, coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents; elle possède trois droites doubles qui concourent en un même point. Cette surface est représentable point par point sur le plan et les coordonnées x, y, z, t d'un point quelconque de la surface sont proportionnelles à des formes quadratiques de trois variables u, v, w, en sorte que l'on a généralement comme représentation de la surface de Steiner les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho x = \varphi_1(u, v, w), \\ \rho y = \varphi_2(u, v, w), \\ \rho z = \varphi_3(u, v, w), \\ \rho t = \varphi_4(u, v, w). \end{cases}$$

Aux sections planes de la surface répondent sur le plan représentatif les coniques d'un réseau, n'ayant aucun point fondamental. Par exemple, la section par le plan,

$$(2) \qquad lx + my + nz + pt = 0,$$

est représentée par la conique

$$(3) \qquad l\varphi_1 + m\varphi_2 + n\varphi_3 + p\varphi_4 = 0.$$

Si la conique (3) se décompose en un système de droites, le plan (2) est tangent à la surface. On obtiendrait donc l'équation tangentielle de la surface de Steiner en égalant à zéro le discriminant de la conique (3).

La représentation d'une surface de Steiner à l'aide de formules telles que (1), où les φ_i sont des formes quadratiques, est possible d'une infinité de manières; par exemple, on peut effectuer sur u, v, w telle transformation linéaire que l'on voudra.

Si l'on effectue la transformation de manière à réduire simultanément φ_1 et φ_2 à une somme de carrés, par exemple,

$$\varphi_1 = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$\varphi_2 = au^2 + bv^2 + cw^2,$$

il reste encore trois paramètres dans φ_2, et six dans chacune des formes φ_3 et φ_4, soit en tout 15 paramètres.

On peut voir cela encore autrement; en effet, la surface étant rapportée au tétraèdre des quatre plans qui la touchent chacun en tous les points d'une conique, l'équation qui la représente a la forme

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} + \sqrt{dt} = 0.$$

La surface est donc déterminée lorsque l'on connaît ce tétraèdre, ce qui exige $3 \times 4 = 12$ données, et lorsque l'on connaît les rapports

$$a : b : c : d.$$

Cela fait bien encore 15 paramètres.

Enfin, une autre forme de l'équation de la surface permet aussi de mettre le même nombre 15 en évidence.

En prenant pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant pour arêtes les trois droites doubles concourantes en son sommet o, et ayant pour face opposée à o un plan tangent en tous les points d'une conique, on peut faire prendre à l'équation de la surface la forme

$$xyzt + (Ayz + Bzx + Cxy)^2 = 0.$$

Cette équation contient trois constantes et, si l'on y joint les douze constantes qui fixent la position du tétraèdre, on a bien 15 paramètres.

Ainsi quinze conditions suffisent pour déterminer une surface de Steiner: par exemple, quinze points ou quinze plans tangents, etc.

Prenons en particulier trois coniques A, B, C se coupant deux à deux en un point. Il est intéressant de savoir que ces trois coniques définissent *deux* surfaces de Steiner et *deux seulement*.

Pour démontrer ce théorème, je prendrai pour tétraèdre de référence celui formé par le plan des trois coniques et par le plan des trois points d'intersection des coniques.

En faisant rentrer s'il y a lieu dans les coordonnées des facteurs constants, les trois coniques peuvent être représentées par les formules

$$(A)\quad \begin{cases} \rho x = 0, \\ \rho y = \xi^2 + a\xi\xi', \\ \rho z = a'\xi\xi' + \xi'^2, \\ \rho t = a''\xi\xi'; \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} \rho' x = b\eta\eta' + \eta'^2, \\ \rho' y = 0, \\ \rho' z = \eta^2 + b'\eta\eta', \\ \rho' t = b''\eta\eta'; \end{cases}$$

$$(C)\quad \begin{cases} \rho'' x = \zeta^2 + c\zeta\zeta', \\ \rho'' y = c'\zeta\zeta' + \zeta'^2, \\ \rho'' z = 0, \\ \rho'' t = c''\zeta\zeta'. \end{cases}$$

Dans ces formules, $\xi : \xi'$, $\eta : \eta'$, $\zeta : \zeta'$ sont les paramètres respectifs et a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'' des constantes.

Désignons par O le point de rencontre des trois plans des coniques; par O', O'', O''' les points de rencontre des coniques B, C; C, A; A, B. Les points O, O', O'', O''' sont les sommets du tétraèdre de référence.

La conique (A) est l'intersection du plan OO''O''', ou $x = 0$ avec le cône de sommet O'

$$(a''y - at)(a''z - a't) - t^2 = 0.$$

Prenons maintenant une surface de Steiner qui sera d'abord assujettie à toucher les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. On pourra représenter cette surface sous la forme

$$\begin{aligned} \rho x &= u(\lambda u + \mu v + \nu w), \\ \rho y &= v(\lambda' u + \mu' v + \nu' w), \\ \rho z &= w(\lambda'' u + \mu'' v + \nu'' w), \\ \rho t &= \varphi(u, v, w) = \text{forme quad. en } u, v, w. \end{aligned}$$

Exprimons en outre que les coniques définies sur la surface par les équations $u = 0$ et $v = 0$ respectivement se coupent dans le plan $t = 0$; il faut que φ s'annule avec u et v; si de même les coniques $u = 0$, $w = 0$, et $v = 0$, $w = 0$ se coupent dans le plan $t = 0$, on voit que φ ne doit contenir que les rectangles uv, uw, vw, et en faisant rentrer dans u, v, w des constantes, on

aura

$$\begin{aligned}
\rho x &= u(\lambda u + \mu v + \nu w),\\
\rho y &= v(\lambda' u + \mu' v + \nu' w),\\
\rho z &= w(\lambda'' u + \mu'' v + \nu'' w),\\
\rho t &= vw + wu + uv.
\end{aligned}$$

Telle est la représentation générale d'une surface de Steiner tangente aux plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et passant par les points O, O′, O″. Il reste à identifier les trois coniques de la surface qui passent par ces points avec les coniques (A), (C), (C) données.

La conique $u = 0$ est représentée par les équations

$$(A') \qquad \begin{cases} x = 0,\\ \rho y = v(\mu' v + \nu' w),\\ \rho z = w(\mu'' v + \nu'' w),\\ \rho t = vw. \end{cases}$$

Identifions avec la conique (A). Pour cela, je cherche le cône de sommet O′ qui a (A′) pour base; on trouve

$$(y - \nu' t)(z - \mu'' t) = \mu' \nu'' t^2;$$

l'identification donne donc

$$\nu' = \frac{a}{a''}, \qquad \mu'' = \frac{a'}{a''}, \qquad \mu'\nu'' = \frac{1}{a''^2}.$$

En procédant de même pour les autres coniques (B) et (C), on trouve

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{b}{b''}, & \lambda' &= \frac{b'}{b''}, & \nu''\lambda &= \frac{1}{b''^2},\\
\mu &= \frac{c}{c''}, & \lambda'' &= \frac{c'}{c''}, & \lambda\mu' &= \frac{1}{c''^2},
\end{aligned}$$

Représentons par ε la quantité ± 1, on trouve

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{a''\varepsilon}{b''c''}, & \mu &= \frac{c}{c''}, & \nu &= \frac{b}{b''},\\
\lambda' &= \frac{c'}{c''}, & \mu' &= \frac{b''\varepsilon}{c''a''}, & \nu' &= \frac{a}{a''},\\
\lambda'' &= \frac{b'}{b''}, & \mu'' &= \frac{a'}{a''}, & \nu'' &= \frac{c''\varepsilon}{a''b''},
\end{aligned}$$

et l'on obtient ainsi définitivement

$$\begin{aligned}
\rho x &= u\left(\frac{a''\varepsilon}{b''c''}u + \frac{c}{c''}v + \frac{b}{b''}w\right),\\
\rho y &= v\left(\frac{c'}{c''}u + \frac{b''\varepsilon}{c''a''}v + \frac{a}{a''}w\right),\\
\rho z &= w\left(\frac{b'}{b''}u + \frac{a'}{a''}v + \frac{c''\varepsilon}{a''b''}w\right),\\
\rho t &= vw + wu + uv.
\end{aligned}$$

Si l'on a égard à la double valeur de ε, on voit que l'on a obtenu deux surfaces de Steiner passant par les trois coniques. La méthode suivie donne du reste toutes les surfaces de Steiner passant par ces trois coniques; le théorème est ainsi démontré.

Ce théorème donne le moyen de former des transformations rationnelles dans lesquelles trois coniques A, B, C de l'espace, qui se coupent, sont les transformées de trois droites formant un triangle.

Considérons, en effet, la transformation

$$\begin{aligned}
\rho x &= u\left(\frac{a''\varepsilon}{b''c''}u + \frac{c}{c''}v + \frac{b}{b''}w\right) + s(lu + mv + nw + ps),\\
\rho y &= v\left(\frac{c'}{c''}u + \frac{b''\varepsilon}{c''a''}v + \frac{a}{a''}w\right) + s(l'u + m'v + n'w + p's),\\
\rho z &= w\left(\frac{b'}{b''}u + \frac{a'}{a''}v + \frac{c''\varepsilon}{a''b''}w\right) + s(l''u + m''v + n''w + p''s),\\
\rho t &= vw + wu + uv + s(l'''u + m'''v + n'''w + p'''s),
\end{aligned}$$

qui, à tout point $\Pi(u, v, w, s)$ d'un espace E, fait correspondre un point $\varpi(x, y, z, t)$ d'un espace e. Un plan quelconque de E a pour image une surface de Steiner; par exemple, le plan $s = 0$ a pour image la surface précédemment considérée, et les droites de ce plan ont pour images les coniques de la surface. Les coniques A, B, C, en particulier, sont les images de trois droites du plan $s = 0$ (1).

(1) Les coniques de l'espace e sont, comme on sait, huit fois indéterminées, elles forment un système que je représenterai par I^8. Les coniques de l'espace e qui sont les transformées des droites de l'espace E par une transformation quadratique déterminée forment un système quatre fois indéterminé I^4. Ce qui précède touche, on le voit, à la théorie de ces systèmes remarquables I^4, qui se rencontrent dans un grand nombre de questions de Géométrie, et notamment dans l'étude d'une surface importante du huitième ordre que j'ai signalée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* en août 1887. Généralement six coniques *arbitrairement choisies* définissent un système I^4, et peuvent, par conséquent, être regardées comme les transformées quadratiques de six droites d'un autre espace.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TANNERY (Paul). — Pour l'histoire de la science hellène, de Thalès a Empédocle. 396 p. in-8°. Paris, Félix Alcan (Collection historique des grands philosophes), 1887.

Les derniers mots par lesquels j'ai terminé le compte rendu du Livre de M. Paul Tannery sur la *Géométrie grecque* (¹) sont amplement justifiés par la publication d'un Volume que le même auteur vient de faire paraître en même temps, et qui est consacré spécialement à l'étude des systèmes cosmologiques et des opinions physiques des premiers penseurs hellènes. Je ne puis m'étendre ici sur la profonde originalité déployée par l'auteur dans cette étude, sur les découvertes toutes nouvelles qu'il a faites dans un terrain déjà si souvent exploré; mais je signalerai comme pouvant intéresser les mathématiciens :

1° L'Introduction : sur la distinction, au point de vue de la Science, des diverses périodes historiques de l'antiquité;

2° Les indications concernant l'histoire des origines de l'Astronomie, particulièrement dans les Chapitres relatifs à Thalès et à à Anaximandre;

3° La démonstration du fait que, à l'origine de la pensée scientifique, non seulement l'espace n'était pas conçu indépendamment du corps dont il est le lieu, mais que même il était regardé, implicitement ou explicitement, comme *fini*.

Un appendice *Sur l'arithmétique pythagorienne* (p. 369 à 391) est tiré d'un article publié ici même par l'auteur, mais qu'il a d'ailleurs refondu et augmenté, notamment d'une discussion sur l'époque où vivait Thymaridas de Paros (au siècle de Platon) et d'une traduction avec commentaires d'un fragment de Speusippe sur les nombres pythagoriques.

M. Tannery paraît penser maintenant que la synonymie mystique des nombres de la décade, telle qu'elle nous est connue d'après les néo-pythagoriciens, se serait développée à l'époque alexandrine, par la composition fantaisiste de pièces attribuées à Orphée et analogues aux hymnes qui nous sont parvenus sous ce nom. X.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, 273.

A History of the theory of elasticity and of the strength of Materials from Galilei to the present time. By the late Isaac Todhunter, D. Sc., F. R. S., edited and completed for the syndics of the University-press by Karl Pearson, M. A., Professor of applied Mathematics, University College, London. Vol. I. *Galilei to Saint-Venant* (1639-1850). Cambridge, at the University Press; 1886.

Après ses Ouvrages considérables et justement renommés sur l'Histoire du calcul des variations, des théories de l'attraction, le Dr Isaac Todhunter avait réuni les matériaux d'une *Histoire de la théorie de l'élasticité*, lorsque la mort le surprit. Le manuscrit d'une première moitié de cet Ouvrage était presque prêt à imprimer : à peine y restait-il quelques lacunes à combler; c'est ce Volume que les syndics de l'imprimerie de l'Université viennent de faire publier sous la surveillance du professeur Karl Pearson, et que celui-ci a eu la courtoisie de dédier à la mémoire du géomètre français à qui nous devons les plus beaux travaux sur l'élasticité, M. de Saint-Venant (1).

« Pendant l'été de 1884, les syndics de l'imprimerie de l'Université me remirent, sur la proposition du Dr Routh, le manuscrit de l'*Histoire de l'Élasticité* de feu le Dr Todhunter, pour le compléter et en préparer l'édition. Pour n'en pas retarder indéfiniment la publication, on décida d'imprimer Chapitre par Chapitre suivant le progrès du travail de revision. Il est certain que cet arrangement a accéléré la publication du premier Volume, mais en même temps il a produit quelques imperfections que je dois signaler. Tout d'abord, il a été impossible de mettre dans la première Partie de l'Ouvrage des renvois aux Parties qui suivent: c'est ce que j'ai essayé de corriger par l'addition d'un index étendu pour l'ensemble du Volume. En second lieu, je dois mentionner que mon travail était déjà avancé, lorsque j'acquis la conviction qu'il fallait laisser de côté dans l'analyse d'un Mémoire la notation et la terminologie propres à chaque auteur, et adopter pour tout le Livre une notation et une terminologie uniformes. C'était

(1) « To the memory of M. Barré de Saint-Venant, the foremost of modern élasticians, the editor dedicates his labour on the present Volume.

indispensable pour rendre l'Ouvrage facile à consulter, et d'un intérêt qui ne fût pas exclusivement historique. »

Ainsi débute la Préface de l'éditeur. Laissant de côté le premier point sur lequel je m'expliquerai bientôt, j'arrive aux notations proposées par M. K. Pearson, en regrettant qu'un autre auteur anglais, M. Ibbetson, ait déjà donné l'exemple de l'indépendance.

Notations et Terminologie. — C'est seulement après le Chapitre consacré à Poisson, au début de celui qui est relatif à Cauchy, que la notation devient uniforme; il me paraît utile de reproduire la Note C, page 881, et le Tableau de concordance, page 322, que l'éditeur y consacre (on les trouvera à la fin de ce compte rendu); quelles que puissent être les habitudes de chacun et ses préférences, l'uniformité de notations facilite tellement la lecture des Mémoires étrangers, qu'il faut souhaiter de voir universellement adoptées dans l'enseignement celles que propose M. Pearson. On ne pouvait guère hésiter qu'entre les notations de Coriolis, celles de Lamé et celles de Kirchhoff, les seules satisfaisantes par leur symétrie; c'est celle de Coriolis qui a été adoptée en supprimant la lettre inutile p, et écrivant seulement les deux indices surmontés d'un arc $\widehat{xy}$; la première lettre indique la direction (x) de la composante de la force élastique appliquée à une face dont la direction normale (y) est désignée par la seconde lettre.

On sait d'ailleurs que, dans la presque totalité des Mémoires publiés jusqu'ici, on admet comme évident qu'un élément de volume n'est jamais soumis à un couple proportionnel à son volume, — ce qui est manifestement faux pour les aimants permanents —, et il en résulte l'égalité des deux composantes $\widehat{xy}$, $\widehat{yx}$, quel que soit l'angle des deux directions x, y. La notation adoptée ne préjuge rien sur cette égalité, comme ferait celle de Lamé, et elle la traduit de la manière la plus simple; enfin, elle laisse disponibles pour la représentation des forces extérieures les lettres X, Y, Z, avec leur signification usuelle en Mécanique.

Classement des Mémoires; Index. — L'auteur a adopté, dans ce nouveau Volume, comme dans les précédents, l'ordre chronologique, légèrement amendé par la division en Chapitres dont

quelques-uns sont uniquement consacrés à un même auteur, Poisson, Cauchy, Lamé et Clapeyron, de Saint-Venant. Mais, dans ces Chapitres mêmes, l'ordre chronologique est scrupuleusement observé, et je ne crois pas qu'on pût en adopter un meilleur (¹). Cependant, quand, dans le Chapitre de Lamé, on trouve successivement un *Mémoire sur les vibrations lumineuses des milieux diaphanes*, le *Cours de Physique*, une Lettre *Sur les causes des explosions des chaudières dans les machines à vapeur*, un *Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides en équilibre d'élasticité*, puis une *Note sur les épaisseurs et les courbures des appareils à vapeur*, il faut bien reconnaître que ce mélange rend assez difficile de se faire une idée nette de l'ensemble des recherches de Lamé sur chacun des sujets différents qu'il a abordés, et qui ont occupé simultanément son esprit. Non que je veuille nier l'influence exercée par le progrès de ses recherches purement théoriques sur les solutions de problèmes pratiques auxquels il les appliquait; mais l'ordre chronologique des publications n'est qu'un indice bien incertain du seul ordre vraiment intéressant, celui de ses réflexions et de ses travaux. Ainsi, ce nouveau Volume est moins une histoire qu'une collection de « matériaux pour servir à cette histoire ». Tout précieux qu'il soit pour les recherches, il nous laisse quelque chose à désirer. Nous autres, nouvellement venus, qui ignorons cette histoire et sommes désireux de l'apprendre, en présence de ce gros Volume nous manquons un peu d'un fil conducteur. Si nous voulons étudier

(¹) Les inconvénients d'un ordre déterminé unique seraient bien faciles à éviter. Ce n'est pas sous forme de Livre que tous les Ouvrages de bibliographie devraient être publiés : c'est sous forme de fiches ou de plaquettes séparées, toutes de même format, contenant chacune l'analyse d'un seul Mémoire ou même d'une partie d'un Mémoire, si l'auteur a abordé des sujets différents. Au haut de la fiche ou de la première feuille de la plaquette, une ligne serait réservée à l'inscription de divers numéros d'ordre, les uns imprimés par les soins de l'éditeur, et donnant l'ordre chronologique et divers ordres méthodiques, les autres inscrits par le lecteur suivant ses recherches. L'augmentation, probablement assez faible, du prix de l'Ouvrage, serait largement compensée par l'économie de temps et de peine, pour le lecteur qui, au lieu d'avoir à refaire lui-même en fiches le travail imprimé dans les *Fortschritte* ou les *Jahrbücher*, les trouverait toutes faites, et n'aurait plus qu'à les mettre à part et les classer. Il suffit d'avoir fait une fois la bibliographie d'une question scientifique ou historique pour en être convaincu.

une de ces questions particulières qui, abordées avant la création de théories générales, n'ont pas encore cessé d'être l'objet de travaux importants, il faut recourir à l'index, très soigneusement fait par M. T.-H. Beare, et qui n'occupe pas moins de 28 pages de petit texte en double colonne. On y trouvera, sous un titre général facile à découvrir, les quarante ou cinquante paragraphes correspondants, dispersés dans tout le Volume. Ces articles se présentent isolément, sans lien, et, sauf quelques heureuses exceptions, sans que l'idée générale qui les anime soit suffisamment mise en évidence; un effort est souvent nécessaire pour la saisir, et nous sommes en moins bonne situation pour le faire que l'auteur ou l'éditeur. Nous n'avons sous les yeux que des résumés un peu secs, si bien faits qu'ils soient; l'auteur et l'éditeur ont lu attentivement les Mémoires eux-mêmes. Nous aimerions voir l'éditeur compléter son œuvre et, quand paraîtra le second Volume, nous faire profiter de l'érudition qu'il aura acquise et se dédommager du labeur un peu ingrat qu'il s'est imposé, en écrivant comme conclusion un essai sur les cinq ou six questions capitales de la théorie de l'élasticité, qui nous permette de lire ensuite et de classer facilement tous les paragraphes dispersés où sont traitées ces questions; qui les résume, et donne une idée nette de l'état actuel de la Science, de sa marche lente dans le passé, des progrès réservés à l'avenir, des grandes routes qu'elle parcourt d'un pas assuré, des sentiers encore mal explorés où sa démarche est incertaine. J'ignore, et pour cause, si le *Traité purement mathématique de la théorie des solides parfaitement élastiques,* dont le Dr Todhunter a aussi laissé un manuscrit, répond à ce programme; mais je ne le pense pas, car ce que je souhaite est tout le contraire d'un Traité didactique, où l'on expose presque sans discussion ce que, par un accord tacite, on est convenu d'appeler la théorie de l'élasticité dans les traités de ce genre. Les développements mathématiques ou les descriptions d'appareils de mesures tiennent ordinairement la plus grande place; mais la discussion des principes généraux, ou particuliers à chaque problème, celle des résultats d'expériences, sont souvent ou supprimés ou éludés. Entre ces Livres d'enseignement et les recueils historiques complets et consciencieux comme ceux de Todhunter, il me semble qu'il y aurait place pour des Livres à la fois d'enseignement et de discus-

sion, où l'on ose, sous sa responsabilité, dire ce que l'on ne comprend pas; indiquer quels principes ne sont admis que par tradition historique, sur la foi d'un maître qui lui-même les justifiait par des raisons dont la faiblesse nous choque, et que nous n'osons plus invoquer; montrer quelles simplifications dans les problèmes trop difficiles ne sont nullement d'accord avec les théories générales; risquer même des aperçus qui, confirmés ou non plus tard, ont pour principal mérite de préciser quelles questions, jadis inabordables, peuvent être désormais attaquées avec chance de succès, et par quels moyens. C'est quelque chose d'analogue à ce que vient de faire, avec toute son autorité, M. Joseph Bertrand pour la Thermodynamique; c'est ce que nous attendons de M. Karl Pearson pour cette théorie, à peine moins jeune, de l'élasticité des solides.

J'avais d'abord l'intention de joindre à ce compte rendu quelques considérations sur les débuts de la théorie de l'élasticité, et la période de formation qui correspond aux deux premiers Chapitres du Livre de Todhunter, dus principalement à M. Pearson; mais je n'ai pas tardé à me convaincre que, forcé de se limiter, M. Pearson a dû laisser systématiquement dans l'ombre tout un côté de cette histoire. C'est aux problèmes de résistance des matériaux, à la théorie de la courbe élastique qu'il s'attache exclusivement, bien que l'équilibre et les vibrations des cordes appartiennent autant à la théorie de l'Élasticité qu'à la Mécanique rationnelle. Ce n'est pas seulement de ces problèmes particuliers qu'est sortie la théorie générale de l'Élasticité, c'est, pour une part au moins égale, de l'Hydrostatique et de l'Hydrodynamique. Les progrès de ces Sciences sont intimement liés; les mêmes géomètres y contribuent, et un demi-siècle à peine sépare la constitution d'une théorie générale de l'Élasticité de l'établissement par Euler, puis par Lagrange, des équations différentielles du mouvement d'un fluide continu. Sur ce côté de la question tout était à lire à nouveau, M. Pearson n'en ayant rien dit (¹); et quant au reste la différence n'était pas grande. Pour cette si curieuse période de la Renaissance, aucune analyse, si bien faite qu'on la trouve après

(¹) On doit à M. Thurot une étude extrêmement intéressante sur l'Histoire du principe d'Archimède, publiée dans la *Revue archéologique* en 1868 et 1869.

comparaison, ne peut équivaloir à la lecture des œuvres originales; rien ne peut suppléer au commerce intime et prolongé avec ces maîtres dont les formes de raisonnement mathématique, antérieures à la diffusion de l'Analyse infinitésimale, sont si différentes des nôtres et nous paraissent si difficilement accessibles. En voilà assez pour expliquer l'ajournement de mon projet. Je pense d'ailleurs que le but que s'est proposé M. Pearson, en développant ces deux premiers Chapitres, sera atteint s'il inspire à ses lecteurs le désir de remonter aux sources, et si ceux-ci y trouvent le même plaisir que moi-même.

Cette introduction historique n'occupe d'ailleurs qu'une très petite partie de l'Ouvrage. Ce sont les recherches modernes qui y sont analysées dans le plus grand détail et permettront toujours au lecteur de trouver sans hésitation le Mémoire particulier qu'il lui importe de lire en entier et dans l'original.

J'ajouterai, pour finir, que dans tout le cours de l'Ouvrage M. Pearson a introduit l'analyse des principaux Mémoires expérimentaux sur l'élasticité des solides; enfin, on y trouve une partie des applications de cette théorie à la propagation de la lumière, surtout dans les cristaux.

Table des matières.

		Pages.
CHAP. I.	— Dix-septième et dix-huitième siècles, de Galilée à Girard, 1638-1798	1-79
CHAP. II.	— Recherches diverses depuis l'année 1800 jusqu'en 1822...	80-132
CHAP. III.	— Recherches diverses, 1820-1830. Navier, S. Germain, Savart, Pagani et autres	133-207
CHAP. IV.	— Poisson	208-318
CHAP. V.	— Cauchy	319-376
CHAP. VI.	— Recherches diverses pendant la décade 1830-1840	377-543
CHAP. VII.	— Lamé et Clapeyron. Lamé	544-626
CHAP. VIII.	— Recherches diverses pendant la décade 1840-1850, renfermant celles de Blanchet, Stokes, Wertheim et Haughton	627-832
CHAP. IX.	— Recherches de Saint-Venant, avant 1850	833-872
	Appendice. Notes A, B, C, D, E	873-896
	Index alphabétique	897-924

Résumé de la Note B, p. 881-885. Terminologie et Notations.

Shifts. — On appelle *shifts* et l'on désigne par les lettres u, v, w les trois composantes du déplacement d'un point suivant trois direc-

tions rectangulaires. Les dérivées partielles du premier ordre par rapport à ces trois coordonnées s'appellent ***shifts-fluxions.***

Strain. — On conserve à ce mot le sens adopté par Rankine de déformation purement géométrique. La ***déformation*** (***strain***) en un point est déterminée par six ***composantes de la déformation*** (***strain-components***), trois ***dilatations*** (***stretches***) et trois ***glissements*** (***slides***). Dans le cas d'une déformation élastique, on les représente par s_x, s_y, s_z, et σ_{yz}, σ_{zx}, σ_{yx}, avec les valeurs

$$s_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

dans le cas où ces dérivées sont petites. On aurait eu plus de symétrie en prenant pour glissements la moitié des valeurs ci-dessus, mais on a craint de trop s'écarter de l'usage.

On trouve, n°s 1618 et 1619, les valeurs des composantes qui conviennent lorsque ni les dérivées, ni la déformation ne sont petites, et au moyen desquelles on peut trouver les dilatations et les glissements.

Dilatation. — ***Dilatation cubique***, θ.

Spread. — ***Extension, Dilatation superficielle.***

Twists. — ***Torsions***, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy}. — $\tau_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$.

Set. — ***Déformation permanente;*** c'est la partie de la déformation qui subsiste après la suppression des ***charges*** (***load***); on en désigne les composantes par S_x, S_y, S_z, Σ_{yz}, Σ_{zx}, Σ_{xy}.

Elastic strain. — La déformation élastique se compose de deux parties, l'une qui disparaît au moment même de la suppression des charges (***elastic fore-strain***), l'autre qui ne disparaît que plus lentement (***Elastic after strain. Weber effect Elastische Nachwirkung***), élasticité résiduelle. De même on emploie les mots ***fore-set***, ***after-set***, pour distinguer la déformation permanente produite par une application instantanée des forces et celle qui apparaît par la prolongation de leur action.

Stress — *Réactions élastiques.*

Traction — *Traction, tension*, composante normale à une face.

Contraction. — *Pression, tension négative.*

Shear. — ***Effort tranchant, cisaillement,*** composante tangentielle.

Si l'on part d'un état initial où les réactions élastiques ne sont pas nulles, on désigne ces valeurs par l'indice o, $\widehat{xx}_0$, $\widehat{yz}_0$.

L'influence de la température est connue sous le nom de *thermal* ou *temperature effect;* la diminution absolue de tension produite dans un corps isotrope par 1° d'élévation de température est désignée par β; on l'appelle constante thermo-élastique.

On emploie X, Y, Z pour désigner les forces extérieures rapportées à l'unité de *masse;* ce sont donc des accélérations. On désigne sous le nom de *load* ou *charge* les forces extérieures appliquées à la surface et rapportées à l'unité d'aire, et qui sont définies par leurs trois composantes.

L'hypothèse d'après laquelle les actions élastiques sont des fonctions linéaires des déformations porte le nom de *loi de Hooke généralisée.* On désigne sous le nom de *uni-constant* et *bi-constant theories*, ou de *rari-constant* et *multi-constant theories*, suivant qu'il s'agit des corps isotropes ou anisotropes (allotropic), les deux théories moléculaires qui sont encore en présence (art. 921-932).

Les notations pour un corps isotrope sont

$$\widehat{xx} = \lambda 0 + 2\mu s_x, \qquad \widehat{yz} = \mu \sigma_{yz};$$

λ, coefficient de dilatation;
μ, coefficient de glissement ou de torsion.

Trois modules et un coefficient numérique, ont de l'importance :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \text{Module d'Young (}\textit{stretch-modulus}\text{).}$$

$$F = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad \left\{ \text{Module de dilatation cubique (}\textit{dilatation-modulus}\text{).} \right.$$

$$G = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad \left\{ \text{Module de dilatation superficielle, (}\textit{spread-modulus}\text{).} \right.$$

$$\eta = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Coefficient de Poisson (}\textit{stretch-squeeze ratio}\text{).} \\ \text{Rapport de la contraction latérale à la dilatation.} \end{array} \right.$$

Pour un corps anisotrope, on adopte la forme et les noms

de Rankine :

$$\widehat{xx} = |xxxx|\, s_x + |xxyy|\, s_y + |xxzz|\, s_z + |xxyz|\, \sigma_{yz} + |xxzx|\, \sigma_{zx} + |xxxy|\, \sigma_{xy},$$

$$\widehat{yz} = |yzxx|\, s_x + |yzyy|\, s_y + |yzzz|\, s_z + |yzyz|\, \sigma_{yz} + |yzzx|\, \sigma_{zx} + |yzxy|\, \sigma_{xy}.$$

TABLEAU DE CONCORDANCE.

	Poisson.			Cauchy (I).			Coriolis. Cauchy (II). St-Venant. Maxwell. Castigliano.			Lamé. Winckler. Minchin.			Klein.			Beer.			Kirchhoff. Riemann. Weyrauch.			Thomson (W.).			Grashof.			Clebsch.			Notation adoptée.		
	$x.$	y	$z.$	$x.$	$y.$	z	$x.$	$y.$	$z.$	$x.$	$y.$	$z.$	$x.$	$y.$	$z.$	$x.$	$y.$	$z.$	$x.$	$y.$	$z.$	$x.$	$y.$	$z.$	$x.$	$y.$	$z.$	$x.$	$y.$	$z.$	$x.$	$y.$	$z.$
x...	P_3	Q	R_3	A	F	E	p_{xx}	p_{xy}	p_{xz}	N_1	T_3	T_2	N_1	T_{xy}	T_{xz}	N_x	T_z	T_y	X_x	X_y	X_z	P	V	T	σ_x	τ_z	τ_y	t_{11}	t_{12}	t_{13}	$\widehat{xx}$	$\widehat{xy}$	$\widehat{xz}$
y...	P_2	Q	R_2	F	B	D	p_{yx}	p_{yy}	p_{yz}	T_3	N_2	T_1	T_{yx}	N_y	T_{yz}	T_z	N_y	T_x	Y_x	Y_y	Y_z	V	Q	S	τ_z	σ_y	τ_x	t_{21}	t_{22}	t_{23}	$\widehat{yx}$	$\widehat{yy}$	$\widehat{yz}$
z...	P_1	Q	R_1	E	D	C	p_{zx}	p_{zy}	p_{zz}	T_4	T_1	N_3	T_{zx}	T_{zy}	N_z	T_y	T_x	N_z	Z_x	Z_y	Z_z	T	S	R	τ_y	τ_x	σ_z	t_{31}	t_{32}	t_{33}	$\widehat{zx}$	$\widehat{zy}$	$\widehat{zz}$

MÉLANGES.

NOTE SUR LES DIFFÉRENTIELLES BINOMES;

PAR M. W. KAPTEYN.

Soient $\varphi(\theta)$ une fonction rationnelle de θ, q un nombre entier positif > 1, et

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

une équation algébrique. Je me propose d'abord la question suivante :

« Trouver le caractère de l'équation (1), afin qu'il soit possible de réduire $\int y\,dx$, par une substitution irrationnelle

$$x = \varphi(\theta)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

à l'intégrale d'une fonction rationnelle de θ. »

D'après (2), on a

$$dx = \frac{1}{q}\varphi(\theta)^{\frac{1}{q}-1}\varphi'(\theta)\,d\theta;$$

pour que $y\,dx$ soit fonction rationnelle, il faut et il suffit donc que y ait la forme

$$y = \varphi(\theta)^{-\frac{1}{q}}\psi(\theta),$$

$\psi(\theta)$ étant fonction rationnelle de θ. Évidemment on peut exprimer cette condition ainsi : il faut et il suffit que xy soit fonction rationnelle. L'élimination de θ entre les équations

$$\begin{aligned} xy &= \psi(\theta), \\ x^q &= \varphi(\theta) \end{aligned}$$

fera donc connaître toutes les équations (1) qui satisfont à la condition imposée. En posant

$$\left\{\begin{aligned} xy &= Y, \\ x^q &= X, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

cette élimination de θ, quelles que soient les fonctions rationnelles

φ et ψ, produira toujours une équation

$$F(XY) = 0$$

d'une courbe unicursale. On a donc ce théorème :

Toutes les fois que l'élimination de x et y entre (1) *et* (3), *q désignant un nombre entier positif > 1, produit l'équation*

$$F(XY) = 0$$

d'une courbe unicursale, il sera possible de réduire $\int y\,dx$ à l'intégrale d'une fonction rationnelle par la substitution (2), *et ce sont là les seuls cas où cette réduction soit possible par une telle substitution.*

Comme application de ce théorème, nous en déduirons les conditions d'intégrabilité des différentielles binômes

$$x^m(a + bx^n)^p\,dx$$

et

$$x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p\,dx,$$

en supposant que m et n soient des nombres entiers, n positif et p un nombre fractionnaire.

Soit $p = \frac{r}{s}$, r et s étant des nombres entiers premiers entre eux; il résulte de l'équation

$$y = x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p$$

ou

$$y^{sq} = x^{msq}(a + bx^n + cx^{2n})^{rq}$$

que n doit être un multiple du nombre indéterminé q pour qu'il soit possible de réduire $\int y\,dx$ au moyen d'une substitution de la forme (2). En effet, en substituant dans la dernière équation

$$x = \varphi(0)^{\frac{1}{q}},$$
$$y = \varphi(0)^{-\frac{1}{q}}\psi(0)$$

le premier membre devient une fonction rationnelle; il faut donc qu'il en soit autant du second membre ou de $a + bx^n + cx^{2n}$ ou de x^n. Il en résulte que la formule de substitution, si elle existe, doit avoir la forme

$$x = \varphi(0)^{\frac{n'}{n}},$$

en supposant

$$n = n'q.$$

En remplaçant la fonction $\varphi(\theta)^{n'}$ par la fonction rationnelle $\chi(\theta)$, on en déduit que toute substitution aura la forme

$$x = \chi(\theta)^{\frac{1}{n}}.$$

Il suffit donc de prendre $q = n$. La même chose a lieu lorsque $c = 0$.

En substituant maintenant

$$x = X^{\frac{1}{n}},$$

$$y = YX^{-\frac{1}{n}},$$

dans les équations

(I) $$y = x^m(a + bx^n)^p,$$

(II) $$y = x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p,$$

on obtient

(III) $$Y^n = X^{m+1}(a + bX)^{np},$$

(IV) $$Y^n = X^{m+1}(a + bX + cX^2)^{np}.$$

Il nous reste, pour obtenir les conditions d'intégrabilité, à déterminer dans quels cas les équations (III) et (IV) représenteront des courbes unicursales.

Commençons par déterminer le genre de la courbe

(4) $$Y^m = C\frac{(X - a_1)^{\alpha_1}(X - a_2)^{\alpha_2}\dots(X - a_i)^{\alpha_i}}{(X - b_1)^{\beta_1}(X - b_2)^{\beta_2}\dots(X - b_k)^{\beta_k}}.$$

Dans cette équation, que nous supposerons être irréductible, m, α et β représentent des nombres entiers positifs et a, b, C des constantes.

D'après Riemann, on sait que

$$g = \tfrac{1}{2}S(r - 1) - (m - 1),$$

où g désigne le genre de la courbe, r le nombre des racines de chaque système circulaire que les racines de l'équation de la courbe forment dans le voisinage des points critiques, tandis que la somme S s'étend à tous ces points.

Les seuls points critiques de la fonction algébrique, représentée par l'équation (4), sont évidemment les points a, les points b et l'infini.

Pour voir comment se comportent autour du point a_1 les n racines voisines de zéro, nous poserons

$$X = a_1 + X', \qquad Y = Y';$$

l'équation devient

$$Y^m - C'X'^{\alpha_1} - \ldots = 0,$$

C' étant une constante; les m valeurs de la fonction dans le voisinage du point a_1 formeront donc un ou plusieurs systèmes circulaires selon que α_1 et m ont pour plus grand commun diviseur l'unité ou un nombre λ_1; dans le dernier cas les m valeurs formeront λ_1 systèmes de $\frac{m}{\lambda_1}$ racines chacun. En attribuant à λ_1 aussi la valeur 1, on voit donc que, dans tous les cas, le point a_1 contribuera à la somme $S(r-1)$ pour la quantité

$$m - \lambda_1.$$

Si l'on pose

$$X = b_1 + \frac{1}{X'}, \qquad Y = \frac{1}{Y'},$$

l'équation devient

$$Y'^m - C''X'^{\beta_1} - \ldots = 0,$$

où C'' est une constante; il en résulte que, dans tous les cas, le point b_1 contribuera à la somme pour la quantité

$$m - \mu_1,$$

μ_1 étant le plus grand commun diviseur de β_1 et m.

En posant enfin

$$X = \frac{1}{X'}, \qquad Y = \frac{1}{Y'},$$

l'équation se réduit à

$$Y'^m - C'''X'^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_i-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_k} - \ldots = 0,$$

qui prouve que le plus grand commun diviseur ν de la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_k$$

et m déterminera le nombre des systèmes circulaires autour du point infini et que ce point contribuera à la somme pour la quantité

$$m - \nu.$$

Désignons les plus grands communs diviseurs des nombres $\alpha_2, \ldots, \alpha_i, \beta_2, \ldots, \beta_k$ avec m respectivement par $\lambda_2, \ldots, \lambda_i, \mu_2, \ldots, \mu_k$ et posons

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i,$$
$$\tau = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k,$$
$$\Sigma\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i,$$
$$\Sigma\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k;$$

le genre de la courbe (4) devient

$$(5) \qquad p = \frac{(i+k+1)m - \Sigma\lambda - \Sigma\mu - \nu}{2} - (m-1).$$

Remarquons que, α_1 étant divisible par m, le point a_1 est un point ordinaire; dans ce cas, il faut donc substituer $\lambda_1 = m$. De même, dans le cas où $\sigma = \tau$, l'infini est un point ordinaire et il faut substituer $\nu = m$.

En écrivant

$$Y^m = C(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots \times (x-a_i)^{\alpha_i}(x-b_1)^{-\beta_1}(x-b_2)^{-\beta_2}\ldots(x-b_k)^{-\beta_k}$$

au lieu de (4), la formule (5) montre que le genre dépend uniquement du nombre m, du nombre des facteurs linéaires du second membre, des plus grands communs diviseurs des exposants avec m et du plus grand commun diviseur de la somme algébrique des exposants avec m. C'est pourquoi il est plus simple de substituer à l'équation (4) celle-ci

$$(6) \qquad Y^m = C(x-e_1)^{\varepsilon_1}(x-e_2)^{\varepsilon_2}\ldots(x-e_k)^{\varepsilon_k},$$

où maintenant les exposants ε désignent des nombres entiers positifs ou négatifs. Avec cette notation on aura

$$(7) \qquad p = \frac{(k+1)m - \Sigma\lambda - \nu}{2} - (m-1),$$

où $\Sigma\lambda$ désigne la somme des plus grands communs diviseurs de tous les exposants avec m et ν le plus grand commun diviseur de la somme algébrique des exposants avec m.

En considérant maintenant les équations (III) et (IV), il est nécessaire de distinguer deux cas A où np est un nombre fractionnaire et B où np est un nombre entier.

A. Soit $np = \frac{r}{s}$ une fraction irréductible, l'équation (III) devient

$$Y^{ns} = X^{(m+1)s}(a + bX)^r;$$

mettons en évidence les facteurs communs des trois nombres n, $m+1$ et r, en posant

$$n = n't, \qquad m+1 = (m'+1)t, \qquad r = r't; \tag{8}$$

l'équation prendra la forme

$$Y^{n's} = X^{(m'+1)s}(a + bX)^{r'} \tag{9}$$

et sera irréductible. En appliquant à cette équation la formule (7) et introduisant la notation $D\left(\frac{p}{q}\right)$ pour désigner le plus grand commun diviseur des nombres p et q, on voit aisément que le genre de la courbe (9) est zéro, ou que cette courbe est unicursale lorsque

$$3n's - D\left[\frac{(m'+1)s}{n's}\right] - D\left(\frac{r'}{n's}\right) - D\left[\frac{(m'+1)s + r'}{n's}\right] = 2(n's - 1)$$

ou

$$D\left[\frac{(m'+1)s}{n's}\right] + D\left(\frac{r'}{n's}\right) + D\left[\frac{(m'+1)s + r'}{n's}\right] = n's + 2. \tag{10}$$

Le seul moyen de satisfaire à cette équation, comme nous le démontrerons bientôt, est de prendre

$$D\left[\frac{(m'+1)s}{n's}\right] = n's, \qquad D\left(\frac{r'}{n's}\right) = 1, \qquad D\left[\frac{(m'+1)s + r'}{n's}\right] = 1. \tag{11}$$

La deuxième et la troisième de ces équations sont une conséquence de la première. En effet, la première apprend que $m'+1$ est divisible par n'; on en déduit que r' n'a plus de diviseur commun avec n', les trois nombres n', $m'+1$ et r' n'ayant pas de facteurs communs; la seconde équation est donc satisfaite. En remarquant que $(m'+1)s$ est un multiple de $n's$, on a aussi

$$D\left[\frac{(m'+1)s + r'}{n's}\right] = D\left(\frac{r'}{n's}\right) = 1.$$

La seule condition d'intégrabilité de $x^m(a + bx^n)^p\,dx$, np

étant un nombre fractionnaire, s'exprime donc de cette manière :

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{D}\left(\frac{m'+1}{n'}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{m+1}{n}\right) = n$$

ou

$$\frac{m+1}{n} = \text{un nombre entier.}$$

B. Soit, en second lieu, np un nombre entier. En désignant ce nombre par r, on répétera le raisonnement qui précède, en adoptant

$$s = 1,$$

et l'on obtiendra, au lieu de l'équation (10), celle-ci :

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{D}\left(\frac{m'+1}{n'}\right) + \mathrm{D}\left(\frac{r'}{n'}\right) + \mathrm{D}\left(\frac{m'+1+r'}{n'}\right) = n'+2.$$

La solution complète de cette équation consiste, comme nous le verrons, en ces deux systèmes

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} \mathrm{D}\left(\frac{m'+1}{n'}\right) = n, & \mathrm{D}\left(\frac{r'}{n'}\right) = 1, & \mathrm{D}\left(\frac{m'+1+r'}{n'}\right) = 1, \\ \mathrm{D}\left(\frac{m'+1}{n'}\right) = 1, & \mathrm{D}\left(\frac{r'}{n'}\right) = 1, & \mathrm{D}\left(\frac{m'+1+r'}{n'}\right) = n'. \end{cases}$$

Le premier système conduit à la même condition d'intégrabilité (12) que nous avons déjà trouvée. Considérons donc le second système.

La dernière des trois équations de ce système est suffisante. En effet, en posant

$$m'+1 = px, \qquad r' = qy, \qquad m'+1+r' = n'z,$$

où x, y, z désignent des nombres entiers et p, q les plus grands communs diviseurs de $m'+1$ et r' avec n', qui évidemment doivent être premiers entre eux, la dernière des équations peut s'écrire

$$px + qy = n'z.$$

Soit $\frac{p'}{q'}$ l'avant-dernière réduite de la fraction $\pm\frac{p}{q}$; on sait que

$$x = \pm q'n'z + \theta q,$$
$$y = \mp p'n'z + \theta p,$$

θ étant un nombre entier. On voit donc que x est divisible par q

et y par p; donc les trois nombres $m'+1$, r' et n' seront divisibles par pq. Il s'ensuit que $p=q=1$, parce que $m'+1$, r' et n' n'ont d'autre commun diviseur que l'unité. Les deux premières équations du dernier système (14) sont donc une conséquence de la dernière. La seule condition d'intégrabilité de $x^m(a+bx)^n\,dx$, np étant un nombre entier, et différente de la condition (12), est par conséquent

$$\text{(15)}\qquad \mathrm{D}\left(\frac{m'+1+r'}{n'}\right)=\mathrm{D}\left(\frac{m+1+np}{n}\right)=n,$$

ou

$$\frac{m+1+np}{n}=\text{un nombre entier.}$$

Considérons maintenant l'équation (IV) et distinguons aussi les deux cas A où $np=\frac{r}{s}$ est une fraction irréductible, B, où $np=r$ est un nombre entier.

A. En introduisant les valeurs n', m', r' au lieu de n, m, r d'après les équations (8), on obtient

$$\text{(16)}\qquad \mathrm{Y}^{n's}=\mathrm{X}^{(m'+1)s}(a+b\mathrm{X}+c\mathrm{X}^2)^{r'},$$

équation irréductible. Il résulte de la formule (7) que cette courbe est unicursale, si l'on a

$$\text{(17)}\quad \mathrm{D}\left[\frac{(m'+1)s}{n's}\right]+2\mathrm{D}\left(\frac{r'}{n's}\right)+\mathrm{D}\left[\frac{(m'+1)s+2r'}{n's}\right]=2n's+2.$$

De cette équation on déduira la seule solution

$$\text{(18)}\quad \mathrm{D}\left[\frac{(m'+1)s'}{n's}\right]=n's,\qquad \mathrm{D}\left(\frac{r'}{n's}\right)=1,\qquad \mathrm{D}\left[\frac{(m'+1)s+2r'}{n's}\right]=n's.$$

qu'on pourra transformer en

$$\mathrm{D}\left(\frac{m'+1}{n'}\right)=n',\qquad \mathrm{D}\left(\frac{r'}{n's}\right)=1,\qquad \mathrm{D}\left(\frac{2r'}{n's}\right)=n's.$$

Il résulte des deux dernières équations que le nombre 2 doit être divisible par $n's$: donc il faut que $n'=1$ et $s=2$, parce que s ne saurait être 1; de la première se déduit que $m+1$ doit être divisible par n.

Les conditions d'intégrabilité de $x^m(a+bx^n+cx^{2n})\,dx$, np

étant un nombre fractionnaire, sont donc

$$(19) \qquad D\left(\frac{m+1}{n}\right) = n, \qquad \text{et} \qquad 2p = \text{un nombre entier.}$$

B. Supposons, en second lieu, $np = r$ un nombre entier. La discussion de ce cas se déduit immédiatement de la précédente en substituant $s = 1$. Avec cette supposition l'équation (17) devient

$$(20) \qquad D\left(\frac{m'+1}{n'}\right) + 2D\left(\frac{r'}{n'}\right) + D\left(\frac{m'+1+2r'}{n'}\right) = 2n' + 2,$$

à laquelle on ne saura satisfaire qu'en prenant

$$(21) \quad D\left(\frac{m'+1}{n'}\right) = n', \qquad D\left(\frac{r'}{n'}\right) = 1, \qquad D\left(\frac{m'+1+2r'}{n'}\right) = n'.$$

En réduisant la dernière équation à l'aide de la première, on obtient

$$D\left(\frac{2r'}{n'}\right) = n'.$$

De celle-ci et de la seconde équation il résulte comme précédemment que 2 doit être divisible par n', c'est-à-dire que l'on aura

$$n' = 1 \qquad \text{ou} \qquad n' = 2.$$

Le premier de ces cas exige que $t = n$ et par conséquent que $r'n = np$; dans ce cas, p serait un nombre entier, ce qui est contraire à notre supposition. Le second exige que $2p$ soit un nombre entier; en combinaison avec la première des équations (21), on retombe donc sur les mêmes conditions d'intégrabilité (19) qu'auparavant.

Occupons-nous maintenant de la solution des équations (10), (13), (17) et (20).

Soit

$$(21) \qquad D\left(\frac{a}{m}\right) + D\left(\frac{b}{m}\right) + D\left(\frac{a+b}{m}\right) = m + 2,$$

où a, b et m sont des nombres entiers qui n'ont d'autre facteur commun que l'unité, tandis que

$$D\left(\frac{b}{m}\right) < m;$$

je me propose d'abord de trouver la solution complète de cette équation.

Pour y parvenir, voyons s'il est possible de satisfaire à cette équation en prenant deux des termes du premier membre égaux.

1° L'hypothèse $D\left(\frac{b}{m}\right) = D\left(\frac{a+b}{m}\right) > 1$ est contraire à la première supposition que a, b et m n'ont d'autre facteur commun que l'unité, tandis que l'hypothèse

$$D\left(\frac{a}{m}\right) = D\left(\frac{a+b}{m}\right) = 1$$

est contraire à la seconde supposition

$$D\left(\frac{b}{m}\right) < m.$$

2° L'hypothèse $D\left(\frac{b}{m}\right) = D\left(\frac{a+b}{m}\right) > 1$ est contraire à la première supposition, mais

$$D\left(\frac{b}{m}\right) = D\left(\frac{a+b}{m}\right) = 1$$

conduit à la solution

$$(22) \qquad D\left(\frac{a}{m}\right) = m, \qquad D\left(\frac{b}{m}\right) = 1, \qquad D\left(\frac{a+b}{m}\right) = 1$$

3° L'hypothèse $D\left(\frac{a}{m}\right) = D\left(\frac{b}{m}\right) > 1$ est contraire à la première supposition, mais

$$D\left(\frac{a}{m}\right) = D\left(\frac{b}{m}\right) = 1$$

conduit à la solution

$$(23) \qquad D\left(\frac{a}{m}\right) = 1, \qquad D\left(\frac{b}{m}\right) = 1, \qquad D\left(\frac{a+b}{m}\right) = m.$$

Supposons maintenant les trois termes différents et tous plus petits que m. Dans ce cas, les trois termes seront contenus dans la série

$$\frac{m}{2}, \quad \frac{m}{3}, \quad \frac{m}{4}, \quad \frac{m}{5}, \quad \ldots$$

En prenant trois termes différents de cette série, la somme ne

saura être $m+2$ que dans les deux cas suivants :

$$\frac{m}{2}+\frac{m}{3}+\frac{m}{4}=m+2,$$
$$\frac{m}{2}+\frac{m}{3}+\frac{m}{5}=m+2.$$

Dans ces cas on aurait

$$12+8+6=24+2,$$
$$30+20+12=60+2.$$

Les termes du premier membre de ces équations ayant le facteur commun 2 ne sauraient satisfaire à l'équation proposée, parce que $\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right)$ et $\mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right)$ doivent être premiers entre eux. Il résulte de ce raisonnement que les équations (22) et (23) forment ensemble la solution complète de l'équation (21).

L'application de ce résultat sur les équations (10) et (13) est évidente. Pour l'équation (10), on n'aura qu'à substituer dans (22) et (23)

$$a=(m'+1)s, \qquad b=r', \qquad m=n's;$$

or, le nombre a ayant un facteur $s>1$, commun avec m, $\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right)$ ne saura être 1; donc (22) donnera la solution complète, comme nous l'avons adoptée (11).

Pour l'équation (13), on n'aura qu'à substituer dans (22) et (23)

$$a=m'+1, \qquad b=r', \qquad m=n',$$

et l'on obtiendra la solution complète (14). Une discussion analogue nous apprendra la solution complète de l'équation

$$\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right)+2\,\mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right)+\mathrm{D}\left(\frac{a+2b}{m}\right)=2m+2, \tag{24}$$

de laquelle nous pouvons déduire celle des équations (17) et (20).

Comme auparavant, nous adopterons que a, b et m n'ont d'autre facteur commun que l'unité et que $\mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right)<m$.

En supposant d'abord tous les termes du premier membre de (24) plus petits que m, on aura, pour toute valeur de m,

$$\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right)\leqq\frac{m}{2}, \qquad \mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right)\leqq\frac{m}{2}, \qquad \mathrm{D}\left(\frac{a+2b}{m}\right)\leqq\frac{m}{2}.$$

Dans cette hypothèse, il sera donc impossible de satisfaire à l'équation (24). Il nous reste les trois hypothèses suivantes :

1° $$\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right) = m, \qquad \mathrm{D}\left(\frac{a+2b}{m}\right) < m.$$

La supposition que a, b et m n'ont d'autre facteur commun que l'unité nous apprend que b et m doivent être premiers entre eux. On a donc

$$\mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right) = 1$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{D}\left(\frac{a+2b}{m}\right) = m,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° $$\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right) < m, \qquad \mathrm{D}\left(\frac{a+2b}{m}\right) = m.$$

Dans ce cas on aura

$$\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right) + 2\,\mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right) = m + 2.$$

Choisissant pour $\mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right)$ successivement les termes de la série

$$\frac{m}{2}, \quad \frac{m}{3}, \quad \frac{m}{4}, \quad \frac{m}{5}, \quad \ldots,$$

les valeurs correspondantes de $\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right)$ seront donc

$$2, \quad \frac{m}{3} + 2, \quad \frac{m}{2} + 2, \quad \frac{3m}{5} + 2, \quad \ldots,$$

dont seulement les deux premières sont admissibles, parce que $\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right) \leq \frac{m}{2}$.

Le cas $\mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right) = \frac{m}{2}$ conduit à $\mathrm{D}\left(\frac{a}{m}\right) = m$, ce qui est contraire à notre supposition.

La valeur $\mathrm{D}\left(\frac{b}{m}\right) = \frac{m}{3}$ est aussi impossible, parce que dans ce cas le nombre m serait divisible par $\frac{m}{3} + 2$, c'est-à-dire que le nombre m aurait la valeur 3 ou la valeur 12.

La première de ces valeurs conduit à $D\left(\frac{a}{m}\right) = m$, ce qui est contraire à l'hypothèse; la seconde conduit à $D\left(\frac{a}{m}\right) = 4$ et $D\left(\frac{b}{m}\right) = 6$, ce qui est absurde, parce que $D\left(\frac{a}{m}\right)$ et $D\left(\frac{b}{m}\right)$ doivent être premiers entre eux.

3° $$D\left(\frac{a}{m}\right) = m. \qquad D\left(\frac{a-2b}{m}\right) = m.$$

Il résulte de cette hypothèse que $2b$ doit être divisible par m, tandis que b doit être premier avec m. Il faut donc que 2 soit divisible par m, c'est-à-dire $m = 1$ ou $m = 2$. Le premier de ces cas conduirait à $D\left(\frac{b}{m}\right) = m$, ce qui est contraire à la supposition; ainsi, $m = 2$ est le seul cas qui reste.

Par conséquent, l'équation (24) n'aura pas de solution à moins que $m = 2$, et, dans ce cas, on aura

(25) $$D\left(\frac{a}{m}\right) = m, \qquad D\left(\frac{b}{m}\right) = 1. \qquad D\left(\frac{a+2b}{m}\right) = 1.$$

L'application de ce résultat aux équations (17) et (20) est trop évidente pour s'y arrêter davantage.

Ajoutons encore, avant de quitter ce sujet, que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux intégrales considérées soient exprimables algébriquement sont pour $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$

$$\frac{m+1}{n} = 1 + r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

et

$$\frac{m+1}{n} + p = -1 - r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

et pour $\int x^m(a+bx^n+cx^{2n})^p\,dx$

$$p = -\frac{2k+1}{2} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et

$$\frac{m+1}{n} = k_1 \qquad (k_1 = 1, 2, \ldots, 2k).$$

Nous avons obtenu ces résultats ailleurs (1).

(1) Voir *Verslagen Akad. Amsterdam*, 2e Reeks, t. XVII.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ŒUVRES DE FOURIER, publiées par les soins de Gaston Darboux, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Tome I. THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888; in-4°, XXVIII-563 pages.

L'édition des Œuvres de Fourier, dont nous publions aujourd'hui le premier Volume, était réclamée depuis longtemps par les physiciens et les géomètres; entreprise avec l'appui bienveillant du Ministère de l'Instruction publique, elle prendra place dans la collection des Documents inédits à côté des Œuvres de Laplace, de Lagrange, de Lavoisier, de Fresnel et de Cauchy. Par l'importance de ses découvertes, par l'influence décisive qu'il a exercée sur le développement de la Physique mathématique, Fourier méritait l'hommage qui est rendu aujourd'hui à ses travaux et à sa mémoire. Son nom figurera dignement à côté des noms, illustres entre tous, dont la liste, destinée à s'accroître avec les années, constitue dès à présent un véritable titre d'honneur pour notre pays.

La *Théorie analytique de la Chaleur*, qui forme à elle seule ce premier Volume, a paru en 1822. Ce bel Ouvrage, que l'on peut placer sans injustice à côté des écrits scientifiques les plus parfaits de tous les temps, se recommande par une exposition intéressante et originale des principes fondamentaux; il éclaire de la lumière la plus vive et la plus pénétrante toutes les idées essentielles que nous devons à Fourier et sur lesquelles doit reposer désormais la Philosophie naturelle; mais il contient, nous devons le reconnaître, beaucoup de négligences, des erreurs de calcul et de détail que Fourier a su éviter dans d'autres écrits. Guidé par les conseils de notre éminent éditeur, M. Gauthier-Villars, nous nous sommes appliqué à faire disparaître les incorrections typographiques. Nous avons refait les calculs, corrigé avec le plus grand soin les renvois inexacts, les erreurs de notation et d'impression, mais en nous attachant toujours à respecter la forme si élégante et si pure que Fourier donne habituellement à sa pensée. Un membre distingué de l'Enseignement supérieur, M. Paul

Morin, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, nous a beaucoup aidé dans cette partie essentielle de notre tâche : nous nous plaisons à lui adresser ici nos plus vifs remerciements. M. Morin veut bien nous continuer son concours pour le second Volume, dont l'impression est déjà commencée.

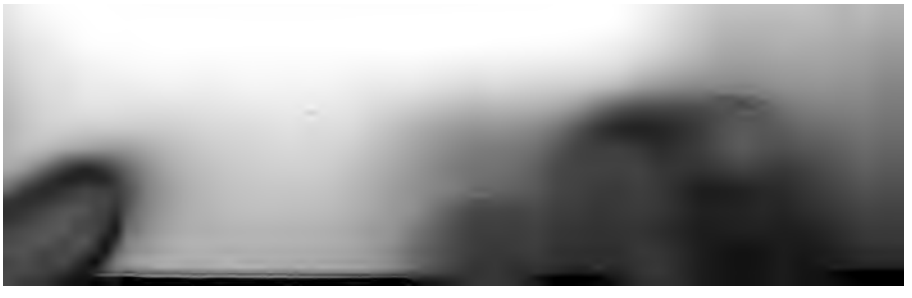
Les recherches de Fourier relatives à la théorie de la chaleur remontent à la fin du XVIIIe siècle; elles ont été communiquées à l'Académie des Sciences le 21 décembre 180[7]. Cette première publication ne nous est pas parvenue; on ne la connaît que par un extrait de quatre pages inséré en 1808 au *Bulletin de la Société philomathique;* elle a été lue et déposée, mais a, sans doute, été retirée par Fourier dans le courant de l'année 1810.

L'Académie ayant mis au concours, pour 1811, la question suivante :

« Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur et comparer le résultat de cette théorie à des expériences exactes »,

Fourier envoya, le 28 septembre 1811, un travail très étendu, formé, d'après ses propres déclarations, du Mémoire primitivement soumis à l'Académie et des notes qu'il y avait successivement ajoutées. Ce nouveau travail fut couronné dans la séance publique du 6 janvier 1812. Les juges du concours étaient Lagrange, Laplace, Malus, Haüy et Legendre. Leur Rapport nous a été conservé. Toutes les appréciations, sauf une peut-être, y sont d'une rigoureuse exactitude; et, cependant, il est permis de penser que, dans son ensemble, il ne rend pas pleine justice aux efforts et aux découvertes de Fourier.

« Cette pièce, dit le Rapporteur en parlant du Mémoire de Fourier, renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet Ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur. »



Le manuscrit de Fourier fait partie, aujourd'hui encore, des Archives de l'Académie. Le grand géomètre, devenu Secrétaire perpétuel après la mort de Delambre, l'a fait imprimer, sans y apporter aucun changement, dans les Volumes de *Mémoires* pour 1819-1820 et 1821-1822, deux ans après la publication de la *Théorie de la Chaleur*. Fourier désirait, sans doute, établir ainsi d'une manière incontestable ses droits de priorité; car la première Partie du Mémoire de 1811, celle qui a paru dans le Volume pour 1819-1820, ne diffère qu'en des points tout à fait secondaires de la rédaction définitive à laquelle il s'est arrêté dans la *Théorie de la Chaleur*. Nous avons donc renoncé à reproduire cette première Partie; mais la seconde, qui a été imprimée en 1826, dans le Volume des *Mémoires* pour 1821-1822, offre le plus vif intérêt; elle commencera notre second Volume et sera, croyons-nous, bien accueillie de tous.

Il y a aujourd'hui quatre-vingts ans que Fourier fit à l'Académie des Sciences sa première Communication sur les études qui ont occupé toute sa vie. Les méthodes dont l'illustre savant a enrichi la Science trouvent maintenant devant elles un champ vaste et presque inexploré d'applications nouvelles dans la théorie moderne de l'électricité. Puisse notre édition les répandre encore, puisse-t-elle maintenir et accroître dans notre pays et parmi nos jeunes géomètres le goût de la Physique mathématique. « L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue, elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels. » C'est par ces réflexions, empruntées à l'admirable *Discours préliminaire* de la *Théorie de la Chaleur*, que nous terminerons ces quelques lignes, dans lesquelles nous nous proposions surtout de remercier tous ceux qui ont pris part à notre publication ou qui l'ont rendue possible.

G. D.

J.-B. FLAMME. — RECHERCHE DES EXPRESSIONS APPROCHÉES DES TERMES TRÈS ÉLOIGNÉS DANS LES DÉVELOPPEMENTS DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES PLANÈTES.

Dans ce Mémoire, présenté comme thèse à la Faculté des Sciences de Paris pour le doctorat ès sciences mathématiques, M. Flamme se propose de trouver les premiers termes du développement, suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, du coefficient de rang n dans les séries, ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de l'une quelconque des trois anomalies, qui représentent l'une ou l'autre des deux fonctions

$$(1)\qquad \begin{cases} r^k \cos(lf + m\varepsilon + p\zeta), \\ r^k \sin(lf + m\varepsilon + p\zeta), \end{cases}$$

dans lesquelles r désigne le rayon vecteur, f, ε, ζ les anomalies vraies excentrique et moyenne, et k, l, m, p quatre paramètres arbitraires. Ce problème général renferme celui de la recherche des expressions approchées des diverses fonctions que l'on est conduit à considérer lorsqu'on développe la fonction perturbatrice, puisque ces fonctions rentrent dans l'une ou l'autre des deux fonctions (1), quand on y donne à k, l, m, p des valeurs particulières convenables.

Le premier Chapitre du Mémoire est consacré à l'exposition de la méthode qui doit être employée dans la suite. L'auteur s'appuie sur la remarque fondamentale, grâce à laquelle M. Darboux évalue l'ordre de grandeur du coefficient du terme de rang n, dans le développement d'une fonction $f(x)$ suivant les sinus et cosinus des multiples de la variable réelle x (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. IV, 1878). M. Flamme parvient ainsi tout d'abord aux conclusions suivantes :

Étant donnée une fonction $f(z)$ développable, entre deux circonférences C et C′ concentriques à l'origine, en une double série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de z, si cette fonction n'admet, sur chacune des deux circonférences limites, que des points singuliers algébriques, on pourra trouver, avec une approximation marquée par une puissance quelconque

de $\frac{1}{n}$ donnée d'avance, l'expression, soit du coefficient α_n de z^n, soit du coefficient α_{-n} de z^{-n}, dans la double série qui représente $f(z)$ entre les deux circonférences.

Il résulte de là que, si l'on veut obtenir la valeur approchée de l'une quelconque des deux fonctions α_n ou α_{-n} du grand nombre positif n, cette approximation sera possible si l'on peut trouver une fonction génératrice de α_n ou de α_{-n} satisfaisant aux conditions qui viennent d'être imposées à $f(z)$.

Ce premier résultat n'est, au fond, qu'une généralisation directe de la théorie de M. Darboux. Considérant ensuite l'expression bien connue

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} f(z)z^{n-1}\,dz$$

du coefficient α_{-n} de z^{-n} dans la double série qui représente $f(z)$, et interprétant convenablement les conditions dans lesquelles l'approximation de ce coefficient est possible, M. Flamme arrive, par une nouvelle généralisation, à une méthode d'approximation applicable à l'intégrale

$$M_n = \int_a^b f(z)z^n\,dz.$$

Supposons que l'on déforme le contour $a - b$ de l'intégrale M_n, de manière à le remplacer par un autre, équivalent au premier, et sur lequel le module maximum de z soit le plus petit possible; la méthode d'approximation s'appliquera si le point α, où a lieu ce maximum, ne se confond pas avec l'une des deux limites a ou b de l'intégrale, et si, de plus, α est un point singulier algébrique de $f(z)$, ou même, plus généralement, si le point α est tel que, dans son domaine, la fonction $f(z)$ soit développable en une série de la nature de celles pour lesquelles les dérivations successives peuvent s'effectuer terme à terme, d'après les théorèmes établis par M. Darboux dans son Mémoire sur les fonctions discontinues. M. Flamme indique une règle pratique très simple pour la formation des termes de la fonction génératrice de M_n dont le développement doit fournir l'expression approchée de cette intégrale.

L'auteur du Mémoire considère ensuite la fonction du grand

nombre n représentée par l'intégrale

$$I_n = \int_a^b f(z)\,\varphi^n(z)\,dz,$$

évidemment plus générale que M_n. Il remarque que, si l'on pose $\varphi(z) = u$, on obtient

$$I_n = \int_{u_1}^{u_2} F(u)\,u^n\,du$$

avec

$$F(u) = \frac{f(z)}{\varphi'(z)};$$

I_n étant ainsi ramené à la même forme que M_n, on voit immédiatement, d'après la règle énoncée plus haut, dans quelles conditions la recherche de l'expression approchée de I_n sera possible. D'autre part, comme il ne serait pas commode, dans la pratique, de considérer directement le quotient

$$\frac{f(z)}{\varphi'(z)}$$

comme fonction de u, M. Flamme expose sommairement un moyen d'arriver plus aisément au résultat.

Le premier Chapitre se termine par le calcul des premiers termes du développement de $\Gamma(n+\alpha)$ suivant les puissances de $\frac{1}{n}$.

Dans les Chapitres II et III, l'auteur applique la théorie précédente à la résolution du problème énoncé au début de cette Note; dans un cas exceptionnel, où cette théorie ne réussit plus, M. Flamme arrive aisément, par d'autres considérations, au résultat désiré.

Le Chapitre IV est destiné à fournir une vérification des formules obtenues précédemment. Cette vérification est obtenue en suivant une méthode complètement étrangère à celle du Chapitre I.

Nous n'insistons pas sur ces trois Chapitres, qui intéressent plus particulièrement l'Astronomie, et nous passons immédiatement au cinquième et dernier Chapitre. On sait que les fonctions de Bessel, représentées d'ordinaire par $J_n(x)$, sont définies par l'équa-

tion

$$(2) \qquad e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, z^n.$$

Si l'on se borne à cette définition, n est nécessairement entier, et l'on est arrivé, par un calcul assez long, à l'équation intéressante qui suit

$$(3) \qquad \pi J_n(x) = \frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\, d\varphi.$$

On sait, d'autre part, que les fonctions $J_n(x)$, définies par (2), satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2-n^2}{x^2}y = 0.$$

M. Flamme considère les deux intégrales de cette équation comme étant des généralisations des fonctions de Bessel pour des valeurs quelconques de n. Il parvient à mettre rapidement la première de ces intégrales sous la forme

$$(4) \qquad y_1 = \frac{2^{n-1}x^n\,\Gamma(n)\,\Gamma(n+1)}{\pi\,\Gamma(2n)} \int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\, d\varphi,$$

d'où l'on déduit pour n entier, par comparaison avec la formule (3), $y_1 = J_n(x)$. Quant à la seconde intégrale, elle prend bien encore, pour n entier, la forme (4), mais, pour les valeurs non entières de n, on est amené à y introduire, à la place de $\cos(x\cos\varphi)$, une fonction de la forme

$$(5) \qquad \frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\left[1 - \frac{t^2}{(u+1)(u+2)} + \frac{t^4}{(u+1)(u+2)(u+3)(u+4)} - \cdots\right],$$

où l'on a posé $t = x\cos\varphi$. Cette fonction (5) se réduit, pour $u=0$, à $\cos t = \cos(x\cos\varphi)$. Elle est de plus une fonction continue de u. M. Flamme la représente par $\cos_u t$. Par analogie, il pose de même

$$(6) \qquad \sin_u t = \frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\left[\frac{t}{u+1} - \frac{t^3}{(u+1)(u+2)(u+3)} + \cdots\right],$$

$$(7) \qquad e_u^t = \frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\left[1 + \frac{t}{u+1} + \frac{t^2}{(u+1)(u+2)} + \cdots\right],$$

qui sont aussi fonctions continues de u, et se confondent, pour $u = 0$, la première avec $\sin t$, la deuxième avec e^t. On remarque immédiatement que les fonctions (5) et (6) n'en forment en réalité qu'une seule, que l'on peut considérer comme représentée par l'expression (5). Cette fonction (5) donne alors $\cos t$ pour $u = 0$ et $\sin t$ pour $u = 1$; pour les autres valeurs entières de u, elle fournit de même d'autres fonctions intéressantes de t, $\sin t$ et $\cos t$, et permet, par des variations continues de u, de passer d'une manière continue de l'une quelconque de ces fonctions à toutes les autres.

L'auteur met ensuite ces trois fonctions (5), (6) et (7) sous forme d'intégrales définies. La considération de la fonction (7) l'amène ainsi à établir entre la fonction e^t_u, sa valeur particulière e^t, l'intégrale

$$\int_0^t e^{-x} x^{u-1}\, dx,$$

et la valeur de cette intégrale pour $t = \infty$, valeur représentée ordinairement par $\Gamma(u)$, la relation très simple

$$\frac{e^t_u}{e^t} = \frac{\int_0^t e^{-x} x^{u-1}\, dx}{\Gamma(u)},$$

qui fournit, pour $t = 1$, une formule intéressante due à M. Bourguet. M. Flamme fait encore, au sujet de ces fonctions, diverses remarques sur lesquelles le cadre de cette Note ne nous permet pas de nous étendre davantage.

F. [illegible] — [illegible] Ire Partie : *Cal-* [illegible] de 356 pages. Porto : typographia occidental. [illegible]

M. F. [illegible], professeur distingué de l'École polytechnique de [illegible] de publier son *Cours d'Analyse* [illegible] vient de paraître : il traite du [illegible]

M. Teixeira a adopté, selon nous, une division des matières des plus rationnelles. Il a su, en outre, dans le cadre de son Ouvrage purement didactique, tenir compte, en ce qu'ils ont d'essentiel, des plus récents progrès de la Science.

Dans une Introduction divisée en deux Chapitres, l'auteur expose d'abord, d'une manière abrégée, mais suffisamment complète et parfaitement rigoureuse, la théorie des imaginaires, celle des séries et des produits infinis, celle des fractions continues, les principes généraux de la théorie des fonctions avec leur application aux fonctions algébriques, exponentielles et circulaires.

Après avoir établi ces solides assises, l'auteur aborde son sujet principal.

Le Chapitre I est consacré à l'exposé des notions préliminaires : limite, continuité, infiniment petit, dérivée, que l'auteur précise comme il convient, et à celui de la méthode des limites et de la méthode infinitésimale.

Dans le Chapitre II est développée avec tous les détails nécessaires la théorie des dérivées du premier ordre, dont l'auteur fait immédiatement, dans le Chapitre III, des applications géométriques aux courbes planes et gauches, ainsi qu'aux surfaces.

Vient ensuite la théorie des dérivées et différentielles d'ordre quelconque, qui constitue le Chapitre IV, et que M. Teixeira a traitée avec un soin tout particulier, car nous y relevons nombre de formules et de démonstrations nouvelles, notamment en ce qui concerne la dérivée d'ordre quelconque d'une fonction de fonctions. Des formules générales qu'il a établies, M. Teixeira déduit un grand nombre de formules qu'on obtient ordinairement par des voies différentes, et qu'il rattache ainsi les unes aux autres. Nous remarquons aussi à la fin de ce Chapitre (§ 86) une remarquable formule, due à M. Teixeira lui-même, et qui contient, comme cas particulier, la formule de Taylor.

Dans le Chapitre V sont traitées les applications analytiques, et, dans le Chapitre VI, les applications géométriques de la formule de Taylor. Parmi les résultats les plus originaux obtenus dans cette partie de l'Ouvrage, nous citerons une élégante démonstration du théorème d'Eisenstein, qui généralise même ce théorème, une formule nouvelle d'interpolation et une remarquable généralisation de la formule de Lagrange.

Le Chapitre VII contient l'exposé des propriétés principales des fonctions définies par des séries et la recherche de leurs singularités.

Enfin, le Chapitre VIII est réservé à la théorie des fonctions de variables imaginaires que M. Teixeira, dans ce cadre élémentaire, a le mérite d'exposer suivant les idées récemment introduites dans la Science par M. Weierstrass et développées par son disciple éminent M. Mittag-Leffler.

En somme, sous son mince volume, l'Ouvrage de M. Teixeira met à la disposition du lecteur les principes qui lui permettront d'aborder l'étude des grandes théories nouvelles de l'Analyse. Il constitue une préparation excellente à la lecture des Mémoires originaux des maîtres modernes de la Science. M. O.

MÉLANGES.

SUR LA CONVERGENCE DES INTÉGRALES A LIMITES INFINIES;

PAR M. PH. GILBERT.

1. On sait depuis toujours que l'intégrale définie

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{1}$$

peut avoir une valeur déterminée et finie si la fonction $f(x)$, restant de même signe, tend vers zéro pour des valeurs indéfiniment croissantes de x, et même sans que $f(x)$ tende vers zéro, si cette fonction change indéfiniment de signe. Les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \cos x^2\,dx$$

sont des exemples de ces deux cas. On voit facilement que l'intégrale (1) peut être finie, sans que $f(x)$ tende vers zéro ou chan[illegible]

de signe (1); mais M. Bierens de Haan, dans ses Tables, ne donne aucune intégrale qui soit dans ce cas. M. Thomæ a signalé un premier exemple d'une fonction $f(x)$ qui satisfait à ces conditions, et qui finit même par acquérir des valeurs aussi grandes qu'on le veut (2). Mais la fonction de M. Thomæ n'est définie que géométriquement et paraît trop *fabriquée* en vue du but à atteindre. M. P. du Bois-Reymond a indiqué un exemple bien plus naturel dans l'intégrale

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha^6 \sin^2 \alpha}\, dx,$$

qui a une valeur déterminée, et il a montré (3) qu'il existe une fonction beaucoup plus générale jouissant des mêmes propriétés relativement à l'intégrale (1).

M'étant occupé du sujet sans connaître le travail du savant allemand, j'ai obtenu quelques résultats qui me paraissent, ainsi que la méthode fort simple qui y conduit, dignes d'intérêt. On ne verra peut-être pas sans surprise que *la fonction $f(x)$, en restant positive, peut devenir infinie autant de fois qu'on le veut dans tout intervalle arbitrairement petit donné, à partir d'une certaine valeur de x, sans que l'intégrale* (1) *cesse d'être finie et déterminée.*

2. Proposons-nous d'abord de chercher si l'intégrale

$$J = \int_0^\infty (\sin^2 \pi x)^x\, dx,$$

où la fonction sous le signe $\int$ reste positive et reprend une valeur égale à l'unité pour toute valeur de x de la forme

$$x = \frac{2i+1}{2}, \qquad i \text{ entier},$$

a une valeur finie ou infinie. Désignant par n un nombre entier

---

(1) J'ai dit le contraire, après d'autres, par inadvertance, dans la troisième édition de mon *Cours d'Analyse*.

(2) *Zeitschrift für Mathematik* de Schlömilch, t. XXIII, p. 68; 1877.

(3) *Mathematische Annalen*, t. XIII, p. 251; 1878.

quelconque, on a

$$J = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_n^{n+1} (\sin^2 \pi x)^x \, dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^1 (\sin^2 \pi x)^{n+x} \, dx.$$

Comme, dans l'intervalle $(0, 1)$, on a toujours

$$0 \leqq \sin^2 \pi x \leqq 1, \qquad n + x \leqq n + 1,$$

il en résulte

$$\int_0^1 (\sin^2 \pi x)^{n+x} \, dx > \int_0^1 (\sin^2 \pi x)^{n+1} \, dx = \frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}.$$

La série qui a pour terme général cette expression est divergente; car, si l'on désigne par $1 + \varepsilon$ le rapport d'un terme au suivant, on a

$$\lim_{n=\infty} n\varepsilon = \frac{1}{2} < 1;$$

donc, *a fortiori*, la série qui a pour terme général

$$\int_0^1 (\sin^2 \pi x)^{n+x} \, dx$$

est divergente, et l'intégrale J est infinie. On verrait de même que l'intégrale de $(\sin^2 \pi x)^{px} \, dx$, entre les mêmes limites 0 et ∞, est infinie, p étant constant.

3. Nous allons prouver, au contraire, que *l'intégrale*

$$(2) \qquad I = \int_0^\infty (\sin^2 \pi x)^{\varphi(x)} \, dx,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ désigne une fonction positive, constamment croissante avec x à partir d'une valeur déterminée X *de x, aura une valeur finie si l'on a*

$$(3) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x-1)} < 1.$$

Nous avons encore ici

$$I = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_n^{n+1} (\sin^2 \pi x)^{\varphi(n+x)} \, dx.$$

Désignons en général par $\varphi_e(n)$ le plus grand nombre entier compris dans $\varphi(n)$. On a, dans l'intervalle (0, 1),

$$\sin^2\pi x \leqq 1, \qquad \varphi(n+x) \geqq \varphi(n) \geqq \varphi_e(n),$$

donc

$$\int_0^1 (\sin^2\pi x)^{\varphi(n+x)}\,dx < \int_0^1 (\sin^2\pi x)^{\varphi_e(n)}\,dx;$$

et, comme $2\varphi_e(n)$ est un nombre entier et pair, on aura

$$(4) \qquad \int_0^1 (\sin^2\pi x)^{\varphi_e(n)}\,dx = \frac{1.3\ldots[2\varphi_e(n)-1]}{2.4\ldots 2\varphi_e(n)} = u_n.$$

Étudions la convergence de la série Σu_n. On connaît les inégalités qui conduisent à la formule de Wallis,

$$1 < \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2.(2n+1)}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}\,\frac{\pi}{2} < \frac{2n+1}{2n}$$

ou

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2n+1} < \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 < \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2n};$$

d'où l'on tire, γ désignant une fraction positive plus petite que $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+\gamma}}.$$

Appliquant cette formule à la série Σu_n, on trouvera

$$u_n = \frac{1.3.5\ldots[2\varphi_e(n)-1]}{2.4.6\ldots 2\varphi_e(n)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_e(n)+\gamma}},$$

$$u_{n+1} = \frac{1.3.5\ldots[2\varphi_e(n+1)-1]}{2.4.6\ldots 2\varphi_e(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_e(n+1)+\gamma_1}},$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{\varphi_e(n)+\gamma}{\varphi_e(n+1)+\gamma_1}}.$$

Observons que la condition (3), supposée vérifiée par la fonction $\varphi(x)$, entraîne la conséquence que $\varphi(x)$ croît indéfiniment avec x. Il en sera donc de même de $\varphi(n)$ avec n, et aussi de $\varphi_e(n)$. On aura donc

$$\lim_{n=\infty}\frac{\varphi_e(n)}{\varphi_e(n+1)} = \lim\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)},$$

donc

$$\lim \frac{u_{n-1}}{u_n} = \lim_{x=\infty} \sqrt{\frac{\varphi(x)}{\varphi(x-1)}} < 1.$$

La série Σu_n est donc convergente et il en est de même, à plus forte raison, de la série qui a pour terme général l'intégrale

$$\int_0^1 (\sin^2 \pi x)^{\varphi(n+x)}\, dx;$$

donc l'intégrale I aura une valeur finie, quoique la fonction sous le signe $\int$ devienne égale à l'unité pour toute valeur de x de la forme $\frac{2i-1}{2}$.

Si le rapport $\varphi(x) : \varphi(x+1)$ a pour limite l'unité, on ne peut plus conclure en général; nous examinerons plus loin un cas où cela a lieu.

4. Voici quelques cas particuliers :

1° Prenons $\varphi(x) = \Gamma(x)$, Γ désignant l'intégrale eulérienne. Nous aurons

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x}, \qquad \lim \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = 0;$$

les conditions sont remplies : donc l'intégrale

$$\int_0^\infty (\sin^2 \pi x)^{\Gamma(x)}\, dx \tag{6}$$

a une valeur finie et déterminée. Il en est de même des intégrales

$$\int_0^\infty (\sin^2 \pi x)^{x^r}\, dx, \quad \int_0^\infty (\sin^2 \pi x)^{k^x}, \quad k > 1,$$

qui donnent respectivement

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = 0, \qquad \lim \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{k}.$$

2° Considérons l'hypothèse

$$\varphi(x) = x^k.$$

k désignant une constante positive. La limite du rapport

$$\varphi(x) : \varphi(x+1)$$

étant ici égale à l'unité, le théorème n'est plus applicable; mais, si l'on revient à l'équation (5), on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{(n^k)_e + \gamma}{(n+1)_e^k + \gamma_1}} = \sqrt{\frac{n^k + \zeta}{(n+1)^k + \zeta_1}},$$

ζ et ζ_1 étant, en valeur absolue, moindres que l'unité. On a donc

$$\frac{u_n^2}{u_{n+1}^2} = \frac{(n+1)^k + \zeta_1}{n^k + \zeta},$$

et, en posant

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \varepsilon,$$

d'où

$$n\varepsilon = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{u_n^2}{u_{n+1}^2} - 1\right) \times \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} + 1\right)^{-1},$$

on trouvera, en observant que le dernier facteur a pour limite $\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n=\infty} n\varepsilon = \frac{1}{2} \lim \left[k + \frac{k(k-1)}{2n} + \cdots + \frac{\zeta_1 - \zeta}{n^{k-1}}\right] \times \left(1 + \frac{\zeta}{n^k}\right)^{-1}.$$

Donc, si $k > 1$, $\lim n\varepsilon$ sera égal à $\frac{k}{2}$, et, d'après un théorème connu, la série Σu_n sera convergente si $k > 2$.

On conclura donc que *l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty (\sin^2 \pi x) x^k \, dx$$

a une valeur finie pour toute valeur du nombre k supérieure à 2. Si $k = 2$, il faudra un nouvel examen.

5. Dans les exemples précédents, la fonction $f(x)$ reste positive et ne tend pas vers zéro lorsque x tend vers l'infini, mais sa valeur ne surpasse jamais l'unité. Un simple changement de variable conduit à une fonction $f(x)$ qui acquiert des valeurs indéfiniment croissantes. Remplaçons x par x^2 dans l'intégrale (6). Nous aurons l'intégrale

$$2 \int_0^\infty x (\sin^2 \pi x^2) \Gamma(x^2) \, dx,$$

qui aura nécessairement une valeur finie comme (6). La fonction $f(x)$, toujours positive, acquiert ici la valeur

$$f(x) = x = \sqrt{\frac{2i+1}{2}} \qquad (i \text{ entier})$$

pour toute valeur de x de cette même forme : donc, une valeur indéfiniment croissante avec le nombre i. Mais il y a plus; les valeurs de x jouissant de la propriété précédente se rapprochent indéfiniment à mesure que i augmente, car la différence de deux valeurs consécutives est

$$x' - x = \frac{x'^2 - x^2}{x + x'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2i+1} + \sqrt{2i+3}},$$

et cette différence finit par décroître au-dessous de tout nombre donné à partir d'une valeur convenable de i. Donc, *dans tout intervalle donné* σ, *aussi petit qu'on le veut, à partir d'une valeur suffisamment grande de* x, *il existera un nombre de valeurs de* x *aussi grand qu'on le voudra, pour lesquelles la fonction* $f(x)$ *surpassera un nombre donné, quel que grand qu'il soit, sans que l'intégrale* (1) *cesse d'être finie et déterminée.*

6. *Remarque.* — Nous avons trouvé, dans la série Σu_n, que le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\varphi_e(n)+1}{2\varphi_e(n)+2} \cdot \frac{2\varphi_e(n)+3}{2\varphi_e(n)+4} \cdots \frac{2\varphi_e(n+1)-1}{2\varphi_e(n+1)}$$

a même limite que $\sqrt{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}}$. On conclut de là, pour toute fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à la condition (3), la relation

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}} \times \frac{2\varphi_e(n)+1}{2\varphi_e(n)+2} \cdot \frac{2\varphi_e(n)+3}{2\varphi_e(n)+4} \cdots \frac{2\varphi_e(n+1)-1}{2\varphi_e(n+1)} = 1.$$

Ce sont des produits infinis d'un genre spécial. On déduit de cette formule quelques relations assez curieuses, en prenant pour $\varphi(x)$ quelqu'une des fonctions considérées plus haut, et obser-

vant que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ a pour limite $\sqrt{e}$. On a

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n}\,\frac{2\Gamma(n)+1}{2\Gamma(n)+2}\cdot\frac{2\Gamma(n)+3}{2\Gamma(n)+4}\cdots\frac{2n\Gamma(n)-1}{2n\Gamma(n)}=1,$$

$$\lim_{n=\infty}\sqrt{n+1}\,\frac{2n^n+1}{2n^n+2}\cdot\frac{2n^n+3}{2n^n+4}\cdots\frac{2(n+1)^{n+1}-1}{2(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{2(k^n)_e+1}{2(k^n)_e+2}\cdot\frac{2(k^n)_e+3}{2(k^n)_e+4}\cdots\frac{2(k^{n+1})_e-1}{2(k^{n+1})_e}=\frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{2(n^k)_e+1}{2(n^k)_e+2}\cdot\frac{2(n^k)_e+3}{2(n^k)_e+4}\cdots\frac{2(n+1)_e^k-1}{2(n+1)_e^k}=1,$$

.....

7. On peut aller plus loin que le théorème du n° 3, mais pour cela nous nous appuierons sur un lemme de Calcul intégral.

Soient $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions positives et intégrables dans un intervalle (a, b); on a la relation

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \leqq \sqrt{\int_a^b \varphi(x)^2\,dx}\times\sqrt{\int_a^b \psi(x)^2\,dx}\ (^1).$$

Considérons la fonction

$$f(x)=\psi(x)(\sin^2\pi x)^{\varphi(x)}\,dx,$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction qui satisfait aux conditions du n° 3, $\psi(x)$ une fonction positive pour les valeurs positives de x. Nous aurons, comme ci-dessus,

$$\int_n^{n+1}\psi(x)(\sin^2\pi x)^{\varphi(x)}\,dx=\int_0^1\psi(n+x)(\sin^2\pi x)^{\varphi(n+x)}\,dx,$$

et, d'après le lemme, cette dernière intégrale a une valeur positive moindre que celle du produit

$$\sqrt{\int_0^1\psi(n+x)^2\,dx}\times\sqrt{\int_0^1(\sin^2\pi x)^{2\varphi(n+x)}\,dx}.$$

(1) J'avais communiqué ce théorème, le croyant nouveau, à une réunion de la Société scientifique de Bruxelles; mais j'apprends, par une obligeante communication de M. Liguine, qu'il a été donné par M. Imschenetsky à la Société de Kharkoff, en 1883.

Si la fonction $\psi(x)$ est telle que la première de ces intégrales ne puisse surpasser une valeur fixe G, quel que soit le nombre entier n, on aura

$$(8) \qquad \int_n^{n+1} \psi(x)(\sin^2 \pi x)^{\varphi(x)}\, dx < G\sqrt{\int_0^1 (\sin^2 \pi x)^{2\varphi(n+x)}\, dx}.$$

Il suit d'ailleurs du théorème démontré au n° 3 que, le rapport

$$\frac{2\varphi(x)}{2\varphi(x+1)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}$$

étant supposé tendre vers une limite moindre que l'unité pour $x = \infty$, la série qui a pour terme général

$$u_n = \int_0^1 (\sin^2 \pi x)^{2\varphi(n+x)}\, dx$$

est convergente, le rapport $u_{n+1} : u_n$ ayant aussi une limite moindre que 1. Il en sera donc de même de la série qui a pour terme général $\sqrt{u_n}$, ou même $G\sqrt{u_n}$; donc, *a fortiori*, en vertu de l'intégrale (8), de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_n^{n+1} \psi(x)(\sin^2 \pi x)^{\varphi(x)}\, dx.$$

De là ce théorème :

Soient $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions positives pour x positif. Si la fonction $\varphi(x)$ croît constamment avec x à partir d'une valeur X *de la variable et que le rapport $\varphi(x) : \varphi(x+1)$ tende vers une limite inférieure à l'unité lorsque x croît à l'infini; si, d'autre part, l'intégrale*

$$(9) \qquad \int_0^1 \psi(n+x)^2\, dx$$

ne peut surpasser une valeur fixe G, *quel que soit le nombre entier n, l'intégrale*

$$(10) \qquad \int_0^\infty \psi(x)(\sin^2 \pi x)^{\varphi(x)}\, dx$$

aura une valeur finie.

8. La fonction $\psi(n+x)$ peut acquérir des valeurs croissantes avec n et même devenir infinie dans l'intervalle (0, 1), sans que la condition imposée à l'intégrale (9) cesse d'être vérifiée. Prenons, comme exemple,

$$\psi(x) = l.\sec^2\pi x = -l.\cos^2\pi x \ (^1).$$

Nous aurons

$$\psi(n+x) = -l.\cos^2\pi x,$$

et cette fonction croît de zéro à l'infini lorsque x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, puis décroît de ∞ à 0 lorsque x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π. Mais on a

$$\int_0^1 \psi(n+x)^2\,dx = \int_0^1 (l.\cos^2\pi x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (l.\cos^2 z)^2\,dz = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (l.\cos z)^2\,dz,$$

et cette intégrale est connue (^{2}) : sa valeur est

$$\frac{\pi}{2}\left[(l.2)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right];$$

donc enfin on a

$$\int_0^1 \psi(n+x)^2\,dx = 4\left[(l.2)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right].$$

L'intégrale (9) a donc une valeur numérique fixe. Il s'ensuit que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} (l.\sec^2\pi x)(\sin^2\pi x)^{\varphi(x)}\,dx$$

aura toujours une valeur finie si la condition (3) est vérifiée; et cependant la fonction sous le signe $\int$, non seulement ne tend pas vers zéro lorsque x croît à l'infini, mais elle devient infinie pour toute valeur de x de la forme $x = \frac{2i+1}{2}$, son premier facteur devenant infini pendant que le second se réduit à l'unité. On peut

---

(^{1}) l désigne un logarithme népérien.

(^{2}) LEGENDRE, *Exercices de Calcul intégral*, t. II, p. 43.

d'ailleurs ici, comme au n° 5, remplacer x par x^2, et l'intégrale

$$\int_0^\infty x(l.\sec^2\pi x^2)(\sin^2\pi x^2)^{\varphi(x^2)}\,dx$$

aura une valeur finie, $f(x)$ devenant infini pour toute valeur de x de la forme $\sqrt{\frac{2i+1}{2}}$. On peut donc regarder comme établi ce résultat : *Il est possible, d'une infinité de manières, de déterminer la fonction $f(x)$ de telle façon que cette fonction, restant toujours positive, devienne infinie un nombre de fois aussi grand qu'on le veut dans le plus petit intervalle donné, à partir d'une valeur convenablement choisie de x, et que cependant l'intégrale*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

ait une valeur finie et déterminée.

9. Voici un autre exemple du théorème du n° 7. Posons

$$\psi(x) = (\tang^2\pi x)^{\frac{1}{5}},$$

d'où

$$\int_0^1 \psi(n+x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tang^2 x)^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{4}{5}}\,du}{1+u^2} = \frac{1}{\sin\frac{9\pi}{10}}.$$

La condition est vérifiée; ainsi, par exemple, l'intégrale

$$\int_9^\infty (\tang^2\pi x)^{\frac{1}{5}}(\sin^2\pi x)^{\Gamma(x)}\,dx$$

aura une valeur finie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HARNACK (A.). — Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene. 1 vol. in-8°; IV-158 p. Leipzig; Teubner 1887.

La théorie du potentiel fournit à coup sûr un des plus remarquables exemples de ces questions qui, posées historiquement par la Science expérimentale, se sont trouvées avoir une influence capitale sur le développement des pures Mathématiques : elle est aujourd'hui inséparable de la théorie des fonctions; si profonde est la pénétration mutuelle des deux théories, qu'on serait tenté de croire à quelque mystérieuse connexion entre le domaine de l'expérience et le domaine de la pensée abstraite.

La théorie du potentiel logarithmique se relie étroitement à deux questions essentielles, le problème de Dirichlet et le problème de la représentation conforme. Les beaux travaux de M. Schwarz et de M. Carl Neumann ont suffisamment éclairé ces deux questions pour qu'on désirât un Livre didactique sur la matière. Celui que notre éminent collaborateur, M. Axel Harnack, offre aujourd'hui au public savant, est clair, précis, bien ordonné. L'auteur, en outre, sur quelques points très importants, a complété les recherches antérieures de la façon la plus heureuse. Son Livre rendra d'incontestables services : nous allons essayer d'en retracer rapidement les principales divisions.

I. *Théorèmes généraux sur le potentiel logarithmique et sur la fonction potentielle.* — Le potentiel logarithmique d'une masse M répandue sur une aire plane A relatif à un point (x, y) du plan, repoussé par cette masse, est défini, comme l'on sait, par l'intégrale

$$u = \int \delta \log \frac{1}{\varepsilon} da, \tag{1}$$

où δ désigne la densité de la masse en un point de l'élément de surface da, où ε est la distance de ce même point au point repoussé (x, y), et où enfin l'intégrale s'étend à toute l'aire A. On

définirait d'une façon toute semblable le potentiel logarithmique, dans le cas d'une masse distribuée sur une courbe plane. La fonction u de x, y, ainsi définie, en dehors de l'aire A, est évidemment une fonction continue, ainsi que toutes ses dérivées, qui satisfait à l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

à l'intérieur de l'aire A, la fonction u est continue, ainsi que ses dérivées premières; enfin les dérivées secondes sont aussi continues, tant que la densité δ est continue et intégrable, ainsi que ses dérivées premières; sous ces conditions, on a l'équation

$$\Delta u = -2\pi\delta.$$

Toute fonction u de x, y qui, à l'intérieur d'un certain domaine, est continue ainsi que ses dérivées premières et secondes, et qui, en outre, satisfait à l'équation

$$\Delta u = 0,$$

est dite *fonction potentielle régulière,* ou *fonction harmonique.* En désignant par u la valeur d'une telle fonction en un point du domaine considéré, par r et θ les coordonnées polaires du point (x, y) quand on prend pour pôle le point (x_0, y_0) et en supposant que le cercle de rayon r soit situé tout entier dans le domaine considéré, on peut représenter la fonction u par la formule

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k; \tag{2}$$

les coefficients constants a_k, b_k sont déterminés, si l'on veut, par les valeurs que la fonction u prend sur la circonférence du cercle. Cette expression met en évidence quelques propriétés de ces fonctions : on aperçoit par exemple qu'il est impossible que la fonction u présente un maximum ou un minimum au point (x_0, y_0); ce point ne peut être un point isolé pour la courbe dont l'équation est $u = u_0$; on aperçoit immédiatement les tangentes en ce point, qu'il soit simple, ou multiple; d'un côté de la courbe u est plus grand que u_0, de l'autre côté, plus petit, etc.

Il est clair que la série qui figure dans le second membre con-

stitue la partie réelle d'une fonction d'une variable imaginaire. Enfin une fonction harmonique a dans le domaine considéré des dérivées de tous les ordres, dont les valeurs s'obtiennent par la différentiation, terme par terme, de la série précédente.

La formation des expressions d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un secteur circulaire ou d'un rectangle, lorsqu'on se donne les valeurs de la fonction sur le contour du secteur ou du rectangle, fournit un exemple instructif d'un problème dont la solution générale est le but essentiel du Livre.

Des conclusions importantes résultent de la considération des intégrales de la forme

$$\int \mathrm{U} \frac{\cos(r, n)}{r} ds = \int \mathrm{U} \frac{\partial}{\partial n}\left(\log \frac{1}{r}\right) ds,$$

qui correspondent, dans le plan, à celles dont Gauss a tiré si grand parti pour l'étude du potentiel newtonien. Elles sont relatives à un contour S dont ds est un élément; n est la direction de la normale à S en un point de ds, vers l'intérieur; r est le rayon vecteur qui va de ce même point à un point déterminé (x, y); (r, n) est l'angle des deux directions; enfin U est une fonction continue de s; une telle intégrale définit une fonction u de x, y qui, en raison de la forme du second membre, est manifestement une fonction harmonique dans toute région du plan qui ne contient aucun point de S; l'intégrale peut aussi être mise sous la forme

$$\int \mathrm{U}(d\sigma),$$

en désignant par $(d\sigma)$ l'angle sous lequel l'élément ds est vu du point (x, y), affecté du signe + ou du signe — suivant que l'angle (rn) est aigu ou obtus; de là résultent les propriétés suivantes : si S est un contour fermé et si U est égal à un, l'intégrale est nulle ou égale à 2π suivant que le point (x, y) est à l'extérieur ou à l'intérieur du contour; si ce point est situé sur le contour, on doit donner pour valeur à l'intégrale la limite de la valeur qu'elle prend quand on supprime du contour un petit arc contenant le point (x, y), puis qu'on fait décroître cet arc indéfiniment; cette limite est π si le point (x, y) est un point non singulier du contour; elle est égale à α si ce point est un point anguleux où les tangentes forment un angle égal à α. La discontinuité, sur la courbe, de la fonc-

tion définie par cette intégrale apparaît ainsi bien nettement; des circonstances toutes pareilles se présentent pour la fonction plus générale

$$u(x,y) = \int U(d\sigma),$$

où l'intégrale est prise le long d'une courbe S; supposons le point (x,y) voisin d'un point (x',y') situé sur S, point pour lequel la fonction U a la valeur U', et s'approchant indéfiniment du point (x',y'); le point (x,y) peut s'approcher du point (x',y') en restant du côté positif ou du côté négatif de la courbe S; on a alors, suivant les deux cas, auxquels correspondent les indices i et e attribués à la fonction u,

$$(3)\qquad \begin{cases} \lim u_i(x,y) = (2\pi - \alpha)U' + \int U(d\sigma), \\ \lim u_e(x,y) = -\alpha U' + \int U(d\sigma). \end{cases}$$

Les quantités $u_i(x,y)$, $u_e(x,y)$ tendent uniformément vers leurs limites, c'est-à-dire que, si l'on se donne un nombre positif δ, on peut fixer, indépendamment de x', y', une valeur ρ telle que, si le point (x,y) est dans un cercle de centre x', y' et de rayon ρ, la différence entre la fonction $u(x,y)$ et sa limite soit moindre que δ. Dans ces formules α doit être pris égal à π si le point (x',y') n'est pas un point singulier de S; si ce point est un point anguleux, α est l'angle des tangentes qui contient la région positive; on suppose toute fois que, dans le voisinage du point (x',y') la courbe ne présente qu'un nombre fini de points d'inflexion. Pour ce qui est de l'intégrale

$$\int U(d\sigma),$$

qui figure dans les deux membres, les angles $(d\sigma)$ ont pour sommet le point (x',y'), et leur signification doit être fixée comme il a été fait plus haut, quand on supposait $U = 1$ et le point (x,y) sur la courbe. Cette intégrale représente une fonction de (x',y'), définie pour les différents points de la courbe S; cette fonction, que l'on peut dire *associée* à la fonction U, jouera dans la théorie que l'on doit à M. Carl Neumann un rôle essentiel.

Ajoutons enfin que la fonction

$$u(x,y) = \int U \frac{d}{dn} \log\left(\frac{1}{r}\right) ds$$

peut être regardée comme un potentiel, ou plutôt comme la limite

du potentiel de masses de signes contraires distribuées sur deux courbes infiniment voisines de la courbe S; c'est ce qu'on appelle *un potentiel de double charge, avec le moment* U.

Voici encore un théorème qui correspond à une proposition de Gauss, bien connue.

Si u désigne le potentiel logarithmique d'une masse distribuée dans une région limitée du plan et si S est un contour fermé, on aura

$$\int \frac{du}{dn}\, ds = 2\pi \mathrm{M};$$

l'intégrale est prise le long de S; ds est un élément du contour, n, la direction de la normale en un point de cet élément, vers l'intérieur; M est la masse contenue dans l'intérieur de S; si cette masse est nulle, il en est de même de l'intégrale; celle-ci est encore nulle si u est une fonction harmonique à l'intérieur de S. C'est ce qui résultera du théorème de Green.

Ce dernier théorème fournit les égalités

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy \\ &\quad =-\iint v\,\Delta u\,dx\,dy-\int v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \\ &\quad =-\iint u\,\Delta v\,dx\,dy-\int u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,ds, \end{aligned}\right.$$

où figurent les deux fonctions u et v de x, y, continues ainsi que leurs dérivées premières, et possédant des dérivées secondes intégrables à l'intérieur d'une aire limitée, à laquelle s'étendent les intégrales doubles; les intégrales simples se rapportent au contour de cette aire, contour dont ds est un élément; n est toujours la direction de la normale, en un point de cet élément, vers l'intérieur. Ces formules conduisent à des conclusions importantes lorsque l'on prend pour u et v des fonctions harmoniques; signalons en particulier les formules

$$(5)\qquad \int\left(u\frac{\partial \mathrm{T}_e}{\partial n}-\mathrm{T}_e\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=0,$$

$$(6)\qquad \int\left(u\frac{\partial \mathrm{T}_i}{\partial n}-\mathrm{T}_i\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=2\pi u_i,$$

où u est une fonction harmonique à l'intérieur du contour S, le

long duquel sont prises les deux intégrales, et où T_e et T_i désignent le logarithme de l'inverse du rayon vecteur qui va d'un point de l'élément ds à un point déterminé (x, y) du plan, extérieur ou intérieur au contour S; dans la seconde formule u_i est la valeur de la fonction u en ce point.

Si S désigne toujours un contour fermé, et N la direction vers l'extérieur de la normale en un point de l'élément ds de ce contour; si enfin u, v désignent des fonctions harmoniques à l'extérieur de S, qui, lorsque le point (x, y) s'éloigne indéfiniment, deviennent infinies comme $M \log \frac{1}{r}$, où M est une constante et r la distance du point (x, y) à un point fixe, en sorte que sur un cercle de rayon r, aussi grand qu'on le veut, on puisse écrire le développement

$$u = M \log \frac{1}{r} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \frac{1}{r^k}$$

et un développement analogue pour v, on aura, en appliquant le théorème de Green au double contour formé par S et un cercle de rayon suffisamment grand, les formules

$$(7) \quad \begin{cases} \int \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) ds = 0, \\ \int \left(u \frac{\partial T_i}{\partial N} - T_i \frac{\partial u}{\partial N} \right) ds = 0, \\ \int \left(u \frac{\partial T_e}{\partial N} - T_e \frac{\partial u}{\partial N} \right) ds = 2\pi u_e, \end{cases}$$

les intégrales étant toujours prises le long du contour S.

Dans le cas particulier où la courbe S est un cercle et où le point (x, y) est au centre de ce cercle, la formule (6), en regardant le centre du cercle comme l'origine d'un système de coordonnées polaires, devient

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \, d\theta;$$

elle montre que u_i est la moyenne arithmétique des valeurs que la fonction harmonique u prend sur la circonférence du cercle. Il en résulte qu'une fonction harmonique à l'intérieur d'un contour ne peut admettre, à l'intérieur de ce contour, ni maximum, ni mi-

nimum; elle reste donc comprise entre le maximum et le minimum de ses valeurs sur le contour; cette proposition aura dans la suite des conséquences importantes; en particulier, si la fonction reste constante sur le contour, elle reste aussi constante à l'intérieur. De même, si l'on considère une fonction u harmonique à l'extérieur du contour S et développable, pour les valeurs de r suffisamment grandes, en une série de la forme

$$u = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

ses valeurs seront comprises entre le maximum et le minimum des valeurs qu'elle prend sur la courbe S.

Soit u une fonction harmonique définie à l'intérieur d'un contour S et sur ce contour : désignons par U les valeurs de cette fonction sur le contour; lorsque le point (x, y) s'approche d'un point du contour, u tend uniformément vers U; désignons par P la fonction *associée* à U, définie sur le contour S par la formule

$$P = \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma),$$

dont la signification a été fixée plus haut. P est, comme U, une fonction continue sur S; d'autre part, on a, pour un point intérieur à S,

$$u = u_1 + u_2,$$

en posant

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T}{\partial n}\, ds, \qquad u_2 = -\frac{1}{2\pi}\int T \frac{\partial U}{\partial n}\, ds.$$

T représente, comme plus haut T_i, le logarithme de l'inverse de la distance d'un point de ds au point (x, y); u_1 et u_2 sont des potentiels; la première fonction est un potentiel de double charge, la seconde un potentiel ordinaire : ce sont des fonctions harmoniques à l'intérieur de S; quand le point (x, y) s'approche d'un point du contour, u_1 et u_2 tendent respectivement vers les valeurs limites U_1 et U_2 définies par les égalités

$$U_1 = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}P, \qquad U_2 = \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}P.$$

Si maintenant, on attribue sur le contour aux fonctions u_1 et u_2

les valeurs U_1 et U_2, on pourra appliquer encore à ces fonctions la formule (6), et l'on en conclura

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi}\int (U-P)\frac{\partial T}{\partial n}\,ds = -\frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{\partial P}{\partial n}\right) T\,ds,$$

en désignant par $\frac{\partial P}{\partial n}$ la dérivée prise, le long de la normale, de la fonction harmonique à l'intérieur de S dont la valeur sur S serait égale à P. Si, en particulier, S se réduit à un cercle, on voit de suite que l'on a

$$(9) \qquad P = \frac{1}{2\pi}\int U\,d\theta,$$

en désignant par $d\theta$ l'angle sous lequel l'élément ds est vu du centre; P est donc une constante sur la circonférence du cercle, et l'on en conclut que la formule (6) devient dans ce cas

$$(10) \quad u = \frac{1}{\pi}\int U\frac{\partial T}{\partial n}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int U\,d\theta = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n}\,T\,ds + \frac{1}{2\pi}\int U\,d\theta.$$

A la vérité la formule (8) implique un résultat qui ne sera établi que plus tard; mais il n'en est nullement ainsi des formules (9) et (10), dont la dernière montre qu'une fonction harmonique à l'intérieur d'un cercle est entièrement déterminée par ses valeurs sur la circonférence ou, à une constante près, par les valeurs de ses dérivées prises le long de la normale.

Ces divers résultats se complètent en introduisant la fonction *conjuguée* à la fonction u, c'est-à-dire liée à la fonction u par les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

on se trouve alors entièrement dans le domaine de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire; et, en effet, le théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires apparaît comme une transformation du théorème de Green, et la formule

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-t},$$

comme une transformation de l'équation (6).

Si l'on considère les valeurs U, V de deux fonctions conjuguées u, v, sur un contour S, aux fonctions U, V seront associées deux fonctions P, Q; M. Harnack établit d'intéressantes relations entre ces fonctions, relations qu'il avait déjà développées dans les *Berichte der k. Sächsischen Gesellschaft* pour 1885.

La formule (10) conduit sans peine à la conclusion suivante : Si une fonction u, harmonique dans une aire quelconque, garde dans cette aire un signe constant, la valeur de cette fonction u en un point quelconque de l'aire est égale à la valeur u_0, qu'elle prend en un point déterminé (x_0, y_0) de la même aire, multipliée par un nombre positif qui reste compris entre des limites indépendantes du point (x_0, y_0); il en est de même pour les valeurs absolues des dérivées de la fonction u. M. Harnack signale, dans le même ordre d'idées, deux propositions intéressantes, dues à M. Schwarz et à M. Neumann, et qui se rapportent à des fonctions supposées harmoniques dans un cercle.

On est maintenant en mesure d'établir les propositions suivantes, essentielles pour la solution du problème qui est l'objet principal du Livre de M. Harnack :

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ une suite infinie de fonctions harmoniques dans une aire F; soient $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ leurs valeurs sur le contour de F : on suppose que, lorsque le point (x, y) s'approche du contour, u_n tend uniformément vers U_n. Si la série

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$$

converge uniformément sur le contour et a pour somme U, la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

convergera en tout point de F et sa somme u sera une fonction harmonique dans F, qui tendra uniformément vers U quand le point (x, y) tendra vers le contour.

Si les fonctions

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

harmoniques dans l'aire F, gardent toutes dans cette aire un même signe, et si la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

converge en un point intérieur à l'aire F, elle convergera en tout point de F et sa somme y représentera une fonction harmonique.

II. *Conditions suffisantes pour la détermination d'une fonction potentielle. Propriétés de la fonction de Green et de la charge naturelle.* — On démontre sans peine les propositions suivantes : Si u est une fonction harmonique dans une aire donnée, il est impossible que u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ soient nuls le long d'un arc de courbe, si petit qu'il soit, à moins que u ne soit nul dans toute l'aire; il ne peut exister qu'une seule fonction u harmonique à l'intérieur du contour, prenant sur ce contour le système de valeurs continues U, en sorte que u tende uniformément vers U quand le point (x, y) s'approche du contour. Si l'on se donne de même sur le contour les valeurs de $\frac{\partial U}{\partial n}$, valeurs qui doivent vérifier l'égalité

$$\int \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments du contour, la fonction est déterminée à une constante près; une fonction potentielle u est encore déterminée à l'intérieur d'un contour si l'on se donne ses valeurs U sur une portion du contour et les valeurs de $\frac{\partial U}{\partial n}$ sur la portion restante.

Après avoir établi ces préliminaires, M. Harnack introduit la fonction de Green. Il adopte à cet égard les notations de M. Neumann. Si l'on considère un contour et un point O intérieur à ce contour, et que l'on désigne en général par r la distance du point (x, y) au point fixe O, la fonction de Green g_0, relative au pôle O, sera la fonction harmonique à l'intérieur du contour qui, sur ce contour, a des valeurs égales à $\log\frac{1}{r}$; admettant l'existence de cette fonction, il en démontre les propriétés essentielles que voici : si l'on considère deux points intérieurs au contour O et O' et les deux fonctions de Green g_0, $g_{0'}$ relatives à ces deux points, la valeur de g_0 au point O' est égale à la valeur de $g_{0'}$ au point O. Lorsque le point O s'approche du point p situé sur le contour, la fonction de Green g_0 tend uniformément vers $\log\frac{1}{r}$, en désignant

maintenant par r la distance du point p à un point quelconque (x, y) de l'aire limitée par le contour. Enfin la fonction de Green permet d'établir une formule qui donne l'expression d'une fonction harmonique u à l'intérieur d'un contour lorsqu'on se donne les valeurs U de cette fonction sur le contour, à savoir

$$(11) \qquad u_i = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_i}{\partial n}\, ds - \frac{1}{2\pi}\lim_{S=S'}\int U \frac{\partial G_i}{\partial n'}\, ds',$$

g_i est la fonction de Green relative au point intérieur pour lequel on calcule u_i; S′ est un contour intérieur à S qui tend vers S. Les points de S′ sont supposés correspondre aux points de S, et, dans la seconde intégrale, U représente en un point de S′ la valeur définie pour le point correspondant de S; $\frac{\partial G_i}{\partial n'}$ désigne les valeurs de $\frac{\partial g_i}{\partial n}$ le long de ce contour S′, aux éléments ds' duquel la seconde intégrale est étendue. Il y aura lieu, toutefois, de revenir sur cette formule (11), en particulier pour établir l'existence de la limite qui figure dans le second membre.

Après avoir donné les exemples classiques du calcul de la fonction de Green pour un cercle et pour un rectangle, l'auteur passe à la notion de la charge naturelle, que l'on doit à M. Neumann, et aux théorèmes qui correspondent à ceux que l'on vient de rappeler, lorsque l'on veut construire une fonction harmonique à l'extérieur d'un contour au moyen de ses valeurs sur ce contour. Malgré l'intérêt du sujet, nous nous bornons, pour ne pas grossir démesurément ce compte rendu, à signaler l'existence de ces propositions.

III. *Méthode de M. Neumann pour la construction d'une fonction potentielle au moyen de ses valeurs sur un contour.* — Cette méthode s'applique dans le cas d'un contour entièrement convexe vers l'extérieur. Ce contour peut être formé de portions de lignes admettant en chaque point une tangente, mais se réunissant de manière à former des points anguleux, de chaque côté desquels la tangente soit déterminée, et qui soient en nombre fini. Elle repose sur la considération de l'intégrale, étendue aux

éléments ds du contour S,

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right) ds,$$

où U désigne une fonction continue de l'arc s du contour S : ces valeurs U sont les valeurs que doit prendre la fonction potentielle cherchée u sur le contour S; r est la distance d'un point de ds à un point intérieur (x, y); on a vu [équations (3)] que, lorsqu'on faisait tendre ce point (x, y) vers un point du contour correspondant à la valeur s de l'arc, u_1 tendait uniformément vers la valeur

$$U_1 = \left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right) U + P,$$

où P est une fonction de l'arc s définie par l'intégrale

$$P = \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma).$$

On démontre tout d'abord, relativement à cette fonction P, qu'elle est une fonction continue de l'arc s.

De plus, sous le bénéfice des hypothèses relatives au contour S, on voit de suite que, tous les éléments $(d\sigma)$ étant positifs, on a

$$G > P > K,$$

en désignant par G et K le maximum et le minimum de U; on va un peu plus loin, en excluant toutefois le cas où le contour S serait un triangle ou un quadrilatère, et l'on parvient à établir que l'oscillation de la fonction P est moindre que $\lambda(G - K)$, où λ est une fraction proprement dite *dont la valeur ne dépend pas des valeurs de* U.

L'intégrale

$$u_1 = \int U \frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right) ds$$

permet donc de construire une fonction harmonique à l'intérieur de S et dont la valeur sur S est égale à $U + P$, sauf toutefois aux points anguleux; d'ailleurs, P étant une fonction continue de l'arc s, on pourra considérer de même la fonction

$$u_2 = \frac{1}{\pi}\int P \frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right) ds.$$

Ce sera une fonction harmonique à l'intérieur de s, dont la valeur sur le contour sera $P + P_1$, en posant

$$P_1 = \frac{1}{\pi}\int P(d\tau);$$

on pourra poursuivre ce procédé indéfiniment et former la suite indéfinie de fonctions

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots;\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots,$$

La somme

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} u_n$$

sera une fonction harmonique à l'intérieur de S dont la valeur sur le contour sera

$$U + (-1)^{n-1} P_{n-1};$$

d'ailleurs la valeur absolue de P_{n-1} est moindre que $\lambda^{n-1}(G - K)$; il en résulte que, lorsque n augmente indéfiniment, P_{n-1} tend vers une constante C; la convergence de la série indéfinie

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$$

résulte d'ailleurs d'un théorème précédemment établi, et, si l'on désigne par $u + C$ la somme de cette série, on voit que u sera une fonction harmonique à l'intérieur de S, qui tendra uniformément vers U quand le point (x, y) s'approchera du contour. Des considérations analogues s'appliquent aux cas où l'on veut former une fonction harmonique à l'extérieur d'une courbe de la même nature, au moyen de ses valeurs sur le contour.

Conservons les mêmes hypothèses relativement au contour, mais ne supposons plus la fonction U continue. Admettons qu'elle présente des discontinuités pour un nombre fini de points, mais des discontinuités telles que, si s est la valeur de l'arc qui correspond à un de ces points, les quantités

$$U(s + h),\quad U(s - h)$$

tendent vers des limites distinctes quand h tend vers zéro par des valeurs positives; on n'exclut point d'ailleurs le cas où le point de discontinuité serait un point anguleux du contour; M. Harnack,

montre alors que la fonction harmonique

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int U \frac{\partial}{\partial u}\left(\log\frac{1}{r}\right) ds,$$

lorsque le point intérieur (x, y) tend vers un point du contour auquel correspond une discontinuité de U, tend vers une limite qui dépend de la direction suivant laquelle il s'approche de ce point, puis que, en appliquant la même règle que précédemment, on parvient à une fonction harmonique u, qui, dans les mêmes conditions, tend vers la limite

$$\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)U' + \left(1+\frac{\delta}{\alpha}\right)U'';$$

U′ et U″ sont les deux limites de la fonction U, α est l'angle des tangentes au point considéré qui contient le contour à son intérieur, γ est l'angle que fait la direction opposée à celle suivant laquelle on s'approche du point limite avec la tangente au contour à laquelle correspond la valeur U′; enfin δ est l'angle analogue relatif à la seconde tangente. La fonction u est encore la seule fonction harmonique qui prenne la valeur U sur le contour (sauf aux points exceptionnels).

Enfin, pour les mêmes contours et par une méthode analogue, on peut construire une fonction harmonique u, quand on se donne sur le contour, les valeurs de la dérivée $\frac{\partial U}{\partial u}$.

IV. *Existence des fonctions potentielles pour les polygones quelconques et pour les surfaces à connexion simple ou multiple.* — La méthode de M. Neumann permet de construire une fonction harmonique à l'intérieur d'un polygone, quand on se donne ses valeurs sur le contour du polygone et que ce polygone ne présente pas d'angles rentrants et n'est pas un triangle ou un quadrilatère.

Pour écarter ces restrictions, il suffit de montrer que, si l'on sait résoudre le problème de la construction d'une fonction harmonique d'après ses valeurs sur le contour pour deux aires T_1, T_2, qui ont en commun une aire T_0, on peut encore résoudre ce problème pour l'aire $T_1 + T_2 - T_0$; c'est ce que fait tout d'abord M. Harnack, en suivant une méthode qui a été donnée en même temps par M. Schwarz et par M. Neumann.

Il développe ensuite une autre méthode, qui suppose qu'on sache résoudre le problème, tant pour l'intérieur que l'extérieur d'un triangle.

L'existence de la fonction de Green, en particulier, se trouve ainsi nettement établie pour une aire polygonale quelconque, à connexion simple ou multiple. M. Harnack a fait faire à la théorie un progrès bien notable en établissant rigoureusement l'existence de cette même fonction pour une aire limitée par un ou plusieurs contours quelconques, et en montrant le parti qu'on en peut tirer pour la construction d'une fonction harmonique au moyen de ses valeurs sur un contour. Il avait déjà, en 1886, publié dans les *Berichte* de la *K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften* ces beaux résultats, qu'il développe à nouveau dans son Livre.

Considérons une aire simplement connexe, qui limite une courbe S que définissent les équations

$$x = \varphi(\lambda), \qquad y = \psi(\lambda),$$

et que le point (x, y) décrit quand le paramètre λ varie de λ_0 à λ_1 ; φ et ψ sont, dans l'intervalle (λ_0, λ_1), des fonctions univoques et continues; en outre, les deux points qui correspondent à deux valeurs de λ, appartenant à l'intervalle (λ_0, λ_1), autres que λ_0 et λ_1, doivent être distincts; au contraire, le point qui correspond à la valeur λ_0 coïncide avec le point qui correspond à la valeur λ_1 ; en dehors de ces conditions les fonctions φ et ψ sont entièrement arbitraires. En suivant une méthode dont le principe est dû à M. Schwarz, et que M. Poincaré a appliquée dans un Mémoire inséré dans le *Bulletin de la Société mathématique* pour l'année 1883 ([1]), M. Harnack parvient à déduire l'existence de la fonction de Green pour l'aire limitée par la courbe S de l'existence de cette fonction pour les polygones intérieurs à cette aire, en faisant tendre vers la courbe S les contours de ces polygones. La démonstration s'étend d'ailleurs sans difficulté aux aires à connexion multiple, avec une limitation aussi générale que ci-dessus.

On a maintenant une base solide pour l'étude des fonctions définies par la formule

$$(11) \qquad u_i = \frac{1}{2\pi}\int U \frac{\partial T_i}{\partial n} ds - \frac{1}{2\pi} \lim_{S'=S} \int U \frac{\partial g_i}{\partial n'} ds'.$$

...me de la theorie générale des fonctions.

Le contour S auquel se rapporte la première intégrale, et vers lequel doit tendre le contour S′, auquel se rapporte la seconde, est soumis à des conditions plus restrictives que dans la proposition précédente : on supposera que, sauf pour un nombre limité de points anguleux ou de points de rebroussement, il y a une tangente en chaque point, et que la direction de cette tangente change d'une façon continue avec le point de contact, que l'on peut supposer déterminé d'une façon univoque par l'arc s, compté à partir d'un point fixe. Les contours de cette espèce ne sont rencontrés par une droite quelconque qu'en un nombre limité de points fixes. On suppose d'abord que U est une fonction univoque et continue de l'arc s. Dans ces conditions on établit, en toute rigueur, d'abord que la formule précédente a un sens, puis qu'elle définit une fonction harmonique à l'intérieur du contour S, fonction qui, lorsque le point (x, y) s'approche d'un point non singulier du contour, tend uniformément vers la valeur de U en ce point. Le mode de démonstration s'étend à l'espace. Il n'en est pas de même, malheureusement, des considérations que M. Harnack emploie pour arriver à la proposition suivante, dont on ne possédait pas encore, si nous ne nous trompons point, de démonstration complète : une fonction harmonique est entièrement déterminée par ses valeurs sur un contour, lorsque ces valeurs sont en général continues, même s'il existe sur le contour des points, en nombre fini, où la valeur de la fonction est laissée indéterminée, pourvu qu'elle soit finie, et que le contour soit dans les conditions précédemment requises.

Lorsque ce contour est une courbe analytique, la dérivée $\frac{\partial G}{\partial u}$, relative à la normale, est elle-même une fonction régulière; il n'y a pas lieu, alors, d'introduire le contour intermédiaire S′ que l'on faisait tendre vers le contour S, et la *formule de Green*

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U\left(\frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\right) ds$$

doit représenter la fonction harmonique à l'intérieur du contour S, dont les valeurs sur ce contour sont les valeurs de U. Il est intéressant d'établir directement ce résultat; c'est ce que fait l'auteur, en se plaçant dans le cas où, la fonction U étant en général continue sur S, il y aurait des points sur le contour où la fonction U serait discontinue, même indéterminée, mais toujours finie.

Enfin, on peut compliquer encore le problème de la détermination d'une fonction harmonique sur un contour, en imposant à cette fonction certaines discontinuités à l'intérieur du contour. La solution est immédiate quand on possède l'expression analytique de fonctions harmoniques en dehors des points de discontinuité et qui, dans le domaine de ces points, ont précisément le genre de discontinuité que l'on veut imposer à la fonction cherchée; si, par exemple, on veut avoir une fonction, harmonique en général, qui, au point (a, b) intérieur au contour S, présente la même discontinuité que $\log \frac{1}{r}$, en faisant

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

et si l'on appelle u la fonction harmonique dans S, qui prend sur S′ les valeurs U, on aura, pour la fonction cherchée,

$$u - g + \log \frac{1}{r}.$$

g étant la fonction de Green relative au point (a, b).

On déduit la solution générale du théorème suivant, que M. Schwarz et M. Neumann ont démontré dans des cas particuliers, mais d'une façon qui se généralise facilement, comme le montre M. Harnack : si l'on donne une fonction f univoque et harmonique dans l'aire A, à l'exception de certains points ou lignes de discontinuité situées à l'intérieur de A et telles que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial f}{\partial n} ds,$$

relative à une courbe contenue dans A et enfermant les lieux de discontinuité soit nulle, il existe une fonction déterminée φ, uniforme et harmonique dans tout le plan, même à l'infini, sauf aux points et lignes de discontinuité situés dans A, et telle que la différence $\varphi - f$ soit uniforme et harmonique dans A. Si l'on désigne par Φ les valeurs de cette fonction sur le contour de la surface donnée, on formera la fonction harmonique w dont les valeurs sur le contour sont égales à $U - \Phi$ et la fonction cherchée sera $w + \varphi$.

On peut encore supprimer la restriction relative à l'hypothèse

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial f}{\partial n}\,ds = 0;$$

soit a_0 la valeur de l'intégrale pour une courbe située dans A et enfermant les discontinuités et soit r la distance du point (x, y) à un point fixe pris à l'intérieur de la courbe, la fonction

$$f_0 = f + a_0 \log r$$

jouira en effet de la propriété requise; on formera la fonction φ_0 correspondante et la fonction $w + \varphi_0 - a_0(g + \log r)$ sera la fonction cherchée.

Si maintenant, à la fonction u, on adjoint la fonction conjuguée v, définie par l'équation

$$v = \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right),$$

cette fonction v sera univoque à l'intérieur d'une aire simplement connexe; au contraire, dans une aire n fois connexe, elle sera en général plurivoque et admettra $n - 1$ périodes. Si, à l'intérieur de la surface on donne certains domaines $A_1, A_2, \ldots, A_k$, pour lesquels sont définies des fonctions $U_1 + iV_1$, $U_2 + iV_2$, $\ldots$, $U_k + iV_k$ de la variable imaginaire $x + iy$, avec des discontinuités quelconques, telles cependant que les parties réelles soient univoques, on pourra conclure des propositions qui précèdent l'existence d'une fonction $u + iv$ de la variable $x + iy$ dont la partie réelle prend sur le contour de la surface des valeurs prescrites, telle que, à l'intérieur du domaine A_λ, la différence

$$u + iv - U_\lambda - iV_\lambda$$

soit univoque, continue et harmonique, dont enfin les périodes sont toutes purement imaginaires. C'est sur ce théorème qu'est fondée la théorie de la représentation conforme des surfaces à connexion multiple (¹).

(¹) *Voir* le Mémoire de M. Schottky dans le t. 83 du *Journal de Crelle : Ueber die Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen.*

V. *Remarques sur la théorie de la représentation conforme et sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.* — La fonction de Green permet de représenter d'une façon conforme une aire finie simplement connexe sur un cercle de rayon un. Il suffit pour cela de considérer la fonction $u = \log\left(\frac{1}{\rho}\right) - g_0$, où g_0 est la fonction de Green relative au pôle O pris arbitrairement à l'intérieur de l'aire considérée, et sa conjuguée v; si le contour de l'aire est formé de courbes analytiques, on peut faire correspondre d'une façon univoque les points de ce contour aux points de la circonférence du cercle. Dans le cas contraire, la correspondance entre les points des contours doit être l'objet d'une étude particulière.

M. Harnack donne ensuite quelques remarques intéressantes relatives, les unes, à la représentation conforme sur un demi-plan, les autres à la représentation conforme des aires qui s'étendent à l'infini et sur l'emploi de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Il termine enfin en résolvant directement le problème de la représentation conforme sur un demi-plan ou sur un cercle de l'aire extérieure à un polygone plan; il emploie pour cela une méthode qui est due à M. Christoffel (¹).

J. T.

MANSION. — Résumé du cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand. *Calcul différentiel et principes du Calcul intégral.* 1 vol. in-8°, VIII-300 p. Paris, Gauthier-Villars; 1887.

Ce qui frappe tout d'abord le lecteur qui ouvre le livre de M. Mansion, c'est l'extraordinaire concision du style : si l'on n'y faisait point attention, en voyant la mince épaisseur du Volume, on risquerait de se tromper singulièrement sur la quantité des matières qu'il contient; toutes les abréviations compatibles avec la correction du langage ont été adoptées; c'est bien à un résumé que l'on a affaire, résumé qui sera fort commode pour les étu-

(¹) *Sopra un problema proposto da Dirichlet* (*Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. IV).

diants, même pour ceux qui ne suivent pas les excellentes Leçons de M. Mansion.

Mais assurément la concision du style n'est pas la seule originalité du livre; on y trouvera une tendance, assez rare aujourd'hui, qui consiste à restreindre le concept de fonction, au lieu de le prendre dans toute sa généralité. M. Mansion entend se borner aux fonctions élémentaires définies d'une façon précise et aux fonctions que l'on peut composer en les combinant par des opérations nettement définies. C'est de ce point de vue, par exemple, qu'il démontre la règle relative à la différentiation des fonctions composées, et cette démonstration, que l'auteur signale lui-même dans sa Préface, caractérise bien l'esprit dans lequel il conçoit l'enseignement des éléments de l'Analyse. Il faut reconnaître que, en agissant ainsi, on se place sur un terrain très solide, sur lequel il est légitime de se tenir. Cela même, à notre avis, serait très désirable si l'on parvenait ainsi à se débarrasser de quelques démonstrations qui, par leur haute généralité, ont un caractère quelque peu métaphysique : par exemple, de la démonstration de ce fait qu'une fonction continue atteint sa limite supérieure. Malheureusement, la restriction apportée ainsi à la notion de fonction ne semble jeter aucune lumière spéciale sur les faits de cet ordre; on ne gagne rien, pour les aborder, aux restrictions qu'on s'est imposées, et M. Mansion, qui n'entend rien sacrifier de la rigueur, les traite, lui aussi, en laissant aux concepts toute leur généralité. Ceci n'est d'ailleurs nullement une critique : si les choses sont ainsi, ce n'est sans doute pas la faute du savant professeur à l'Université de Gand.

Si M. Mansion montre ainsi une grande prudence pour ce qui concerne la notion d'une fonction de variable réelle, il ne craint pas de considérer de très bonne heure des fonctions d'une variable imaginaire, de façon à donner de suite leur extension complète aux théorèmes qui le comportent. Cela, à la vérité, n'entraîne aucun inconvénient, quand on s'attache, comme il le fait, à bien préciser les définitions.

Voici brièvement l'ordre suivi et les matières traitées.

L'Ouvrage comprend quatre Parties et un Appendice.

L'*Introduction* contient l'exposé de la méthode des limites, la définition de l'exponentielle imaginaire, les notions les

simples relatives à la continuité. Les *principes fondamentaux de l'Analyse infinitésimale* se rapportent aux propriétés essentielles des dérivées et aux propositions élémentaires de la théorie des séries. Il y a lieu de remarquer la manière directe dont l'auteur prouve qu'une fonction dont la dérivée est constamment nulle dans un intervalle est une constante. La partie intitulée : *Calcul différentiel* contient les règles de différentiation et du changement de variables. Sous ce titre : *Propriétés des fonctions*, M. Mansion expose d'abord la série de déductions qui permettent de donner une entière rigueur à la démonstration du théorème de Rolle, que l'on doit à M. O. Bonnet; après en avoir tiré la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

il expose l'extension de cette formule au cas d'une fonction d'une variable imaginaire qu'a donnée M. Darboux. Les formules de Taylor, de Maclaurin et même de Wronski sont établies avec les formes du reste qui conviennent à de telles fonctions. Les développements classiques en séries de puissances se déduisent de la formule de Taylor sans qu'on soit obligé de se borner, comme on le fait souvent, au cas des variables réelles. Enfin, l'étude des maxima et minima termine cette dernière Partie.

Les trois premiers Chapitres de l'Appendice contiennent d'intéressants renseignements historiques et critiques sur l'origine et le développement de l'Analyse infinitésimale. D'autres Chapitres se rapportent à l'introduction des nombres irrationnels et aux principes fondamentaux de la théorie des limites, à l'existence de fonctions continues sans dérivées, et à divers développements qui n'auraient pu entrer dans le Cours proprement dit sans en déranger l'économie. J. T.

SCHLESINGER (L.). — Ueber lineare homogene Differentialgleichungen vierter Ordnung, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Inaugural-Dissertation, 43 p. in-4°. Berlin, Hermann, 1887.

L'intéressant travail de M. Schlesinger fait suite au beau Mé-

[illegible] que M. Fuchs a publié, sous un titre analogue, dans le p[illegible] [illegible] Volume des *Acta mathematica* (1).

M. Fuchs [illegible] complètement les équations différentielles [illegible] du troisième ordre, à intégrales régulières, à équatio[illegible] [illegible] admettant que des racines rationnelles, et te[illegible] [illegible] liées par une relation algébrique e[illegible] [illegible] de degré supérieur au premier.

[illegible] avec les modifications conv[illegible] [illegible] équations du quatrième ordre, appartena[illegible] [illegible] sont liées par de[illegible] [illegible] dans la variété tri[illegible] [illegible]

[illegible] cette étude et le lien [illegible] différentielles linéaires du [illegible] sont manifestes, [illegible] relations doivent [illegible] en maginant [illegible] équations [illegible] est cette [illegible] bien [illegible] géo- [illegible] différentielles li- [illegible] par une [illegible] consi- [illegible]

[illegible] est [illegible] ennie [illegible] les

(1) [illegible] VII; [illegible]

éléments y_1, y_2, y_3, y_4 d'un système fondamental d'intégrales une ou plusieurs relations algébriques entières homogènes. Ces relations, si l'on y fait toutes les substitutions possibles du groupe de l'équation différentielle linéaire, en fourniront d'autres, en nombre fini, linéairement indépendantes. Toutefois, la variété qu'elles définissent dans la variété $\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}\right)$ doit être infinie, simplement ou doublement. Cette remarque et l'application de la théorie de M. Kronecker sur les systèmes de diviseurs conduit à la conclusion suivante : partant d'une des relations

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

deux cas peuvent se présenter : ou bien toutes les substitutions du groupe de l'équation différentielle reproduisent la fonction φ multipliée par un facteur constant, ou bien il existe plusieurs relations (quatre au plus)

$$f_i(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

telles que chacune des fonctions f_i se change par les substitutions du groupe en une fonction linéaire des mêmes fonctions f_1, f_2, f_3, f_4; dans ce second cas, la nature de la variété simplement infinie que l'on a à considérer dans la variété $\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}\right)$ résulte de la seule relation dont on est parti, et du groupe de l'équation. C'est ce second cas que l'auteur étudie d'abord.

Comme l'avait fait M. Fuchs pour les équations du troisième ordre, il suppose que, à chaque valeur de la variable indépendante z, on fasse correspondre une autre valeur z_1 telle que, en choisissant convenablement les chemins d'intégration, les valeurs de $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}$ soient les mêmes en z_1 et en z : l'étude de la relation qui existe entre z et z_1 conduit M. Schlesinger à la conclusion que voici, toute semblable à celle qu'avait obtenue M. Fuchs : si les relations entre les intégrales ne sont pas de la forme

$$y_2^2 = y_1 y_3,$$
$$y_3^2 = y_2 y_4,$$

la relation entre z et z_1 est algébrique et l'équation différentielle [illegible]matrième ordre s'intègre algébriquement; dans le cas d'ex-

ception, l'équation se ramène algébriquement à une équation dont les intégrales sont les cubes des intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre, appartenant à la classe de Fuchs.

D'ailleurs, toutes les fois que la variété définie dans la variété $\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}\right)$ par les relations entre les intégrales est simplement infinie, sauf le cas d'exception qui vient d'être signalé, l'équation est toujours algébriquement intégrable. Toutefois, avant d'arriver à ce résultat, l'auteur est obligé d'approfondir la nature des équations du quatrième ordre dont les intégrales vérifient une relation algébrique homogène

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

telle que la fonction φ se reproduise, à un facteur constant près, par les substitutions du groupe de l'équation. Il retrouve en passant le résultat signalé par M. Goursat concernant les équations dont les intégrales annulent identiquement une forme quadratique à discriminant non nul, équations qui se ramènent à des équations linéaires dont les intégrales sont les produits des intégrales de deux équations différentielles linéaires du second ordre. Enfin, la dernière partie de son travail contient quelques indications sur le cas où les intégrales ne vérifient qu'une seule relation algébrique homogène; M. Schlesinger promet d'ailleurs de revenir ultérieurement sur ce sujet. J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE FORMULE D'ARITHMÉTIQUE (1);

PAR M. LERCH.

Nous allons développer une identité relative à la fonction

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{k\nu}}{(1-x^{\nu})(1-x^{a+\nu})}, \tag{1}$$

(1) Le résultat de cette Note a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 16 janvier 1888.

et nous en conclurons une formule arithmétique dans laquelle figurent les fonctions numériques $\psi(p, q)$, $\chi(p, q)$ dont la première représente le nombre des diviseurs de p supérieurs à q et la seconde le nombre de ceux qui sont inférieurs ou égaux à q, de sorte que $\psi(p, q) + \chi(p, q)$ représente le nombre total des diviseurs de p. Après avoir signalé quelques conséquences de cette formule, nous nous bornerons à établir arithmétiquement l'une d'elles et puis nous parviendrons par une analyse directe de la formule générale à sa forme la plus simple, dont nous donnerons en même temps la démonstration arithmétique.

1. Supposons que, dans la série (1), k, a sont des nombres entiers positifs dont le premier soit supérieur à l'unité. En nous servant de l'identité

$$\frac{z^k}{1-z} = \frac{z}{1-z} - \sum_{\lambda=1}^{k-1} z^\lambda,$$

nous obtiendrons la formule

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda\nu}}{1-x^{a+\nu}}, \tag{2}$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{(1-x^\nu)(1-x^{a+\nu})} = \sum_{\nu=1}^{a} \frac{x^\nu}{(1-x^a)(1-x^\nu)}. \tag{3}$$

En posant

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda\nu}}{1-x^{a+\nu}} = \sum_{n=\lambda(a+1)}^{\infty} e_{\lambda,n}\, x^{n-\lambda a}, \tag{4}$$

on voit aisément que $e_{\lambda,n}$ représente le nombre des solutions de l'équation

$$(a+\nu)(\lambda+\mu) = n, \qquad (\nu,\ \mu+1 = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Décomposons n en facteurs dd', de sorte que $n = dd'$. Puisque n est supérieur à λa, on aura nécessairement $d' > \lambda$ toutes les fois que $d \leq a$; appelons (δ) une telle décomposition $n = dd'$, où $d \leq a$, de sorte que le nombre des décompositions (δ) sera $\chi(n, a)$, en

représentant par $\chi(n, a)$ le nombre des diviseurs de n non supérieurs à a.

Ensuite, en représentant par $\psi(n, \lambda - 1)$ le nombre des diviseurs de n supérieurs à $\lambda - 1$, ce nombre sera égal au nombre des décompositions (d), telles que $n = dd'$ où $d' > \lambda - 1$. Posant enfin $a + \nu = \Delta$, $\lambda + \mu = \Delta'$, on voit que chacune des décompositions (d) est ou une décomposition (δ) ou une décomposition (Δ), et par conséquent le nombre des décompositions (Δ), c'est-à-dire $c_{\lambda,n}$, est égal à la différence entre celui des décompositions (d) et (δ), savoir

$$c_{\lambda,n} = \psi(n, \lambda - 1) - \chi(n, a). \tag{5}$$

D'ailleurs le coefficient de x^m dans le développement de la fonction $\varphi(x)$ est égal au nombre des solutions de l'équation

$$\beta\nu + \gamma a = m, \qquad (\beta, \gamma + 1 = 1, 2, 3, \ldots; \nu = 1, 2, \ldots, a), \tag{β}$$

et sera donc représenté par la somme

$$\sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \chi(m - \gamma a, a), \qquad \left[\frac{m-1}{a}\right] = \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{a}\right).$$

Alors, d'après les formules développées et d'après cette dernière remarque, le coefficient de x^m dans le développement de la fonction $\Phi(x)$ sera donné par la somme

$$\sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \chi(m - \gamma a, a) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} [\psi(m + \lambda a, \lambda - 1) - \chi(m + \lambda a, a)]. \tag{6}$$

Or, d'après la définition de la fonction $\Phi(x)$, le même coefficient sera égal au nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$k\nu + \rho\nu + \sigma(a + \nu) = m, \qquad (\nu, \rho + 1, \sigma + 1 = 1, 2, 3, \ldots),$$

ou, ce qui est la même chose, de l'équation

$$\nu(k + \rho + \sigma) = m - \sigma a, \tag{γ}$$

d'où l'on voit qu'il s'exprime par la somme

$$(7)\qquad \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \psi(m-\sigma a, k+\sigma-1).$$

En égalant les expressions (6) et (7), on obtient la relation remarquable

$$(I)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} [\psi(m-\sigma a, k+\sigma-1) - \chi(m-\sigma a, a)] \\ \displaystyle +\sum_{\lambda=1}^{k-1} [\psi(m+\lambda a, \lambda-1) - \chi(m+\lambda a, a)] = 0, \end{array} \right.$$

qui est l'objet de cette Note. On y suppose seulement que a, m sont des nombres positifs et que le nombre k est supérieur à l'unité.

En y posant $a=1$ et observant que $\chi(p, 1)=1$, on trouve la formule

$$(II)\qquad \sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi(m-\sigma, k+\sigma-1) + \sum_{\lambda=1}^{k-1} \psi(m+\lambda, \lambda-1) = k+m-1.$$

Posant, dans cette formule, $k=2$ et changeant m en $m-1$, il s'ensuit la suivante :

$$(III)\qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1} \psi(m-\alpha, \alpha) = m.$$

Cette formule est au fond équivalente au théorème suivant énoncé par M. *Catalan* (¹) :

Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$\begin{array}{c} x+2y=n-1, \\ 2x+3y=n-2, \\ 3x+4y=n-3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ nx+(n+1)y=0, \end{array}$$

est égal à n.

(¹) *Voir* une Note de M. Cesàro dans les *Mémoires de la Société des Sciences de Liége*, 2ᵉ série, t. X, p. 263.

Posant enfin, dans l'équation (II), $k = m + 2$ après y avoir changé m en $m - 1$, on obtient la formule

$$\sum_{x=0}^{m} \psi(n + x, x) = 2n, \tag{IV}$$

que nous avons déduite de la précédente (1) par des considérations purement arithmétiques, qui d'ailleurs peuvent être remplacées par une démonstration directe et simple de cette formule.

2. Bornons-nous maintenant à établir la formule (II) directement. On a évidemment

$$\psi(m - \sigma, k + \sigma - 1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[E\left(\frac{m-\sigma}{k+\sigma+\mu}\right) - E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma+\mu}\right) \right],$$

et il s'ensuit

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi(m - \sigma, k + \sigma - 1) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{m-1} \left[E\left(\frac{m-\sigma}{k+\sigma+\mu}\right) - E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma+\mu}\right) \right]. \end{aligned}$$

En isolant dans la partie négative du second membre le terme où $\mu = 0$, il vient

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{m-1} \left[E\left(\frac{m-\sigma}{k+\mu+\sigma}\right) - E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\mu+\sigma+1}\right) \right] - \sum_{\sigma=0}^{m-1} E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma}\right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} E\left(\frac{m}{k+\mu}\right) - \sum_{\sigma=0}^{m-1} E\left(\frac{m-\sigma-1}{k-\sigma}\right); \end{aligned}$$

ensuite on a

$$E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma}\right) = E\left(\frac{m+k-1}{k+\sigma}\right) - 1,$$

et l'on en déduit aisément la valeur de la somme A, savoir

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi(m - \sigma, k + \sigma - 1) = m - \sum_{\alpha=k}^{\infty} \left[E\left(\frac{m+k-1}{\alpha}\right) - E\left(\frac{m}{\alpha}\right) \right]. \tag{8}$$

(1) *Bulletin de la Société des Sciences de Bohême*, 1887.

On trouve d'une manière analogue

$$(9)\quad \sum_{\lambda=1}^{k-1}\psi(m+\lambda,\lambda-1)=k-1+\sum_{\alpha=k}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m+k-1}{\alpha}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right],$$

et, en faisant la somme des membres correspondants des équations (8) et (9), on retombe sur la formule (11) qui par là est démontrée arithmétiquement.

3. Revenons maintenant à la formule (I). En la retranchant, membre à membre, de celle qui résulte en y changeant k en $k+1$, on obtient

$$\psi(m+ka,k-1)-\chi(m+ka,a)=\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]}[\psi(m-\sigma a,k+\sigma-1)-\psi(m-\sigma a,k+\sigma)];$$

la différence entre crochets étant ou l'unité ou zéro, selon que le nombre $m-\sigma a$ est un multiple de $k+\sigma$ ou non, on la pourra remplacer par celle-ci

$$\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{k+\sigma}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m-1-\sigma a}{k+\sigma a}\right),$$

de sorte que nous aurons

$$(10)\quad \begin{cases} \psi(m+ka,\,k-1)-\chi(m+ka,\,a) \\ \quad =\displaystyle\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{k+\sigma}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m-1-\sigma a}{k+\sigma}\right)\right]; \end{cases}$$

prenant successivement, dans cette équation, $m=1, 2, 3, \ldots, n$ et faisant la somme des résultats, il s'ensuit la formule

$$(11)\quad \sum_{m=1}^{n}[\psi(m+ka,\,k-1)-\chi(m+ka,\,a)]=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n-\sigma a}{k+\sigma}\right),$$

que l'on peut considérer comme équivalente à la formule (10) et par conséquent même à la formule (I).

La formule (10) a été obtenue sous la condition $k>2$; nous allons montrer qu'elle subsiste encore pour $k=1$.

Posant enfin, dans l'équation (II), $k = m +$ [illegible] changé m en $m - 1$, on obtient la formule

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\alpha=0}^{n} \psi(n+\alpha, \alpha) = 2n,$$

que nous avons déduite de la précédente (1) par de[s] purement arithmétiques, qui d'ailleurs peuvent [être] par une démonstration directe et simple de cette [formule].

2. Bornons-nous maintenant à établir la form[ule] ment. On a évidemment

$$\psi(m-\sigma, k+\sigma-1) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma}{k+\sigma+\mu}\right) - \mathrm{E}\left(\right.\right.$$

et il s'ensuit

$$\mathrm{A} = \sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi(m-\sigma, k+\sigma-1)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{m-1}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma}{k+\sigma+\mu}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma}{k+\sigma}\right.\right.$$

En isolant dans la partie négative du second [membre] où $\mu = 0$, il vient

$$\mathrm{A} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{m-1}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma}{k+\mu+\sigma}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\mu+\sigma+1}\right)\right] -$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{m}{k+\mu}\right) - \sum_{\sigma=0}^{m-1}\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma-1}{k-\sigma}\right);$$

ensuite on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{m+k-1}{k+\sigma}\right) -$$

et l'on en déduit aisément la valeur de la somme

$$\text{(8)} \qquad \sum_{\sigma=0}^{m-1}\psi(m-\sigma, k+\sigma-1) = m - \sum_{\alpha=k}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m+k-1}{\alpha}\right.\right.$$

(1) *Bulletin de la Société des Sciences de Bohême*, 1887.

$$-\left[\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right)\right],$$

$$\frac{-ka}{\sigma}\Big)$$

$$\left(\frac{ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right),$$

e équivalente à l'équation (1).

$$\frac{-\sigma a}{+\sigma}\Big)+a,$$

onséquent, en posant pour

$+1$,

$$=\sum_{\sigma=k}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right),$$

$$-(\rho-1)\mathrm{E}\left(\frac{r}{\rho}\right),$$

$$-(k-1)a.$$

géométrique, cette équation

$$\left(\frac{n}{a}\right)\Big]\Big[a-\mathrm{E}\left(\frac{r}{\rho}\right)\Big],$$

Rappelons-nous à cet effet l'identité

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{k+\sigma}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{m}{k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) + \sum_{\rho=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m-\rho k}{a+\rho}\right),$$

qu'on obtient en exprimant de deux manières le nombre des points à coordonnées entières dans l'aire limitée par les axes des coordonnées et par l'hyperbole

$$y = \frac{m-ax}{k+x}.$$

D'après cette identité, la formule (10) se transforme en la suivante

$$(10\,bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \psi(m+ka,\, k-1) - \chi(m+ka,\, a) \\ \quad = \mathrm{E}\left(\frac{m}{k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{k}\right) - \left[\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{a}\right)\right] \\ \quad + \sum_{\rho=0}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\rho k}{a+\rho}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1-\rho k}{a+\rho}\right)\right]. \end{array}\right.$$

En y posant $a = 1$ et écrivant a au lieu de k, il en résulte

$$\psi(m+a,\, a-1) = \mathrm{E}\left(\frac{m}{k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{k}\right) + \sum_{\sigma=0}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\sigma+1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1-\sigma a}{\sigma+1}\right)\right];$$

on a ensuite évidemment

$$\psi(m+a,\, a-1) = \mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{a}\right) + \psi(m+a,\, a),$$

de sorte que l'équation précédente deviendra

$$\psi(m+a,\, a) = \sum_{\sigma=0}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\sigma+1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1-\sigma a}{\sigma+1}\right)\right].$$

Le second membre de cette équation coïncide avec celui de l'équation (10) en y supposant $k = 1$; on voit aussi aisément qu'il en est de même des premiers membres de ces équations, puisque

$$\psi(m+a,\, 0) - \chi(m+a,\, a) = \psi(m+a,\, a),$$

et il s'ensuit que l'équation (10) est exacte encore pour $k = 1$. La même chose devra avoir lieu de l'équation (11).

En comparant la formule

$$\sum_{m=1}^{n}[\psi(m+ka,k-1)-\chi(m+ka,a)]$$
$$=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{\sigma}\right)-\left[\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right)\right],$$

avec l'équation (11) on obtient

$$(11\ bis)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{\sigma}\right) \\ \quad=\displaystyle\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n-\sigma a}{k+\sigma}\right)+\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right), \end{cases}$$

formule qu'on peut considérer comme équivalente à l'équation (1). Or on a, pour $\sigma\leq\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)$,

$$\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{k+\sigma}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{n-\sigma a}{k+\sigma}\right)+a,$$

et l'équation (11) deviendra, par conséquent, en posant pour abréger $r=n+ka$, $\rho=\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)+k+1$,

$$\sum_{\sigma=\rho}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{r}{\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{r}{\sigma}\right)+a+a\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)=\sum_{\sigma=k}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right),$$

et en faisant usage des équations

$$\sum_{\sigma=\rho}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{r}{\sigma}\right)=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{\rho}\right]}\mathrm{E}\left(\frac{r}{\nu}\right)-(\rho-1)\mathrm{E}\left(\frac{r}{\rho}\right),$$
$$\sum_{\sigma=k}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right)=\sum_{\nu=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{k\nu}{\nu}\right)-(k-1)a,$$

que l'on obtient par une considération géométrique, cette équation s'écrira comme il suit

$$(12)\qquad \sum_{\nu=\left[\frac{r}{\rho}\right]+1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{\nu}\right)=\left[k+\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)\right]\left[a-\mathrm{E}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right],$$

où l'on a posé

$$r = n + ka, \qquad \rho = \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) + k + 1.$$

Cette formule remplace entièrement l'équation (11) et, si l'on en connaissait une démonstration arithmétique, ce serait en même temps une démonstration de la formule (I). Or c'est ce qu'on trouve sans aucune difficulté.

En effet, nous aurons

$$\mathrm{E}\left(\frac{r}{\left[\frac{r}{\rho}\right]+1}\right) \geqq \mathrm{E}\left(\frac{r}{\nu}\right) \geqq \mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{a}\right),$$

pour ν entre les limites

$$\left(\left[\frac{r}{\rho}\right]+1, \ldots, a\right).$$

Cela étant, l'inégalité

$$\mathrm{E}\left(\frac{r}{\left[\frac{r}{\rho}\right]+1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{a}\right) < \frac{r}{\frac{r}{\rho}} - k - \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) = 1$$

fait voir que l'on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{r}{\left[\frac{r}{\rho}\right]+1}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{r}{\nu}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{r}{a}\right) = k + \left[\frac{n}{a}\right],$$

et il s'ensuit que la formule (12) est vérifiée.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHWARZ. — Ueber specielle zweifach Zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzeten Flächenstücke. 48 p. in-4°. Gœttingue; 1887 (1).

Considérons deux polygones réguliers égaux de n côtés, situés dans deux plans parallèles, et disposés de façon que les droites qui joignent les sommets correspondants des deux polygones soient perpendiculaires à ces plans; M. Schwarz s'occupe de la surface minima M′ qui est limitée par les deux polygones et qui admet pour plans de symétrie les $n+1$ plans de symétrie de la figure formée par les deux polygones.

Soient

$2H$ la distance des plans des deux polygones;
L le rayon du cercle inscrit;
2α l'angle au centre.

On peut se demander entre quelles limites peut varier le rapport $\frac{H}{L}$ et combien de surfaces M′ correspondent à des valeurs données des quantités α, L, H; telles sont les deux questions qui sont l'objet essentiel du travail de M. Schwarz. Goldschmidt et, après lui, M. Lindelöf (2) ont traité le problème analogue dans lequel les deux polygones sont remplacés par des cercles. Dans la Notice historique qu'il a mise en tête de son Mémoire, M. Schwarz rend un éclatant hommage aux recherches de ce dernier. Il s'était lui-même déjà occupé du cas où n est égal à trois ou à quatre (3). Le premier membre de l'équation de la surface minima s'exprime alors rationnellement au moyen des fonctions elliptiques des coordonnées.

Supposons, dans le cas général, que l'axe des z soit placé

(1) Extrait du t. XXXIV des *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften* de Gœttingue.
(2) *Calcul des variations*, p. 206.
(3) *Bestimmung einer speciellen Minimalfläches*; Berlin, 1871.

suivant la droite qui joint les centres des polygones et que les autres axes soient disposés de façon que les plans des deux polygones aient pour équations

$$z = \mathrm{H}, \qquad z = -\mathrm{H},$$

et que les coordonnées du milieu de l'un des côtés de l'un des polygones soient

$$x = \mathrm{L}, \qquad y = 0, \qquad z = \mathrm{H}.$$

L'ensemble des points de la surface M′ dont les coordonnées vérifient les conditions

$$0 \leqq y \leqq x \operatorname{tang} \alpha, \quad 0 \leqq z \leqq \mathrm{H},$$

constitue une portion de surface M, simplement connexe, qu'il suffit évidemment de connaître pour connaître entièrement la surface M′. Soit

$$s = re^{\varphi i}$$

une variable imaginaire; considérons l'ensemble des valeurs de cette variable définies par les égalités

$$0 \leqq r \leqq 1, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \alpha,$$

ces valeurs seront représentées par des points qui appartiennent à un secteur circulaire. M. Schwarz établit d'abord que les coordonnées x, y, z des points de M seront les parties réelles des quantités U, V, W définies par les égalités suivantes

$$\mathrm{U} = \mathrm{L} - \int_0^s \frac{(s^{-1} - s)\, d\log s}{\sqrt{\mathrm{R}^{-n} + \mathrm{R}^n - s^{-n} - s^n}},$$

$$\mathrm{V} = \int_{\mathrm{R}}^s \frac{-i(s^{-1} + s)\, d\log s}{\sqrt{\mathrm{R}^{-n} + \mathrm{R}^n - s^{-n} - s^n}},$$

$$\mathrm{W} = \int_1^s \frac{-2\, d\log s}{\sqrt{\mathrm{R}^{-n} + \mathrm{R}^n - s^{-n} - s^n}};$$

R est un paramètre réel compris entre zéro et un, et qui est lié aux données par les équations

$$\mathrm{L} = \cot \alpha \int_0^{\mathrm{R}} \frac{(r^{-1} + r)\, d\log r}{\sqrt{r^{-n} + r^n - \mathrm{R}^{-n} - \mathrm{R}^n}};$$

$$\mathrm{H} = \int_0^1 \frac{2\, d\log r}{\sqrt{\mathrm{R}^{-n} + \mathrm{R}^n - r^{-n} - r^n}} = \int_0^1 \frac{2\, d\log r}{\sqrt{\mathrm{R}^{-n} + \mathrm{R}^n + r^{-n} - r^n}};$$

dans ces dernières formules, le radical doit être pris avec sa valeur arithmétique. Le point de M qui correspond à la valeur $s = R$ est le point qui a pour coordonnées $x = L$, $y = o$, $z = H$.

En étendant le champ de la variable imaginaire s à toutes les valeurs pour lesquelles la fonction

$$(R^{-n} - s^{-n})(1 - R^n s^n) = R^{-n} + R^n - s^{-n} - s^n,$$

n'est pas négative, les parties réelles de U, V, W donneront les coordonnées de tous les points de M'. Ce nouveau champ S' peut être représenté géométriquement par une certaine surface de Riemann, doublement connexe; si l'on suppose que le point qui représente la variable s se déplace sur cette surface, sans en franchir la limite, puis que l'on prenne pour le radical qui figure dans U, V, W sa détermination principale, à chaque point intérieur à S' correspondra un point unique de M'.

L'intersection de la surface M' et du plan des xy est une courbe à laquelle on peut donner le nom d'*équateur* de la surface M'. Cette courbe admet évidemment n axes de symétrie, qui sont les traces, sur le plan des xy, des plans de symétrie de la surface M', autres que le plan des xy; dans ce dernier plan, par exemple, les équations

$$y = o, \qquad x \sin\alpha - y \cos\alpha = o$$

représenteront deux de ces axes, passant par les points b et c qui limitent l'arc de l'équateur situé sur la portion de surface M définie plus haut. Si l'on désigne par R' et R'' les distances de ces points à l'origine, les quantités R', R'' s'exprimeront au moyen du paramètre R par des intégrales définies; on arrive à montrer que l'équateur est une courbe simple, fermée, *entièrement convexe*, et que le rayon vecteur, lorsque son extrémité parcourt l'arc bc, va en croissant depuis R' jusqu'à R''; enfin l'étude des expressions de ces dernières quantités au moyen de R permet d'arriver à cette conclusion : lorsque R va en croissant de zéro à un, les quantités

$$\frac{R'}{L}, \quad \frac{R'' \sin\alpha}{L}$$

vont aussi en croissant de zéro à un.

M. Schwarz étudie aussi comment se déforme l'équateur, lorsque l'on fait varier R; supposons que l'on prenne L = 1, et

désignons par $\mathfrak{M}'(R_1)$ celle des surfaces qui correspond à la valeur R_1 du paramètre; si l'on a

$$0 < R_1 < R_2 < 1,$$

l'équateur de la surface $\mathfrak{M}'(R_2)$ enveloppera entièrement l'équateur de la surface $\mathfrak{M}'(R_1)$, et si l'on fait augmenter R d'une façon continue de zéro à un, l'équateur, qui se réduit d'abord à l'origine, va en grandissant de manière à recouvrir entièrement et une seule fois la surface d'un polygone régulier de n côtés circonscrit au cercle de rayon un qui a l'origine pour centre. Ce polygone est lui-même l'équateur de la surface prismatique qui correspond au cas limite $R = 1$.

Le rapport $\frac{H}{L}$ est une fonction du paramètre R qui est infiniment petite pour les valeurs de R appartenant à l'intervalle (0, 1) et infiniment voisines des limites; il existe une valeur unique R_0 qui annule la dérivée par rapport à R du rapport $\frac{H}{L}$; cette dérivée est positive dans l'intervalle $(0, R_0)$, négative dans l'intervalle $(R_0, 1)$. Chaque surface M' qui correspond à une valeur de R comprise entre R_0 et un a une aire plus petite que les surfaces voisines limitées au même contour; il en est autrement quand R est compris entre zéro et R_0.

C'est en appliquant les méthodes qu'il a exposées dans son Mémoire *Ueber ein Flächen kleinsten Flächeninhaltes betreffendes Problem der Variationsrechnung,* que M. Schwarz parvient à ces résultats.

Il termine ses recherches en supposant n infini, et les relie ainsi à celles de M. Lindelöf sur la caténoïde. J. T.

Dr A. SEYDLER. — ZAKLADOVÉ THEORETICKÉ FYSIKY; DIL DRUHY. THEORIE POTENCIALU. V. Praze. Nakladem Fr. Borového, 1885 (1).

Ce Volume constitue le tome II de la *Physique théorique* publiée

(1) *Éléments de la Physique théorique,* tome II. *Théorie du potentiel;* Prague, éditeur Fr. Borovy, 1885.

en langue tchèque, par le professeur A. Seydler, à Prague. Le contenu du Tome I, consacré à la Mécanique générale, a été analysé par l'auteur même dans ce Recueil, t. V_1, p. 185.

Le Tome présent contient dans six Livres la théorie générale du potentiel, son application à la gravitation, au magnétisme, à l'électrostatique et à l'électrocinématique (courants électriques stationnaires); le dernier Livre enfin contient la théorie de l'électrodynamique et de l'induction.

L'auteur a été forcé, par des circonstances particulières et qu'il serait inutile d'énumérer ici, de rassembler des matériaux si considérables dans un seul Volume, d'une étendue assez restreinte, ce qui constitue déjà une tâche assez ardue.

Il y avait cependant des difficultés d'une autre nature à surmonter, et qui tiennent au sujet même, notamment à l'état actuel peu fini de la théorie de l'électricité.

Il est certain, par suite des expériences récentes, que l'on doit rejeter l'ancienne hypothèse des fluides électriques, quels que soient d'ailleurs les services rendus par cette hypothèse quand il s'est agi de soumettre au calcul les faits constatés par l'expérience, ou lorsqu'on a à introduire le commençant dans cette branche de la Science. Il n'y a plus de doute que le milieu isolant ne prenne sa part dans la réalisation des forces agissant à distance : pour le reconnaître, il suffit de rappeler les investigations de Cavendish et de Faraday sur l'induction spécifique des isolateurs, la récente vérification expérimentale de plusieurs postulats formulés par Maxwell dans son développement de la théorie de Faraday, notamment la démonstration de la réfraction des lignes de force aux limites de deux milieux diélectriques, l'existence effective de la pression transversale des lignes de force électrostatiques, enfin les expériences relatives au changement de volume des milieux diélectriques dans le champ électrique.

D'après Faraday-Maxwell, on se figure cette participation de l'isolateur comme une sorte de polarisation moléculaire, comme une perturbation diélectrique d'élasticité. Cette hypothèse cependant ne suffit nullement pour expliquer, par exemple, les phénomènes qui se rattachent à la différence des espèces électriques (les figures de Lichtenberg, les phénomènes de la décharge, etc.).

Un second point difficile, c'est l'électrodynamique. Ampère, en

se basant sur des déductions ingénieuses, généralisées plus tard par Stefan (et Maxwell), a donné des formules relatives aux effets pondérométriques des courants non fermés ou fermés, formules qui, du moins quant au dernier cas, constituant une partie acquise définitivement à la Science.

L'introduction du potentiel électrodynamique par Neumann, de même que l'application du principe de l'énergie à l'électrodynamique par Helmholtz, sont des phases ultérieures dans le développement de l'électrodynamique théorique. La conception de Faraday, opérant avec des lignes de force, n'est autre chose qu'une nouvelle expression des formules déjà connues, déchiffrée par Maxwell.

Quant aux effets exercés par des éléments de courant les uns sur les autres, si toutefois on concède l'existence réelle de tels effets, il y a là une lacune qu'on s'est efforcé de combler par diverses lois élémentaires. Cependant il semble que c'est l'hypothèse de Maxwell sur la continuation des courants dans les milieux diélectriques ou, plus brièvement, que c'est la négation des courants non fermés qui s'accorde le mieux avec les faits. Pour cela on peut alléguer des raisons théoriques d'un grand poids logique, et, dans le dernier temps, M. H. Hertz (*Berl. Ber.*, novembre 1887) est parvenu à influencer des vibrations électriques d'une nature spéciale, fait qu'on ne peut guère expliquer que par l'effet inducteur direct des courants polarisés diélectriques.

M. Seydler donne dans son Livre, toujours en ayant égard au développement historique, un exposé clair de l'état actuel de ces branches de la Science et des branches connexes. Aucune question, d'une portée essentielle rentrant dans son cadre, n'a été émise, et dans tout le Livre on remarque spécialement le soin de l'auteur à développer les notions fondamentales non seulement d'une manière facilement abordable, mais aussi à les approfondir philosophiquement.

Les applications de la théorie y concernent d'ordinaire des cas simples, ce qui permet le mieux d'élucider la théorie. Dans tous les cas, ces applications suffisent non seulement aux besoins de la pratique, mais aussi pour préparer à l'étude des écrits plus difficiles. Quant aux problèmes dont la solution comporte des difficultés d'une nature formelle, on ne les a qu'esquissés.

C'est, sans aucun doute, par les paroles de ceux qui ont aidé à édifier une discipline, qu'on en peut le mieux caractériser l'esprit; c'est donc à juste raison que l'auteur a incorporé à son Livre des citations puisées dans les écrits de Green, Copernic, Ampère, Ohm, et notamment dans ceux de Faraday et de Maxwell. Outre cela, chaque Section contient des renseignements bibliographiques. L'exposé des matières contenues dans le Livre donné ci-dessous en donnera une idée assez nette.

En terminant, je n'ai qu'à exprimer le vœu de voir bientôt paraître le tome III et dernier, car il est sûr que cet excellent Livre rendra des services considérables à la propagation de la Science parmi ceux auxquels l'auteur s'adresse.

Table des matières.

Livre I. — Notion et propriétés de la fonction potentielle des agents disposés dans l'espace. L'équation de Laplace-Poisson, déduite du théorème de Gauss, de même que de celui de Green; analyse due à Dirichlet des conditions nécessaires et suffisantes pour l'établissement de la fonction potentielle; attraction des sphères et des ellipsoïdes, vérification *a posteriori* de la formule relative au dernier problème. Énergie potentielle d'un système de masses discrètes dans l'espace agissant les unes sur les autres suivant la loi de Newton, application au Soleil, propriétés de la fonction potentielle des masses étendues sur des surfaces, évaluation de l'effet pondérométrique sur l'élément d'une surface chargée de masse, fonction potentielle des charges doubles (*Doppelbelege*), la fonction de Green et démonstration de son existence à l'aide du principe de Dirichlet, les fonctions sphériques, leurs propriétés, développement d'une fonction à deux arguments suivant des fonctions sphériques, application à une demi-sphère chargée uniformément de masse.

Livre II. — Le principe de la gravitation, les dimensions d'après les notations de Maxwell, distribution de la pesanteur sur la surface de la Terre, formule de Clairaut, indication sur la solution de Jacobi du problème de la forme de la surface de la Terre, formule de Legendre sur l'accroissement de la densité à l'intérieur de la

Terre, valeur de la constante dite de gravitation, la correction de Newton à la troisième loi de Kepler, détermination de la masse centrale d'après la durée de la révolution et de la distance d'une planète, les équations différentielles du mouvement d'un système de masses, indication du problème des trois corps, les perturbations, stabilité du système solaire, la précession et la nutation, les saisons, exposé des expériences de Physique qui se rapportent au principe de la gravitation.

Livre III. — Corps magnétiques et diamagnétiques, réduction de la fonction potentielle d'éléments de masse polarisés à la fonction potentielle de masses disposées dans l'espace et sur des surfaces, leur énergie potentielle, mode d'action des aimants linéaires, l'hypothèse de Poisson sous la forme plus simple de Neumann, les vues de Faraday, conditions aux limites, critique de Maxwell de l'hypothèse de Poisson, l'hypothèse de Weber, induction magnétique dans une sphère, puis dans un ellipsoïde, le champ de force étant homogène, théorie du magnétisme terrestre, d'après Gauss.

Livre IV. *Section I.* — L'hypothèse des fluides, les opinions de Faraday et de Maxwell, lignes de force, énergie potentielle (le potentiel), l'équilibre sur des conducteurs, déduction de la loi de Coulomb d'après la méthode de Cavendish, généralisée par Maxwell, distribution de l'électricité sur une sphère conductrice, sur un ellipsoïde, sur un disque circulaire, diagrammes sur la marche de la fonction potentielle et des lignes de force, équations générales pour l'équilibre d'un système de conducteurs chargés, leur énergie potentielle exprimée sous forme d'intégrales étendues sur des surfaces ou sur des volumes, distribution de la fonction potentielle entre deux plans parallèles, entre deux sphères concentriques et entre deux cylindres à même axe, notion de la capacité, théorie des images électriques de Thomson, aperçu sur le problème d'un condensateur composé de deux sphères conductrices.

Section II. — L'interprétation de Maxwell des phénomènes électrostatiques avec l'interprétation d'après l'ancienne hypothèse des fluides, déplacements diélectriques dans des corps isotropes et anisotropes, généralisation de la formule de Poisson, réfr[illegible]

des lignes de force, application des formules à un système de calottes sphériques à constantes diélectriques différentes, indication de l'hypothèse si répandue, et faite en vue de la théorie de Poisson, sur la composition d'un milieu diélectrique à l'aide de molécules polarisables disposées dans l'éther isolateur, les sources de l'énergie électrostatique, la théorie de Volta, les idées de Helmholtz sur l'électricité de contact, les machines électriques, les instruments de mesure, enfin les anomalies électriques provenant des différentes espèces d'électricité.

Livre V. *Section I.* — Conditions pour qu'un courant s'établisse, résistance, la loi de Ohm pour des conducteurs linéaires, les équations de Kirchhoff, le pont de Wheatstone, courants dans des conducteurs à deux dimensions, le plan à l'infini avec un nombre quelconque d'électrodes, courants dans l'espace, notamment dans le cas où il y a un nombre quelconque d'électrodes sphériques dans un conducteur infini, le conducteur limité par un plan et application de la méthode des images, mouvement de l'électricité dans un mauvais conducteur, les phénomènes du résidu électrique, les équations du mouvement de l'électricité dans un câble, explications sur la notion de la vitesse de l'électricité.

Section II. — Les phénomènes calorifiques dans le circuit, arc de décharge d'un condensateur, la loi de Joule, la propriété de minimum de la chaleur de Joule, l'énergie chimique et les lois de l'électrolyse, les courants thermo-électriques, le phénomène de Peltier, de Cumming, la formule d'Avenarius (Tait), les dimensions des quantités électriques principales dans la mesure électrostatique absolue, la méthode de mesure de Ohm, de la résistance et de la force électromotrice.

Livre VI. *Section I.* — Développement de l'idée fondamentale de l'électrodynamique d'Ampère, indication de la généralisation de Stefan, de même que des formules de Grassmann et de Clausius, équivalence de l'effet magnétique d'un courant fermé et de celui d'une surface magnétique transversale, le potentiel électrodynamique, effet exercé sur un pôle magnétique par un courant

fermé, la mesure électromagnétique absolue de l'intensité d'un courant, marche des lignes de force magnétiques dans le voisinage d'un fil traversé par un courant, la manière de Faraday d'exprimer les effets de nature électromagnétique, relations entre les deux systèmes de mesures électriques absolues, théorie abrégée des boussoles de courant, de l'électrodynamomètre, rotation des courants autour des aimants.

Section II. — Faits principaux de l'induction, la formule de Neumann, la manière de s'exprimer de Faraday, déduction des phénomènes d'induction du principe de l'énergie, marche du courant secondaire (*Extractrom*), magnétisme rotatoire, principe des appareils d'induction.

Section III. — Considérations sur les théories d'Ampère, de Weber, de Clausius, de Maxwell et de Riemann, indications sur la théorie électromagnétique de la lumière.

Dr F. Kolacek.

MÉLANGES.

RECHERCHE DE SURFACES ANALLAGMATIQUES PAR RAPPORT A UNE INFINITÉ DE POLES D'INVERSION;

Par M. J. HADAMARD.

Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série, t. II, 1883), M. Fouret a démontré qu'il n'existe pas de courbe plane C transformable en elle-même par une infinité d'inversions dont les pôles soient tous les points d'une courbe Γ. La remarque fondamentale dont il part est que, si une pareille courbe C existait, à tout point déterminé a de la courbe on pourrait faire correspondre, par les différentes inversions dont il s'agit, tous les autres points.

En se fondant sur la même remarque, on peut démontrer le théorème de la façon suivante :

D'après une propriété bien connue de l'inversion, en chaque

point m de la courbe C passera un cercle tangent à la courbe aux deux points m et a; de sorte que la courbe sera enveloppée par une série de cercles tangents entre eux.

Il est déjà presque évident qu'une pareille courbe ne peut être qu'un cercle. Mais on peut ramener ce fait à un autre bien connu en transformant la figure par une inversion dont le pôle soit en a. On obtient alors une ligne dont toutes les tangentes sont parallèles et qui se réduit dès lors à une droite.

Cette méthode géométrique équivaut, au fond, à la méthode analytique suivie par M. Fouret. Mais elle a l'avantage de s'appliquer à la recherche des surfaces anallagmatiques par rapport à tous les points d'une courbe.

Si l'on considère en effet une pareille surface, à tout point déterminé a de cette surface correspondront par les différentes inversions une série de points m qui traceront sur la surface une certaine ligne λ. En chacun de ces points passera une sphère S tangente à la surface en m et en a. Si l'on transforme la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le point a pour pôle, toutes les sphères S deviendront des plans parallèles à un plan fixe P; la ligne inverse de λ aura donc toutes ses tangentes parallèles au plan P et sera par suite entièrement contenue dans un seul plan parallèle à P. On voit donc que la sphère S sera la même pour tous les points de la ligne λ.

Il devra exister au moins une simple infinité de sphères S, puisqu'il en passe une par chaque point de la surface; et chacune de ces sphères devra couper orthogonalement chacune des sphères d'inversion T, lesquelles sont aussi en nombre simplement infini. Le centre de toute sphère S devra par suite être situé dans le plan radical de deux quelconques des sphères T. Si ces dernières n'ont point même plan radical, ce seront les sphères S qui jouiront de cette propriété.

Or cette dernière hypothèse n'est pas admissible; car, en prenant pour pôle d'inversion un point commun à toutes les sphères S, on transformerait la surface proposée en une autre qui serait touchée suivant une ligne par tous les plans qui passent par une même droite située à distance finie ou non.

Il faut donc que les sphères T aient même plan radical. En général, elles passeront par un cercle fixe qui sera coupé orthogona-

lement par toutes les sphères S. Si l'on prend pour pôle de transformation un point de ce cercle, les sphères S auront pour inverses des sphères ayant leurs centres en ligne droite et la surface considérée deviendra une surface de révolution.

On pourrait aussi prendre comme pôle un point limite des sphères T, point par lequel toutes les sphères S doivent passer. Par cette méthode on transformerait la surface donnée en un cône.

Il existe un cas limite où les sphères T sont toutes tangentes entre elles et se transforment par inversion en une série de plans parallèles. Les surfaces correspondantes sont les inverses de cylindres.

Il y a une surface de révolution qui jouit de la propriété dont nous parlons, à savoir le tore qui est anallagmatique par rapport à tous les points de son axe. C'est du reste, d'après ce que nous avons vu, la seule surface de révolution possédant cette particularité. C'est donc la seule surface de révolution que l'on puisse transformer par inversion en une surface de révolution, sans prendre pour pôle un point de l'axe. En particulier, la surface obtenue par cette transformation devra être un second tore. C'est un résultat que la théorie des cyclides pouvait faire prévoir et que des considérations élémentaires permettent de vérifier.

Les raisonnements précédents montrent en effet qu'il faut prendre pour pôle un point du cercle situé dans le plan du parallèle moyen et qui coupe à angle droit toutes les sphères ayant pour grands cercles les différents méridiens. De plus, les méridiens de l'une des surfaces donnent les parallèles de l'autre, et réciproquement.

On voit aisément que, si l'on prend le pôle comme nous venons de le dire, les méridiens du tore donné auront pour inverses des cercles dont les plans seront parallèles et les centres sur une même droite perpendiculaire à leurs plans. Ces cercles rencontreront d'ailleurs un cercle fixe situé dans un même plan avec le nouvel axe. On reconnaît aussi facilement les relations entre les deux surfaces. En particulier, si l'on prend dans chaque tore l'angle formé avec l'axe par les plans bitangents, on obtient deux angles complémentaires.

Il est facile de voir quand une surface pourra être anallagma-

tique par rapport à tous les points de plusieurs droites; car alors la surface de révolution transformée pourra être considérée comme l'enveloppe d'une série de sphères S coupant orthogonalement toutes les sphères T qui ont même plan radical. Il se peut que ces dernières soient concentriques, et alors la surface de révolution sera un cône. Sinon cette surface sera anallagmatique par rapport à tous leurs centres, qui devront par suite être situés sur l'axe; ce sera donc un tore. Dans les deux cas la surface primitive sera la cyclide de Dupin, laquelle est en effet anallagmatique par rapport à tous les points de deux droites rectangulaires, ainsi que le montre M. Fouret dans un article inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Enfin des considérations analogues aux précédentes permettent de voir que la proposition de M. Fouret relative aux courbes planes (à savoir qu'elles ne peuvent pas admettre pour pôles d'inversion les points d'une ligne) s'étend aux courbes de l'espace.

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. MATHIAS LERCH.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.)

En partant de votre formule, $\sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x+\frac{\alpha}{n}\right) = \mathrm{E}(nx)$, et prenant $x=\frac{m}{n}$, où m est entier, j'en déduis l'équation

$$\sum_{a=1}^{a}\sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(\frac{m+\alpha}{n}\right) = ma. \tag{1}$$

dont je vais transformer le premier membre. Celui-ci étant égal à la somme

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1}\sum_{a=\alpha+1}^{a} \mathrm{E}\left(\frac{m+\alpha}{n}\right),$$

et la somme $\sum_{n=\alpha+1}^{a} \mathrm{E}\left(\frac{m+\alpha}{n}\right)$ pouvant s'exprimer par la suivante

$$\sum_{k=1}^{m} [\psi(k+\alpha, \alpha) - \psi(k+\alpha, a)],$$

dans laquelle $\psi(p, q)$ représente comme dans ma Note antérieure le nombre des diviseurs de p supérieurs à q, l'équation (1) deviendra

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} \sum_{k=1}^{m} [\psi(k+\alpha, \alpha) - \psi(k+\alpha, a)] = ma,$$

et l'on en déduit la suivante

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m+\alpha, \alpha) - \psi(m+\alpha, a)] = a,$$

qui exprime une nouvelle propriété de la fonction numérique $\psi(p, q)$.

Je vais généraliser cette formule en cherchant la valeur de la somme

$$S_m = \sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m+\alpha n, \alpha) - \psi(m+\alpha n, a)].$$

Je remarque d'abord que la somme

$$S'_m = \sum_{\alpha=0}^{a-1} \psi(m+\alpha n, \alpha)$$

représente le nombre des solutions de l'équation

$$m+\alpha n = (\alpha+\sigma)\rho, \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, a-1 \\ \sigma, \rho = 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{pmatrix}$$

et qu'elle est donc égale au coefficient de x^m dans le développement de la fonction

$$f(x) = \sum_{\alpha, \rho, \sigma} x^{(\alpha+\sigma)\rho-\alpha n} = \sum_{\alpha, \sigma} \frac{x^{\alpha+\sigma-\alpha n}}{1-x^{\alpha+\sigma}},$$

qui peut se mettre sous la forme

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{a}\sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\frac{x^{\nu-\alpha n}}{1-x^{\nu}}+\sum_{\nu=a+1}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{a-1}\frac{x^{\nu-\alpha n}}{1-x^{\nu}}.$$

Ensuite, la somme

$$S''_m=\sum_{\alpha=0}^{a-1}\psi(m+\alpha n,\,a)$$

s'obtient comme le coefficient de x^m dans le développement de la fonction

$$g(x)=\sum_{\alpha,\sigma}\frac{x^{\alpha+\sigma-\alpha n}}{1-x^{\alpha+\sigma}},\qquad \begin{pmatrix}\alpha=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,a-1\\ \sigma=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,\infty\end{pmatrix}$$

d'où il est facile d'observer que la somme $S_m=S'_m-S''_m$ équivaut au coefficient de x^m dans le développement de la fonction rationnelle

$$h(x)=f(x)-g(x)=\sum_{\nu=1}^{a}\sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\frac{x^{\nu-\alpha n}}{1-x^{\nu}},$$

qui s'exprime plus simplement par la somme

$$h(x)=\sum_{\nu=1}^{a}x^{n+\nu-n\nu}\frac{1-x^{n\nu}}{(1-x^{n})(1-x^{\nu})}. \tag{3}$$

Cela étant, la somme S_m pourra s'exprimer par l'intégrale définie

$$S_m=\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}h(x)x^{-m-1}\,dx \tag{4}$$

prise le long d'un petit cercle autour de l'origine. Or, en supposant m positif et en représentant par $\Im$ le plus grand commun diviseur des nombres ν, n, on voit que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}x^{n-m+\nu-n\nu-1}\frac{1-x^{n\nu}}{(1-x^{n})(1-x^{\nu})}\,dx$$

s'exprime par la somme $\sum_{k=0}^{\omega-1}e^{\frac{2km\pi i}{\omega}}$, de sorte qu'elle est égale à $\Im$

ou à zéro, selon que le nombre m admet ou n'admet pas 3 comme diviseur. Donc, en représentant par $(\nu, n \mid m)$ ou le plus grand commun diviseur des nombres ν, n ou zéro, selon que ce plus grand commun diviseur est en même temps un diviseur de m ou non, et en posant, pour abréger,

$$\varphi(a, n \mid m) = \sum_{\nu=1}^{a} (\nu, n \mid m), \tag{5*}$$

j'aurai la formule

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, a)] = \varphi(a, n \mid m). \tag{5}$$

Vous avez déjà observé que la fonction numérique $\varphi(a, n \mid m)$ ne change pas quand on y remplace le nombre m par un autre qui lui est congru selon le module n, et qu'en supposant le nombre m premier avec n cette fonction ne dépend point de m, en exprimant le nombre des termes de la série $1, 2, 3, \ldots, a$ qui sont premiers avec n; donc, en désignant par $\varphi(a, n)$ ce nombre et en supposant que m soit premier avec n, j'aurai la formule

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, a)] = \varphi(a, n). \tag{6}$$

Or, en prenant $a = n$ ou $n - 1$, la fonction $\varphi(a, n)$ se réduit à la fonction numérique $\varphi(n)$ d'Euler et de Gauss, de sorte qu'on aura, m étant toujours supposé premier avec n, les deux formules

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, n)] = \varphi(n), \tag{7}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n-2} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, n-1)] = \varphi(n). \tag{7 bis}$$

Donc nous y possédons une expression remarquable de la fonction d'Euler par la fonction $\psi(p, q)$, et, d'un autre côté, la formule (5) permet d'en obtenir une expression sous la forme d'une intégrale définie.

Posant d'ailleurs $m = 1$ et représentant par (ν, n) le plus grand

commun diviseur des nombres ν, n, l'équation (5) nous donne la formule

$$(8)\qquad \sum_{\alpha=k}^{k+a-1}[\psi(\alpha n, \alpha-k)-\psi(\alpha n, a)]=\sum_{\nu=1}^{a}(\nu, n).$$

Soit enfin $n=p$ un nombre premier qui ne divise pas m; dans ce cas l'équation (6) deviendra

$$(9)\qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1}[\psi(m+\alpha p, \alpha)-\psi(m+\alpha p, a)]=a-\mathrm{E}\left(\frac{a}{p}\right).$$

Permettez-moi encore de remarquer que la formule (5°) fait voir que la somme

$$\sum_{n=1}^{b}\varphi(a, n|m)$$

est une fonction symétrique des lettres a, b, de sorte que nous aurons la formule

$$(10)\qquad \sum_{n=1}^{b}\varphi(a, n|m)=\sum_{n=1}^{a}\varphi(b, n|m)$$

dont on a

$$(10\ bis)\qquad \sum_{n=1}^{b}\varphi(a, n)=\sum_{n=1}^{a}\varphi(b, n),$$

formule qui d'ailleurs s'obtient aussi en remarquant que la différence $\varphi(b, n)-\varphi(b-1, n)$ est égale ou à l'unité ou à zéro selon que b est premier avec n ou ne l'est pas, de sorte qu'il s'ensuit la formule

$$\varphi(a, b)=\sum_{n=1}^{a}[\varphi(b, n)-\varphi(b-1, n)]. \qquad \ldots.$$

Cette formule est d'un petit intérêt. Mais il n'en est pas de même de la formule

$$(11)\quad \sum\psi(m-\alpha n, \alpha)=\sum\chi(m-\alpha n, n), \quad \left[\alpha=0, 1, \ldots, \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{n}\right)\right],$$

dans laquelle $\chi(p, q)$ a la même signification que dans la Note imprimée dans les *Comptes rendus*, et qui s'obtient par une voie tout à fait analogue à celle qui nous a donné la formule (3).

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES ET LEUR REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE;

PAR M. LELIEUVRE.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne tracée sur une surface soit asymptotique est que la tangente en un point, qui est perpendiculaire à la normale à la surface en ce point, le soit aussi à la normale en un point infiniment voisin de la ligne.

Soient θ_1, θ_2, θ_3 les coordonnées du point de la surface, ρ et ρ_1 les paramètres des lignes asymptotiques. Menons par l'origine une parallèle à la normale à la surface au point θ. Appelons a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point de cette droite. On aura

$$d\theta_1 = \lambda\left(a_2\frac{\partial a_3}{\partial\rho} - a_3\frac{\partial a_2}{\partial\rho}\right)d\rho + \mu\left(a_2\frac{\partial a_3}{\partial\rho_1} - a_3\frac{\partial a_2}{\partial\rho_1}\right)d\rho_1,$$

et, par permutation des indices, $d\theta_2$ et $d\theta_3$.

En écrivant que ces expressions sont des différentielles exactes, on obtient trois équations, d'où l'on tire immédiatement

$$\lambda + \mu = 0.$$

Posons $a_i\sqrt{\lambda} = \nu_i$. Nous aurons

$$d\theta_1 = \left(\nu_2\frac{\partial\nu_3}{\partial\rho} - \nu_3\frac{\partial\nu_2}{\partial\rho}\right)d\rho - \left(\nu_2\frac{\partial\nu_3}{\partial\rho_1} - \nu_3\frac{\partial\nu_2}{\partial\rho_1}\right)d\rho_1,$$

et les conditions d'intégrabilité seront

$$\frac{\dfrac{\partial^2\nu_1}{\partial\rho\,\partial\rho_1}}{\nu_1} = \frac{\dfrac{\partial^2\nu_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1}}{\nu_2} = \frac{\dfrac{\partial^2\nu_3}{\partial\rho\,\partial\rho_1}}{\nu_3}.$$

D'où résulte ce théorème :

Les coordonnées θ d'un point d'une surface rapportée à ses

lignes asymptotiques ρ, ρ_1, *vérifient les relations suivantes*

$$d\theta_1 = \left(\nu_2 \frac{\partial \nu_3}{\partial \rho} - \nu_3 \frac{\partial \nu_2}{\partial \rho}\right) d\rho - \left(\nu_2 \frac{\partial \nu_3}{\partial \rho_1} - \nu_3 \frac{\partial \nu_2}{\partial \rho_1}\right) d\rho_1,$$

et de même $d\theta_2$, *et* $d\theta_3$, ν_1, ν_2, ν_3 *étant trois solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre*

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho \, \partial \rho_1} = K\nu,$$

où K *est une fonction de* ρ *et de* ρ_1; *et réciproquement.*

Il est évident que ce résultat subsiste si θ_1, θ_2, θ_3 sont des coordonnées tangentielles.

Par exemple, prenons K = o, nous aurons les surfaces

$$\theta_1 = f(f_2 f_3' - f_3 f_2')\, d\rho - f(\varphi_2 \varphi_3' - \varphi_3 \varphi_2')\, d\rho_1 + \varphi_2 f_3 - f_2 \varphi_3 \qquad (1, 2, 3),$$

les f désignant des fonctions arbitraires de ρ, et les φ des fonctions de ρ_1.

Appliquons les résultats précédents à l'étude de la représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une surface. Supposons que a_1, a_2, a_3 soient les coordonnées de l'image sphérique du point θ. On aura

$$\Sigma a_1^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda = \Sigma \nu_1^2 = r^2,$$

r étant le rayon vecteur du point ν. L'élément linéaire de la sphère étant donné par

$$d\sigma^2 = A\, d\rho^2 + 2B\, d\rho\, d\rho_1 + C\, d\rho_1^2,$$

celui de la surface sera

$$ds^2 = r^4 [A\, d\rho^2 - 2B\, d\rho\, d\rho_1 + C\, d\rho_1^2].$$

Les équations d'intégrabilité devant admettre une intégrale commune en r, on en déduit la condition

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{A\frac{\partial C}{\partial \rho} - B\frac{\partial A}{\partial \rho_1}}{B^2 - AC}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{C\frac{\partial A}{\partial \rho_1} - B\frac{\partial C}{\partial \rho}}{B^2 - AC}\right),$$

qui est nécessaire et suffisante pour que le système ρ, ρ_1 soit, sur la sphère, la représentation des asymptotiques d'une surface.

Quand on a trouvé un pareil système, on a r^2 et la surface correspondante par des quadratures.

On peut résoudre ainsi le problème de la détermination des surfaces dont les lignes asymptotiques ont une représentation sphérique donnée, convenablement choisie.

Comme exemple, prenons les surfaces minima. On a $B = 0$; d'où

$$A r^2 = f(\rho), \qquad C r^2 = f_1(\rho_1),$$

et les éléments linéaires de la sphère et de la surface sont

$$ds^2 = r^2[f(\rho)\,d\rho^2 + f_1(\rho_1)\,d\rho_1^2],$$
$$ds^2 = \frac{1}{r^2}[f(\rho)\,d\rho^2 + f_1(\rho_1)\,d\rho_1^2],$$

Les lignes ρ et ρ_1 constituent donc un système isotherme sur la sphère et sur la surface. Les surfaces minima jouissent seules de cette propriété; elles sont aussi les seules pour lesquelles la représentation sphérique fournit une carte de la surface sur la sphère.

Proposons-nous encore de déterminer les surfaces qui admettent pour représentation sphérique d'une des familles de lignes asymptotiques un système de grands cercles; ces surfaces sont évidemment les surfaces réglées. En partant de la condition

$$a_1 f_1(\rho) + a_2 f_2(\rho) + a_3 f_3(\rho) = 0,$$

on arrive à des expressions symétriques des coordonnées. M. Kœnigs a récemment étudié ce cas particulier.

Des considérations analogues s'appliquent aux lignes de courbure et seront développées ultérieurement.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GREENHILL. — The trajectory for the cubic law of resistance. 20 p. in-8°. Woolwich, 1886 (1).

M. Greenhill (1) s'était déjà occupé du mouvement d'un projectile dans l'air en supposant la résistance proportionnelle au cube de la vitesse. Il avait montré que le problème dépendait de fonctions elliptiques de module égal à $\sin 15^\circ$; mais les formules qu'il avait obtenues n'étaient guère applicables, en raison de leur grande complication. La solution prend au contraire une forme simple et élégante quand on introduit les fonctions p et σ de M. Weierstrass : c'est ce que montre M. Greenhill, dans la Note que nous signalons; il donne l'équation de la trajectoire et l'expression du temps; il montre comment il suffit de considérer les fonctions où $g_2 = 0$ et $g_3 = \frac{1}{48\sqrt{3}}$; une table placée à la fin de la note donne, dans cette supposition, les valeurs des fonctions $p'x$, $p(x)$, $\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}$, $\sigma(x)$ et rendrait facile une application numérique. La réduction de l'intégrale, dont le problème dépend, est d'ailleurs obtenue par deux voies distinctes, et la comparaison des résultats donne lieu à quelques remarques intéressantes.

J. T.

LAURENT. — Traité d'Analyse, t. II, 475 p.; t. III, 511 p. Paris, Gauthier-Villars; 1887, 1888.

M. Laurent poursuit avec rapidité la publication de son *Traité d'Analyse;* les tomes II et III, que nous avons le plaisir d'annoncer, se rapportent, l'un aux applications géométriques du Calcul diffé-

(1) Extrait du t. XIV des *Proceedings royal artillery institution.*
(2) Même Recueil, t. XI.

rentiel, l'autre aux fondements du Calcul intégral et de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

Nous demanderons la permission de passer rapidement sur le second Volume qui est, au fond, un Traité de Géométrie analytique, développé, non dans le sens des propriétés particulières des courbes ou des surfaces spéciales, mais dans le sens des théories générales. Les choses sont en outre présentées de manière à familiariser le lecteur avec l'emploi des divers systèmes de coordonnées et aussi avec le langage et les procédés de la Géométrie projective. L'étude d'une courbe autour d'un point singulier est faite avec détail; les développements dans lesquels l'auteur est entré à ce sujet sont amplement justifiés par l'importance qu'il prend dans le Calcul intégral.

Dans le troisième Volume, après avoir, sous forme d'Introduction, exposé la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples, l'auteur introduit la notion d'intégrale définie et la justifie, d'abord pour les fonctions croissantes dans un intervalle, puis pour les fonctions continues. Passant ensuite aux intégrales indéfinies, il expose les méthodes élémentaires d'intégration : comme application, il traite de l'évaluation des aires et des arcs. L'examen du cas où la quantité sous le signe $\int$ devient infinie est présenté comme une conséquence de l'étude des intégrales singulières de Cauchy. L'étude du cas où l'une des limites de l'intégrale est infinie se relie étroitement à l'étude des séries à termes positifs considérés par le même géomètre; enfin, la théorie des indices, que l'on doit encore à Cauchy, se présente tout naturellement quand on parle des précautions qu'il faut prendre lorsque l'on passe de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie. Après ces théories générales, M. Laurent donne des exemples importants des divers procédés et artifices qui s'appliquent à la recherche des intégrales définies que l'on ne peut obtenir directement.

Il introduit ensuite les intégrales multiples, et donne immédiatement les formules relatives au changement de variables; il établit les diverses formules relatives à l'évaluation, dans les différents systèmes usuels de coordonnées, des volumes ou des surfaces : parmi les applications qu'il en fait, nous signalerons les théorèmes que Gauss a placés au début de son Mémoire

sur l'attraction des ellipsoïdes, et qui se rattachent directement aux formules de Green. La troisième des démonstrations données par le même géomètre, de l'existence d'une racine pour toute équation algébrique entière, fournit un bel exemple des précautions qu'il faut prendre dans l'interversion des limites d'une intégrale multiple. L'intégrale

$$\iint \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

signalée par M. Cayley, est un exemple des précautions qu'exige l'extension des limites à l'infini. Ces utiles remarques sont suivies de quelques notions relatives à l'espace à n dimensions, qui aboutissent aux résultats obtenus par M. Kronecker touchant la représentation, par une intégrale multiple, du nombre de solutions d'un système d'équations simultanées.

M. Laurent s'occupe ensuite de l'intégration des différentielles totales à n variables; il montre, d'après Jacobi, comment les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions d'intégrabilité se réduisent à $2n-3$; il montre aussi comment le théorème fondamental de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires se rattache directement à ce fait que l'intégrale d'une différentielle exacte prise entre deux points le long d'une courbe ne dépend pas de cette courbe.

C'est à la théorie de ces intégrales prises entre des limites imaginaires et à la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, dans le sens de Cauchy, qu'est consacré le reste du volume (*). Cette partie, qui est la plus considérable, est aussi particulièrement intéressante.

On ne saurait nier d'ailleurs que l'admiration pour Cauchy, que l'auteur manifeste si volontiers, est entièrement justifiée par le rôle essentiel qu'a joué notre grand géomètre dans l'établissement de cette théorie. M. Laurent rétablit la terminologie de Cauchy; grâce à lui, le terme *synectique*, qui était tombé en discrédit, on ne sait trop pourquoi, va peut-être rentrer en faveur.

Il reprend d'abord la démonstration du théorème fondamental, qui justifie l'introduction des intégrales à limites imaginaires, en

(*) Je fais abstraction de quelques pages sur les formules de quadrature.

partant, comme Riemann l'a enseigné, de la transformation de l'intégrale double

$$\iint\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy$$

en une intégrale simple relative au contour de l'aire à laquelle se rapporte l'intégrale double. Il expose ensuite les principes du calcul des résidus, qu'il applique à la détermination d'intégrales définies particulièrement importantes :

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx,\quad \int_0^\infty \sin x^2\,dx,\quad \ldots.$$

Un Chapitre très important, tant au point de vue de la théorie que des nombreuses applications qu'il renferme, est consacré à la théorie des séries. L'auteur insiste, au début, sur la notion de l'uniformité de la convergence et soutient, non sans quelque chaleur, que cette notion ne pouvait manquer à Cauchy, qui n'aurait pas regardé comme convergentes les séries qui ne convergent pas uniformément. Je signalerai, dans ce Chapitre, l'intéressant paragraphe intitulé : *Sur la continuité des fonctions représentées par des séries;* toutefois, les conditions sous lesquelles la démonstration est valable auraient besoin d'être précisées davantage. On trouvera, dans le même Chapitre, les notions fondamentales relatives aux produits infinis, avec une application au produit, considéré par Euler,

$$(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\ldots,$$

ainsi que la méthode de Cauchy pour décomposer une fonction en une infinité de fractions rationnelles, avec l'application classique aux fonctions circulaires, qui amène naturellement à donner quelques propriétés des nombres de Bernoulli.

M. Laurent expose ensuite les propriétés essentielles des fonctions synectiques et des fonctions uniformes à discontinuités polaires ou essentielles. Il traite des séries de Burmann, de Wronski, de Lagrange, de Laplace et de Legendre; il indique les caractères auxquels on reconnaît qu'une fonction est entière ou rationnelle. Il démontre, en suivant la marche qu'a fait connaître M. Hermite, le théorème de M. Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires d'une fonction synectique dans tout le plan. Il donne

enfin une indication sur le mode de représentation que l'on doit à M. Mittag-Leffler d'une fonction uniforme dans tout le plan avec une infinité de points singuliers essentiels, ou plutôt sur un procédé qui permet, dans un cas très étendu, de parvenir à cette représentation, mais qui ne met pas assez en évidence le caractère général de la proposition de M. Mittag-Leffler. Un Chapitre est ensuite consacré aux séries trigonométriques, tant au point de vue de Dirichlet qu'à celui de Cauchy. On y trouvera exposée la méthode d'intégration, dite des restricteurs, dont Cauchy a fait de nombreuses applications et dont Dirichlet, à qui elle est due, a donné un si mémorable exemple dans le problème de l'attraction des ellipsoïdes. Ce Chapitre se termine par l'exemple que l'on doit à M. Weierstrass d'une fonction continue qui n'admet pas de dérivée. M. Laurent traite ensuite des formules d'interpolation, en particulier de la formule sommatoire d'Euler, et, à ce propos, des polynômes de Bernoulli. L'interpolation du produit $1.2\ldots x$ conduit à introduire la fonction $\Gamma(x)$, dont les propriétés sont développées avec détail. Cette étude est suivie de quelques indications intéressantes sur le calcul des dérivées à indices quelconques; M. Laurent prend pour définition de la dérivée d'ordre n de la fonction monogène $f(z)$, prise à partir de x_0, l'intégrale

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},$$

prise le long d'un lacet ayant son entrée en x_0 et son cercle décrit autour du point x comme centre.

Chaque Chapitre est suivi de nombreux exercices, dont plusieurs sont très intéressants.

On n'a fait, dans ce compte rendu, que signaler l'ordre des principales matières traitées par M. Laurent, sans même indiquer tous les sujets qu'il a abordés. Ce qui précède n'a pu donner au lecteur qu'une idée très imparfaite de la richesse en faits analytiques du volume que nous annonçons. En contribuant à divulguer la doctrine de Cauchy et à montrer la fécondité de cette doctrine, le Livre de M. Laurent rendra de grands services. J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE DE M. TCHEBICHEF

PAR M. JENSEN.

Soient $a_1, a_2, \ldots; c_1, c_2, \ldots; w_1, w_2, \ldots$ trois suites de deurs positives, et telles que l'on ait

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \qquad \text{et} \qquad \frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \frac{c_3}{w_3} \geq \ldots,$$

on aura toujours

$$\frac{\sum_1^n a_\nu c_\nu}{\sum_1^n c_\nu} > \frac{\sum_1^n a_\nu w_\nu}{\sum_1^n w_\nu}.$$

La démonstration de ce théorème est fort simple.

Posons, en effet,

$$s_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n, \qquad \sigma_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n,$$

et remarquons que les inégalités

$$\sigma_2 s_1 \geq s_2 \sigma_1, \qquad \sigma_3 s_2 \geq s_3 \sigma_2, \qquad \ldots$$

ou bien

$$\frac{s_1}{s_2} \geq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \qquad \frac{s_2}{s_3} \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_3}, \qquad \ldots$$

sont une conséquence immédiate de l'inégalité

$$w_q \sigma_p \geq w_p \sigma_q, \quad \text{pour } q > p,$$

devenant de celles données dans l'énoncé du théorème : on a

demment

$$\frac{\sum_1^n u_\nu v_\nu}{\sum_1^n v_\nu} = \frac{\sum_1^{n-1} s_\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) + s_n u_n}{s_n}$$

$$> \frac{\sum_1^{n-1} \sigma_\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) + \sigma_n u_n}{\sigma_n} = \frac{\sum_1^n u_\nu w_\nu}{\sum_1^n w_\nu}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

NOTE SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE;

PAR M. W. KAPTEYN.

Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXX et t. LXXI (1870), M. G. Darboux a été le premier à énoncer les théorèmes fondamentaux :

I. *Si une équation différentielle du premier ordre a une intégrale générale de la forme*

$$\varphi(xyC) = A_n C^n + A_{n-1} C^{n-1} + \ldots + A_1 C + A_0 = 0, \tag{1}$$

où les coefficients A *sont des fonctions rationnelles de* x *et* y *et* C *représente une constante arbitraire, il y a une solution singulière qui est l'enveloppe des courbes du système.*

II. *Une équation différentielle de la forme*

$$\psi(xyp) = B_n p^n + B_{n-1} p^{n-1} + \ldots + B_1 p + B_0 = 0, \tag{2}$$

où $p = \frac{dy}{dx}$ *et les coefficients* B *sont des fonctions rationnelles de* x *et* y, *représente en général un système de courbes qui n'ont pas d'enveloppe, et la courbe* $R = 0$ *qu'on obtient en*

éliminant la variable p entre les équations $\psi = 0$ *et* $\frac{d\psi}{dp} = 0$ *est en général le lieu de leurs points de rebroussement.*

En retrouvant les mêmes résultats, M. A. Cayley a encore découvert [*Messenger of Mathematics*, t. II (1872), et t. VI (1876)] les théorèmes suivants :

III. *Soit* $Q = Q(xy) = 0$ *le résultat de l'élimination de* C *entre les équations* $\varphi(xyC) = 0$ *et* $\varphi'(C) = \frac{d\varphi}{dC} = 0$, *cette équation résultante comprend non seulement l'enveloppe, mais encore le lieu des points doubles* (node-locus) *au second degré et le lieu des points de rebroussement* (cusp-locus) *au troisième degré, etc.*

IV. *Soit* $R = 0$ *l'équation définie ci-dessus : cette équation comprend non seulement le lieu des points de rebroussement, mais encore le lieu des points où différentes courbes de l'intégrale générale se touchent* (tac-locus) *au second degré, etc.*

Dans les pages suivantes, je me propose de démontrer ces théorèmes d'une manière nouvelle en étudiant les valeurs de C et de p dans le voisinage des lieux géométriques $Q = 0$ et $R = 0$, où deux des valeurs de C et p, respectivement, sont égales.

A. En désignant les racines de l'équation (1) par $C_1, C_2, \ldots, C_n$, il est évident qu'on a

$$Q = \varphi'(C_1)\varphi'(C_2)\ldots\varphi'(C_n). \tag{3}$$

Représentons par $\alpha\beta C'$ un point du lieu $Q = 0$, de manière qu'on ait

$$\varphi(\alpha\beta C') = 0 \tag{4}$$

et

$$\left(\frac{d\varphi}{dC}\right)_{\alpha\beta C'} = 0. \tag{5}$$

Pour étudier les valeurs de C dans le voisinage de ce point,

remarquons que l'on a

$$\varphi(xyC) = \varphi(\alpha\beta C') + (x-\alpha)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{\alpha\beta C'} + (y-\beta)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{\alpha\beta C'} + (C-C')\left(\frac{d\varphi}{dC}\right)_{\alpha\beta C'} + \frac{1}{2}\left[(x-\alpha)^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{\alpha\beta C'} + \ldots\right] + \ldots,$$

ou, à cause des abréviations,

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{\alpha\beta C'} = f, \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{\alpha\beta C'} = g, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx^2}\right)_{\alpha\beta C'} = h, \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_{\alpha\beta C'} = k,$$
$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_{\alpha\beta C'} = l, \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dC}\right)_{\alpha\beta C'} = p, \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dy\,dC}\right)_{\alpha\beta C'} = q, \quad \left(\frac{d^2\varphi}{dC^2}\right)_{\alpha\beta C'} = r,$$

et des équations (4) et (5),

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(xyC) = f(x-\alpha) + g(y-\beta) \\ \qquad + \frac{1}{2}[h(x-\alpha)^2 + k(y-\beta)^2 \\ \qquad\quad + r(C-C')^2 + 2l(x-\alpha)(y-\beta) \\ \qquad\quad + 2p(x-\alpha)(C-C') + 2q(y-\beta)(C-C')] + \ldots. \end{array}\right.$$

Choisissons maintenant un point xy dans le voisinage du point $\alpha\beta C'$ et posons

$$y - \beta = \mu(x-\alpha),$$

les valeurs de $C - C'$ pour ce point seront déterminées par l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le dernier membre de l'équation (6). Deux de ces valeurs seront infiniment petites et celles-là se détermineront facilement, parce qu'on n'aura qu'à retenir les termes en $x-\alpha$ et $C - C'$ du degré le moins élevé.

Dans ce qui suit, je considère μ comme un nombre fini; dans le cas particulier où μ serait infini, on voit que $x - \alpha = 0$. Cette substitution conduirait à une équation entre $y - \beta$ et $C - C'$, qui donnerait lieu à des conclusions à peu près identiques à celles que nous allons tirer de l'équation entre $x - \alpha$ et $C - C'$.

Distinguons les trois cas suivants :

1. *f et g ne sont pas zéro simultanément.* — Dans ce cas, les deux valeurs infiniment petites de $C - C'$ seront déterminées par l'équation

$$2(f + \mu g)(x-\alpha) + r(C-C')^2 = 0.$$

(1) $$C_1 - C' = a(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}, \qquad C_2 -$$

a étant une constante.

En développant $\varphi'(C)$ de la même manière que $\varphi(C)$, on aur pour tous les points dans le voisinage de $\alpha\beta C'$

$$(\delta) \qquad \varphi'(C) = p(x-\alpha) + q(y-\beta) + r(C-C');$$

on voit donc que chacune des fonctions $\varphi'(C_1)$ et $\varphi'(C_2)$ est infiniment petite comme $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ et, par conséquent, que la fonctio

$$Q(xy) = \varphi'(C_1)\varphi'(C_2)\ldots\varphi'(C_n)$$

est infiniment petite comme $x-\alpha$ pour tout point dans le voisinage de $\alpha\beta C'$. Cette conclusion est en défaut lorsque

$$\mu = -\frac{f}{g},$$

c'est-à-dire lorsqu'on choisit le point xy sur la tangente de la courbe $\varphi(xyC') = 0$ au point $\alpha\beta$. En effet, dans ce cas, on a

$$f(x-\alpha) + g(y-\beta) = 0;$$

par conséquent, $C - C'$ a deux valeurs infiniment petites comme $x-\alpha$ et $Q(xy)$ est infiniment petite comme $(x-\alpha)^2$.

Développons maintenant $Q(xy)$ dans la forme

$$(9) \quad \begin{cases} Q(xy) = (x-\alpha)\left(\dfrac{dQ}{dx}\right)_{\alpha\beta} \\ \qquad + (y-\beta)\left(\dfrac{dQ}{dy}\right)_{\alpha\beta} + \dfrac{1}{2}\left[(x-\alpha)^2\left(\dfrac{d^2Q}{dx^2}\right)_{\alpha\beta} + \ldots\right] + \ldots \end{cases}$$

parce que $Q(\alpha\beta) = 0$. Pour un point près de $\alpha\beta$, sur la tan de $\varphi(xyC')$ au point $\alpha\beta$, cette expression ne saurait être infin petite comme $(x-\alpha)^2$, à moins que

$$(x-\alpha)\left(\frac{dQ}{dx}\right)_{\alpha\beta} + (y-\beta)\left(\frac{dQ}{dy}\right)_{\alpha\beta} = 0.$$

la tangente à la courbe $Q = 0$, en to

Le lieu de ces points est donc compris comme facteur dans l'équation $Q = 0$ et constitue la solution singulière de l'équation différentielle. En général, il y aura donc une solution singulière qui est l'enveloppe des courbes du système $\varphi(xyC') = 0$.

2. $f = g = 0$. — Dans ce cas, le point $\alpha\beta$ est un point double sur la courbe $\varphi(xyC') = 0$. Pour tout point dans le voisinage de $\alpha\beta C'$, on tirera de l'équation (6)

$$(h + 2l\mu + k\mu^2)(x-\alpha)^2 + 2(p + \mu q)(x-\alpha)(C-C') + r(C-C')^2 = 0.$$

Cette équation admet deux racines

$$C_1 - C' = a(x-\alpha), \qquad C_2 - C' = b(x-\alpha),$$

où a et b représentent des constantes. En substituant ces valeurs dans l'équation (8), on trouve que $\varphi'(C_1)$ et $\varphi'(C_2)$ sont infiniment petites comme $x - \alpha$ et, par conséquent, que la fonction $Q(xy)$ est infiniment petite comme $(x-\alpha)^2$. Dans le cas particulier où l'on choisit le point xy sur une des tangentes de la courbe $\varphi(xyC') = 0$ au point $\alpha\beta$, on aura une racine zéro et une racine infiniment petite comme $x - \alpha$, ce qui conduit à la même conclusion.

Ayant égard à l'équation (9), on voit que, pour toute direction μ, Q ne pourra être infiniment petite comme $(x-\alpha)^2$, à moins que $Q = 0$ ne contienne le carré du lieu des points doubles des courbes $\varphi(xyC') = 0$.

3. $f = g = 0$ et $hk = l^2$. — Dans ce cas, le point $\alpha\beta$ est un point de rebroussement sur la courbe $\varphi(xyC') = 0$. Démontrons d'abord les relations $hr = p^2$ et $kr = q^2$.

Pour y parvenir, je remarque que, le point $\alpha + \partial\alpha$, $\beta + \partial\beta$ étant un point de rebroussement sur la courbe

$$\varphi(x, y, C' + \partial C') = 0,$$

on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dC} = 0,$$

en substituant $x = \alpha + \partial\alpha$, $y = \beta + \partial\beta$, $C = C' + \partial C'$.

En développant, avant de faire cette substitution,

$$\frac{d\varphi}{dx} = h(x-\alpha) + l(y-\beta) + p(C-C') + \dots,$$
$$\frac{d\varphi}{dy} = l(x-\alpha) + k(y-\beta) + q(C-C') + \dots,$$
$$\frac{d\varphi}{dC} = p(x-\alpha) + q(y-\beta) + r(C-C') + \dots,$$

on obtient, en négligeant les termes en $x-\alpha$, $y-\beta$, $C-C'$ d'un degré supérieur au premier :

$$(10) \qquad \begin{cases} h\,\partial\alpha + l\,\partial\beta + p\,\partial C' = 0, \\ l\,\partial\alpha + k\,\partial\beta + q\,\partial C' = 0, \\ p\,\partial\alpha + q\,\partial\beta + r\,\partial C' = 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ h & l & p \\ l & k & q \end{vmatrix} = -kp^2 + 2pql - hq^2 + r(hk - l^2) = 0,$$

ou, à cause de $hk - l^2 = 0$,

$$kp^2 - 2pql + hq^2 = 0.$$

De cette équation on déduit

$$p\sqrt{k} - q\sqrt{h} = 0$$

ou

$$\frac{h}{k} = \frac{p^2}{q^2}.$$

Posons $h = \lambda p^2$; on aura donc

$$k = \lambda q^2 \qquad \text{et} \qquad l = \pm\lambda pq.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (10), on obtient

$$\lambda(p\,\partial\alpha \pm q\,\partial\beta) + \partial C' = 0,$$
$$\lambda(\pm p\,\partial\alpha + q\,\partial\beta) + \partial C' = 0,$$
$$p\,\partial\alpha + q\,\partial\beta + r\,\partial C' = 0;$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{r},$$

par conséquent,

$$hr = p^2 \qquad \text{et} \qquad kr = q^2.$$

Avec ces relations on déduira aisément pour les points dans le

voisinage de $\alpha\beta C'$ de l'équation (6)

$$[\sqrt{h}(x-\alpha)+\sqrt{k}(y-\beta)+\sqrt{r}(C-C')]^2+\frac{1}{3}\left[(x-\alpha)^3\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right)_{\alpha\beta C'}+\dots\right]=0.$$

On aura donc, pour tous ces points, sans aucune exception,

$$\sqrt{h}(x-\alpha)+\sqrt{k}(y-\beta)+\sqrt{r}(C_1-C')= \quad a(x-\alpha)^{\frac{3}{2}},$$
$$\sqrt{h}(x-\alpha)+\sqrt{k}(y-\beta)+\sqrt{r}(C_2-C')=-a(x-\alpha)^{\frac{3}{2}},$$

a étant une constante. En substituant ces valeurs dans l'expression (8), chacune des fonctions $\varphi'(C_1)$ et $\varphi'(C_2)$ sera évidemment infiniment petite, comme $(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}$ et $Q(xy)$ comme $(x-\alpha)^3$. Il faut donc que $Q=0$ contienne le lieu des points de rebroussement des courbes $\varphi(xyC)=0$ au troisième degré.

B. Supposons maintenant que $\alpha\beta\pi$ soit un point du lieu $R=0$, de sorte qu'on a

$$\psi(\alpha\beta\pi)=0 \tag{11}$$

et

$$\left(\frac{d\psi}{dp}\right)_{\alpha\beta\pi}=0. \tag{12}$$

En écrivant

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{\alpha\beta\pi}=f', \quad \left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{\alpha\beta\pi}=g', \quad \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_{\alpha\beta\pi}=h', \quad \left(\frac{d^2\psi}{dy^2}\right)_{\alpha\beta\pi}=k',$$
$$\left(\frac{d^2\psi}{dx\,dy}\right)_{\alpha\beta\pi}=l', \quad \left(\frac{d^2\psi}{dx\,dp}\right)_{\alpha\beta\pi}=p', \quad \left(\frac{d^2\psi}{dy\,dp}\right)_{\alpha\beta\pi}=q', \quad \left(\frac{d^2\psi}{dp^2}\right)=r',$$

on aura toujours, à cause des équations (11) et (12),

$$\left\{\begin{aligned}\psi(xyp)=&f'(x-\alpha)+g'(y-\beta)\\&+\frac{1}{2}[h'(x-\alpha)^2+k'(y-\beta)^2\\&\quad+r'(p-\pi)^2+2l'(x-\alpha)(y-\beta)\\&\quad+2p'(x-\alpha)(p-\pi)+2q'(y-\beta)(p-\pi)]+\dots.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Par le même raisonnement que ci-dessus on trouve dans le voisinage du point $\alpha\beta\pi$:

1. f' et g' n'étant pas simultanément zéro :

$$p_1-\pi=a(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}, \qquad p_2-\pi=-a(x-\alpha)^{\frac{1}{2}};$$

2. $f'=g'=0$:

$$p_1-\pi=a(x-\alpha), \qquad p_2-\pi=b(x-\alpha);$$

3. $f'=g'=0$ et $h'k'=l'^2$:

$$p_1-\pi=a(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}, \qquad p_2-\pi=-a(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Voyons ce que cela signifie. Introduisons pour cela deux axes x' et y', respectivement parallèles aux axes x et y, par le point $\alpha\beta$, en posant

$$x-\alpha=x', \qquad y-\beta=y';$$

alors il est évident que la direction du premier élément de la courbe qui passe par $\alpha\beta$ est déterminée par

$$\frac{dy'}{dx'}-\pi=0;$$

qu'à la fin de ce premier élément la courbe se partage en deux dont les directions sont déterminées par les équations différentielles

$$\frac{dy'}{dx'}-\pi=\pm ax'^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

$$\frac{dy'}{dx'}-\pi=ax' \quad \text{et} \quad \frac{dy'}{dx'}-\pi=bx', \tag{15}$$

$$\frac{dy'}{dx'}-\pi=\pm ax'^{\frac{3}{2}}. \tag{16}$$

Il en résulte que les deux premiers éléments satisfont respectivement aux équations (14), (15) et (16).

En intégrant ces équations et déterminant les constantes de telle sorte que ces intégrales passent par l'origine, on aura respectivement

$$y'-\pi x'=\pm\frac{2}{3}ax'^{\frac{3}{2}},$$

$$y'-\pi x'=\frac{a}{2}x'^2 \quad \text{et} \quad y'-\pi x'=\frac{l}{2}x'^2,$$

$$y'-\pi x'=\pm\frac{2}{5}ax'^{\frac{5}{2}}.$$

On voit donc que dans le premier cas il y a deux branches d'une même courbe qui passent par le point $\alpha\beta\pi$; ce point est évidemment un point de rebroussement.

Dans le second cas par le point $\alpha\beta\pi$ passeront deux courbes différentes qui ont une tangente commune; dans le troisième cas

le point $\alpha\beta\pi$ sera de nouveau un point de rebroussement, de telle sorte que la tangente dans ce point rencontrera la courbe en cinq points consécutifs. Il en résulte que le lieu $R = o$ comprend :

a. Le lieu des points de rebroussement.

b. Le lieu des points où différentes courbes du système se touchent, au second degré.

c. Le lieu des points de rebroussement où la tangente rencontre la courbe en cinq points consécutifs, au troisième degré, etc.

Revenons au premier cas. Quoiqu'en général il y ait dans le voisinage du point $\alpha\beta\pi$ deux valeurs chacune infiniment petite comme $(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$, il en est autrement pour les points situés sur la droite

$$f'(x-\alpha)+g'(y-\beta)=o.$$

Pour ces points, on trouvera deux valeurs $p-\pi$ dont chacune sera infiniment petite comme $x-\alpha$; par conséquent, la fonction

$$R(xy)=R(p_1),\ R(p_2),\ \ldots,\ R(p_n)$$

sera infiniment petite, comme $(x-\alpha)^2$.

Or, le développement

$$R(xy)=(x-\alpha)\left(\frac{dR}{dx}\right)_{\alpha\beta}+(y-\beta)\left(\frac{dR}{dy}\right)_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\left[(x-\alpha)^2\left(\frac{d^2R}{dx^2}\right)_{\alpha\beta}+\ldots\right]+\ldots$$

montre que cela est impossible, à moins que

$$(x-\alpha)\left(\frac{dR}{dx}\right)_{\alpha\beta}+(y-\beta)\left(\frac{dR}{dy}\right)_{\alpha\beta}=o,$$

c'est-à-dire que la tangente à la courbe $R = o$ au point $\alpha\beta$ coïncide toujours avec la droite

$$f'(x-\alpha)+g'(y-\beta)=o.$$

D'après cette remarque, on voit que cette tangente coïncidera avec la tangente au point de rebroussement $\alpha\beta$ lorsqu'on a

$$f'+\pi g'=o. \tag{17}$$

Cette condition étant remplie pour tous les points sur le lieu qui entre au premier degré dans $R = o$, il en résulte que ce lieu sera la solution singulière.

SUR L'IRRATIONNALITÉ DES NOMBRES e ET π;

PAR M. H. PADÉ.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

Permettez-moi de vous soumettre une méthode fort simple, qui donne les formules que vous avez établies pour démontrer l'irrationnalité des puissances entières de e, de π et de π^2. Elles se déduisent toutes deux d'une formule unique donnée par M. Darboux dans son remarquable Mémoire sur le développement en série des fonctions d'une variable (*Journal de Liouville*, 1876, p. 296) et qui s'établit de la façon la plus simple. Cette formule est la suivante :

$$f(x+h)-f(x) = \sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{p-1}\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2n(2n-1)\dots(2n-p+1)}\frac{h^p}{1.2\dots p}[f^p(x+h)+(-1)^{p-1}f^p(x)]+R_{2n}$$

où l'on a

$$1.2\dots 2n.R_{2n} = (-1)^n h^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n f^{(2n+1)}(x+ht)\,dt.$$

Si l'on attribue à x la valeur 0, et que l'on remplace h par x, elle devient

$$f(x)-f(0) = \sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{p-1}\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2n(2n-1)\dots(2n-p+1)}\frac{x^p}{1.2\dots p}[f^p(x)+(-1)^{p-1}f^p(0)]+R_{2n},$$

$$1.2\dots 2n.R_{2n} = (-1)^n x^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n f^{(2n+1)}(tx)\,dt.$$

Appliquons cette formule à la fonction e^x, on obtient :

$$e^x-1 = \sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{p-1}\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2n(2n-1)\dots(2n-p+1)}\frac{x^p}{1.2\dots p}[e^x+(-1)^{p-1}]+R_{2n},$$

$$1.2\dots 2n.R_{2n} = (-1)^n x^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n e^{tx}\,dt.$$

que l'on peut écrire

$$e^x P - P_1 = R_{2n},$$

en posant

$$P = 1 - \frac{x}{2} + \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\frac{x^2}{1.2} - \dots + (-1)^n \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2n(2n-1)\dots(2n-p+1)}\frac{x^p}{1.2\dots p} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{2n(2n-1)\dots(n+1)},$$

$$P_1 = 1 + \frac{x}{2} + \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2n(2n-1)\dots(2n-p+1)}\frac{x^p}{1.2\dots p} + \dots + \frac{x^n}{2n(2n-1)\dots(n+1)}.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par $(n+1)\dots 2n$, on obtient la formule

$$(I) \qquad e^x \Pi(x) - \Pi_1(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2\dots n}\int_0^1 t^n (1-t)^n e^{tx}\, dt,$$

où les polynômes $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$ ont manifestement tous leurs coefficients entiers, et satisfont à l'égalité $\Pi(x) = \Pi_1(-x)$. Elle ne diffère pas de la formule que vous avez donnée à la page 5 de votre beau Mémoire sur la fonction exponentielle.

Appliquons maintenant la formule de M. Darboux à la fonction $\sin x$; on obtient

$$\sin x = \frac{x}{2}(\cos x + 1) + \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\frac{x^2}{1.2}\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)}\frac{x^3}{1.2.3}(\cos x + 1) - \dots + R_{2n},$$

$$1.2\dots 2n.R_{2n} = x^{2n+1}\int_0^1 t^n (1-t)^n \cos tx\, dt.$$

Le dernier terme est en $\sin x$ ou en $\cos x + 1$, suivant que n est pair ou impair. Remplaçons maintenant $\sin x$ par $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ et $1 + \cos x$ par $2\cos^2\frac{x}{2}$. Une transformation des plus simples

nous conduit à la formule

$$(1) \qquad 2\cos\frac{x}{2}\left(\mathrm{P}\sin\frac{x}{2}+\mathrm{Q}\cos\frac{x}{2}\right)=\mathrm{R}_{2n},$$

où l'on a

$$\mathrm{P}=1-\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\frac{x^2}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots,$$

$$\mathrm{Q}=-\frac{x}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)}\frac{x^3}{1.2.3}-\ldots.$$

Si n est pair, P est de degré n, Q de degré $n-1$. C'est l'inverse si n est impair.

Faisons maintenant, dans l'intégrale qui figure dans l'expression de R_{2n}, le changement de variable

$$t=\frac{1+z}{2};$$

on obtient

$$\int_0^1 t^n(1-t)^n\cos tx\,dt=\frac{1}{2^{2n+1}}\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^n\cos\left(\frac{x}{2}+z\frac{x}{2}\right)dz.$$

Si l'on remplace $\cos\left(\frac{x}{2}+z\frac{x}{2}\right)$ par sa valeur en fonction des sinus et cosinus de $\frac{x}{2}$ et $z\frac{x}{2}$, l'intégrale nouvelle se partage en deux autres, dont l'une est évidemment nulle, et dont l'autre est égale à

$$2\cos\frac{x}{2}\int_0^{+1}(1-z^2)^n\cos z\frac{x}{2}\,dz,$$

et l'on a

$$1.2\ldots 2n.\mathrm{R}_{2n}=2\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\int_0^1(1-z^2)^n\cos z\frac{x}{2}\,dz.$$

Remplaçons R_{2n} par sa valeur dans la formule (1), supprimons le facteur $2\cos\frac{x}{2}$ aux deux membres, et remplaçons x par $2x$, on a

$$\mathrm{P}_1\sin x+\mathrm{Q}_1\cos x=\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1(1-z^2)^n\cos zx\,dz.$$

Si l'on multiplie les deux membres par $(n+1)(n+2)\ldots 2n$, les coefficients des polynômes P_1 et Q_1 deviennent entiers, et l'on

a une formule,

$$(\mathrm{II}) \qquad \Phi(x)\sin x - \Phi_1(x)\cos x = \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots n}\int_0^1 \cos zx(1-z^2)^n\,dz,$$

convenable pour démontrer l'irrationnalité de π et de π^2. Elle n'est pas identique à celle que vous avez donnée dans une Lettre adressée en 1873 à Borchardt, savoir :

$$\mathrm{U}\sin x + \mathrm{V}\cos x = \frac{x^{2n+1}}{2.4\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz\,dz.$$

On obtient celle-ci en multipliant les deux membres par $1.3.5\ldots 2n-1$. Mais alors il n'est plus complètement évident que les coefficients des polynômes P_i et Q_i deviennent entiers.

L'expression générale des nouveaux coefficients est

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{2n(2n-1)\ldots(2n-p+1)}\,2^p\,\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots p};$$

on la transforme bien aisément en la suivante :

$$\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots(2n-p)}{2^{n-p}.1.2\ldots p},$$

qui représente évidemment un nombre entier.

Au lieu d'établir ainsi directement la formule (II), il est encore plus simple de la déduire de la formule (I). Désignons, en effet, par $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ respectivement les termes de degré pair et de degré impair dans $\Pi(x)$; on a

$$\Pi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x),$$

et, à cause de la relation $\Pi_1(x) = \Pi(-x)$,

$$\Pi_1(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x).$$

Soit maintenant

$$\varphi(2ix) = \Phi(x), \qquad \varphi_1(2ix) = i\,\Phi_1(x);$$

il est manifeste que les polynômes Φ et Φ_1 sont à coefficients réels et entiers; le premier est pair, le second impair, et leurs degrés sont respectivement n et $n-1$, ou $n-1$ et n, suivant

que n est pair ou impair; on aura

$$\Phi(x) = 2n(2n-1)\dots(n+1) - (2n-2)\dots(n+1)\frac{n(n-1)}{1.2}2^2x^2 + \dots,$$

$$\Phi_1(x) = (2n-1)\dots(n+1)\frac{n}{1}.2.x$$

$$-(2n-3)\dots(n+1)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}2^3x^3 + \dots.$$

Changeons maintenant dans la formule (I) x en $2ix$, et employons ces notations, on trouve

$$(e^{2ix}-1)\Phi(x) - (e^{2ix}+1)i\Phi_1(x)$$

$$= (-1)^n\frac{(2ix)^{2n+1}}{1.2\dots n}\int_0^1 e^{2tix}t^n(1-t)^n\,dt$$

ou

$$2i[\Phi(x)\sin x - \Phi_1(x)\cos x] = i\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{1.2\dots n}\int_0^1 e^{ix(2t-1)}t^n(1-t)^n\,dt,$$

en vertu des relations

$$e^{2ix}-1 = 2ie^{ix}\sin x, \qquad e^{2ix}+1 = 2e^{ix}\cos x.$$

Le changement de variable

$$2t-1 = z$$

se présente ici naturellement, et l'on obtient

$$\Phi(x)\sin x - \Phi_1(x)\cos x = \frac{x^{2n+1}}{1.2\dots n}\int_0^1 (1-z^2)^n\cos zx\,dz,$$

c'est-à-dire la formule (II).

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES REPRÉSENTANT LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Considérons l'équation différentielle du premier ordre

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

on suppose que $f(x, y)$ soit une fonction holomorphe de x et y, quand x et y restent dans leur plan, à l'intérieur de cercles C et

C' ayant respectivement pour centre x_0 et y_0, et pour rayon a et b; soit de plus M le module maximum de $f(x, y)$ quand x et y sont sur ces circonférences elles-mêmes. Briot et Bouquet ont établi que, dans ces conditions, il y avait une intégrale de l'équation (E), développable par la formule de Taylor, et prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0. Ils donnent, comme rayon du cercle où la série est nécessairement convergente, l'expression

$$a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right). \tag{1}$$

Cauchy avait le premier, comme on sait, démontré le théorème fondamental de l'existence d'une solution d'une équation différentielle, et cela par deux méthodes différentes. La première repose en définitive sur les mêmes principes que celle de Briot et Bouquet; la limite donnée pour la région de convergence est plus petite que l'expression (1). Seulement, la seconde démonstration de Cauchy nous est connue par les leçons du grand géomètre publiées par M. Moigno (1844); elle concerne spécialement le cas où la fonction f et les variables sont réelles. Son point de départ, aussi naturel que possible, consiste à regarder l'équation différentielle comme la limite d'une succession d'équations aux différences. En étudiant la démonstration de Cauchy et m'aidant des simplifications que lui a fait subir M. Lipschitz (*Lehrbuch der Analysis*, p. 504), j'ai été conduit à penser qu'en restant dans l'hypothèse de Briot et Bouquet relativement à l'équation (E), on pourrait trouver pour la limite de convergence certaine une région plus étendue que celle qui est rappelée plus haut. Voici le résultat auquel je suis arrivé : *la série précédente converge certainement à l'intérieur du cercle ayant pour rayon la plus petite des quantités*

$$a \quad \text{et} \quad \frac{b}{M}.$$

Que ce soit l'une ou l'autre de ces quantités que l'on doive prendre, on aura une limite supérieure à celle que donne l'expression (1). *La limite de Briot et Bouquet peut donc, dans tous les cas, être remplacée par une limite supérieure.*

C'est le théorème précédent, relatif à l'extension assurée de la limite de convergence, qui fait l'objet de cet article; pour être

complet, je reprends entièrement la démonstration du théorème fondamental, en suivant les idées de Cauchy et de M. Lipschitz.

1. La dérivée partielle $f'_y(x, y)$ est holomorphe à l'intérieur des cercles C et C_1 ; elle n'est pas nécessairement définie sur les circonférences elles-mêmes, mais il n'y a aucun inconvénient à le supposer, car on pourrait remplacer les cercles de rayon a et b par des cercles de rayon $a - \varepsilon$ et $b - \eta$ (ε et η étant fixes, mais aussi petits qu'on voudra), et la conclusion à laquelle nous arriverons n'en serait pas changée. Soit donc k le maximum du module de $f'_y(x, y)$, quand x et y sont respectivement sur C et C_1 ; ce sera aussi le maximum du module de cette fonction quand x et y sont à l'intérieur des circonférences précédentes.

En désignant par y_1 et y_2 deux valeurs quelconques de y à l'intérieur de C_1, on a

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = \lambda_0 (y_2 - y_1) f'_y [x, y_1 + \theta (y_2 - y_1)],$$

en appliquant le théorème des accroissements finis, tel qu'il a été étendu par M. Darboux aux fonctions d'une variable complexe; λ_0 désigne une quantité complexe de module au plus égal à un, et θ est toujours une quantité réelle comprise entre zéro et un. De l'égalité précédente on conclut

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq k |y_2 - y_1|$$

De plus, la continuité de la fonction $f(x, y)$ est uniforme à l'intérieur des cercles C et C_1, ou plus exactement à l'intérieur des cercles de rayon $a - \varepsilon$ et $b - \eta$, que nous pouvons pour la même raison que plus haut supposer être les cercles C et C_1 eux-mêmes. On pourra donc, étant donnée une quantité λ aussi petite que l'on voudra, déterminer δ de telle sorte que pour

$$|\Delta x| < \delta, \qquad |\Delta y| < \delta$$

on ait

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \lambda,$$

pourvu, bien entendu, que le point $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ soit dans le domaine des cercles C et C_1, x et y étant d'ailleurs un point quelconque de cette région.

Ceci posé, soit A une quantité positive, telle que l'on ait à la fois

$$A \leqq a, \qquad AM \leqq b,$$

et envisageons dans le plan des x le cercle ayant x_0 pour centre et un rayon égal à A; x désignant un point à l'intérieur de ce cercle, joignons x_0 et x par une droite; l'équation différentielle considérée comme limite d'une équation aux différences va nous conduire en x avec une valeur parfaitement déterminée.

Partageons, à cet effet, le segment rectiligne x_0x, en un certain nombre de parties

$$x_0x_1, \quad x_1x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}x.$$

Nous formons les équations

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y - y_{n-1} &= (x - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned}$$

qui détermineront y en fonction de $x_0, y_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Il faut seulement s'assurer que les valeurs trouvées pour $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sont bien toutes contenues dans le domaine où la fonction est définie. On a d'abord pour y_1

$$|y_1 - y_0| < \mathrm{M}|x_1 - x_0| < \mathrm{MA} \leqq b;$$

pour y_2, on aura de même

$$|y_2 - y_0| < \mathrm{M}|x_1 - x_0| + \mathrm{M}|x_2 - x_1| = \mathrm{M}|x_2 - x_0| < \mathrm{MA} \leqq b,$$

et ainsi de suite.

On a donc pour y une expression parfaitement déterminée. Il s'agit de démontrer que y tend vers une limite déterminée, quand tous les intervalles tendent vers zéro, leur nombre augmentant indéfiniment.

Nous allons considérer un mode de subdivision tel, qu'on passe d'un système d'intervalles au suivant en partageant chacun des intervalles en un certain nombre de parties. La démonstration faite dans ce cas, le théorème se trouvera démontré pour une loi quelconque, d'après un mode de raisonnement trop connu pour qu'il soit nécessaire d'insister.

Nous allons marquer par un accent le second mode de subdivision, et pareillement les valeurs de y seront représentées par des lettres accentuées.

Soit l'intervalle

$$x_\alpha, \quad x_{\alpha+1}$$

et dans le second mode de subdivision

$$x'_l = x_\alpha, \quad \ldots, \quad x'_m, \quad \ldots, \quad x'_n = x_{\alpha+1}.$$

Nous aurons

$$|y'_m - y'_l| < |x'_m - x'_l|\,\mathrm{M} < |x_{\alpha+1} - x_\alpha|\,\mathrm{M}.$$

Nous supposons que la première subdivision a été prise assez loin dans la suite pour que

$$|x_{\alpha+1} - x_\alpha| < \delta \qquad \text{et} \qquad |x_{\alpha+1} - x_\alpha|\,\mathrm{M} < \delta,$$

δ étant la quantité positive définie précédemment, correspondant à une quantité λ, donnée arbitrairement aussi petite que l'on voudra. On en conclut que

$$|f(x'_m, y'_m) - f(x'_l, y'_l)| < \lambda. \tag{E}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
y'_{l+1} - y'_l &= (x'_{l+1} - x'_l) f(x'_l, y'_l),\\
y'_{l+2} - y'_{l+1} &= (x'_{l+2} - x'_{l+1}) f(x'_{l+1}, y'_{l+1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
y'_n - y'_{n-1} &= (x'_n - x'_{n-1}) f(x'_{n-1}, y'_{n-1});
\end{aligned}$$

donc, en faisant la somme et se servant des inégalités (E), il vient

$$y'_n - y'_l = (x_{\alpha+1} - x_\alpha)[f(x'_l, y'_l) + \theta\lambda],$$

le module de θ étant au plus égal à l'unité.

D'ailleurs

$$y_{\alpha+1} - y_\alpha = (x_{\alpha+1} - x_\alpha) f(x_\alpha, y_\alpha).$$

Il résulte des égalités précédentes

$$y'_n - y_{\alpha+1} = y'_l - y_\alpha + (x_{\alpha+1} - x_\alpha)[f(x'_l, y'_l) - f(x_\alpha, y_\alpha) + \theta\lambda].$$

D'autre part, puisque $x'_l = x_\alpha$, on aura

$$|f(x'_l, y'_l) - f(x_\alpha, y_\alpha)| < k\,|y'_l - y_\alpha|$$

et nous arrivons ainsi enfin à l'inégalité

$$|y'_n - y_{\alpha+1}| < |y'_l - y_\alpha| + |x_{\alpha+1} - x_\alpha|[k\,|y'_l - y_\alpha| + \lambda]. \tag{2}$$

inégalité fondamentale, dont nous allons maintenant tirer aisément la démonstration de l'existence de la limite. On voit qu'elle donne une limite de la différence des valeurs trouvées pour y en $x_{\alpha+1}$ par le premier et le second mode de subdivisions, exprimée au moyen de la différence des valeurs trouvées pour y en x_α. On a d'ailleurs pour $\alpha = 0$ (c'est-à-dire en x_0) $y'_0 = y_0$.

Cherchons d'abord à déterminer une suite de quantités positives

$$V_0 = 0, \quad V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_\alpha, \quad \ldots$$

donnée par la loi de récurrence

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha + |x_{\alpha+1} - x_\alpha|[kV_\alpha + \lambda]. \tag{3}$$

Les inégalités (2) nous montrent tout de suite qu'on aura l'inégalité

$$|y'_n - y_{\alpha+1}| < V_{\alpha+1}.$$

Or l'évaluation des V est immédiate, car la relation (3) peut s'écrire

$$V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k} = \left(V_\alpha + \frac{\lambda}{k}\right)[1 + k|x_{\alpha+1} - x_\alpha|]$$

et par suite

$$V_{\alpha+1} + \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{k}(1 + k|x_1 - x_0|)(1 + k|x_2 - x_1|)\ldots(1 + k|x_{+\alpha 1} - x_\alpha)|,$$

et, puisque

$$e^{k|x|} < 1 + k|x|$$

nous pouvons écrire

$$V_{\alpha+1} < \frac{\lambda}{k}(e^{k|x_{\alpha+1} - x_0|} - 1).$$

Prenons le point extrême x; nous aurons, d'après ce qui précède, en désignant par y la valeur à laquelle conduit le premier mode de subdivision, et par y' celle à laquelle conduit le second mode :

$$|y' - y| < \frac{\lambda}{k}[e^{k|x - x_0|} - 1].$$

Donc, puisque le second membre contient λ en facteur et tend par suite vers zéro avec λ, on en conclut, sans qu'il soit nécessaire d'insister, l'existence de la limite.

2. Ainsi nous obtenons par le calcul précédent, en chaque point x du cercle de rayon A, une valeur déterminée pour y.

Le rayon A est, comme on a vu, la plus petite des quantités

$$a \quad \text{et} \quad \frac{b}{M}.$$

Il ne peut être admis, sans plus d'explications, que la succession des valeurs ainsi trouvées pour y donne une fonction analytique de x, holomorphe dans le cercle de rayon A; c'est ce que nous nous proposons maintenant d'établir.

Il est tout d'abord évident qu'à l'intérieur du cercle de rayon

$$a\left(1-e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$$

la succession des valeurs trouvées pour y représente une fonction analytique holomorphe, car cette succession de valeurs doit nécessairement coïncider avec celle que donne le développement en série de Briot et Bouquet. Il faut montrer que les valeurs trouvées pour y en dehors de ce cercle sont le prolongement analytique de ce développement.

La remarque suivante nous sera indispensable. Je considère les cercles C_1 et C_1' de rayon $a-\varepsilon$ et $b-\eta_1$, en désignant par ε et η des quantités fixes, d'ailleurs aussi petites que l'on voudra. Soit x_1 et y_1 un système de valeurs de x et y à l'intérieur de ces cercles; la fonction $f(x, y)$ sera holomorphe à l'intérieur de cercles ayant respectivement pour centre x_1 et y_1 et pour rayon ε et η. Donc, à l'intérieur du cercle ayant x_1 pour centre et pour rayon

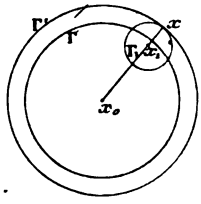
$$\rho = \varepsilon\left(1-e^{-\frac{\eta_1}{2\varepsilon M}}\right),$$

l'équation différentielle donnera un développement convergent. Ceci dit, je considère le cercle Γ ayant pour centre x_0 et un rayon égal à

$$a-\varepsilon\left[1-e^{-\frac{b-\eta_1}{2(a-\varepsilon)M}}\right].$$

A l'intérieur de ce cercle nous avons, d'après Briot et Bouquet, un développement convergent procédant suivant les puissances croissantes de $x-x_0$; la valeur de y correspondant à une valeur quelconque de x donnera dans le plan des y un point à l'intérieur du cercle C_1'. Cherchons à étendre le développement précédent en dehors du cercle Γ: nous prendrons à cet effet un point x_1

l'intérieur de Γ, mais aussi rapproché que l'on voudra de la circonférence du cercle. Nous pourrons, d'après ce qui précède, obtenir un développement convergent à l'intérieur d'une circonférence Γ_1 de rayon ρ, ayant x_1 pour centre; le cercle Γ_1 sortira du cercle Γ et nous aurons ainsi un prolongement de la fonction hors du cercle. En prenant ainsi une succession de points x_1, toujours à la même distance de x_0, nous aurons une succession de circonférences Γ_1, et l'intégrale, dont nous sommes parti en x_0, sera manifestement holomorphe dans l'enveloppe extérieure Γ′ de ces



circonférences. Pour que cette extension présente de l'intérêt, *il faut que nous puissions raisonner sur* Γ′ *comme nous avons raisonné sur* Γ. Il faut donc que, pour tous les points de la couronne annulaire entre Γ et Γ′, la valeur correspondante de y soit à l'intérieur du cercle C_1 de rayon $b-\eta$; or je vais montrer qu'il en est ainsi, si le rayon du cercle Γ′ est inférieur à la plus petite des quantités

$$(3) \qquad a-\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{b-\eta_1}{M}.$$

Le fait, qui est loin d'être évident si l'on reste dans l'ordre d'idées de Briot et Bouquet, est immédiatement mis en évidence, quand on se reporte au paragraphe précédent. On peut toujours, en effet, supposer que l'on va du point x_0 à un point x du cercle Γ′ par le chemin rectiligne, et calculer la valeur de y par la méthode précédente; la valeur de y, ainsi calculée, sera telle que

$$|y-y_0|<b-\eta_1.$$

Nous pouvons donc raisonner sur le cercle Γ′ comme sur le cercle Γ, *la valeur de* ρ *restant toujours la même.* Du cercle Γ′ nous passerons à un troisième cercle Γ″ et ainsi de suite, jusqu'à ce que le rayon de ces cercles successifs devienne égal à la plus petite

des quantités (3). Mais, puisque ε et η_i sont deux quantités indépendantes, aussi petites que l'on voudra, il s'ensuit bien, comme nous l'avions annoncé, que *l'intégrale de l'équation différentielle qui, pour* $x = x_0$, *prend la valeur* y_0 *est holomorphe à l'intérieur du cercle ayant pour rayon la plus petite des quantités*

$$a \quad \text{et} \quad \frac{b}{M}. \tag{4}$$

Il est bien aisé de voir que, dans tous les cas, ce nouveau rayon de convergence pour la série de Taylor, représentant l'intégrale, sera supérieur à l'expression $a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$ donnée par Briot et Bouquet. La chose est évidente si c'est a la plus petite des expressions (4). Dans le cas où ce serait $\frac{b}{M}$, nous avons à vérifier que

$$a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right) < \frac{b}{M},$$

ce qui revient à voir que, pour x positif, on a

$$1 - e^{-x} < 2x,$$

inégalité manifestement vérifiée.

Les considérations développées dans cet article s'étendent d'elles-mêmes à un système d'équations différentielles ou à une équation différentielle ordinaire d'ordre quelconque.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LÉVY (M.). — SUR LE PRINCIPE DE L'ÉNERGIE. 29 p. in-8°; Paris, Gauthier-Villars, 1888.

C'est une Leçon faite au Collège de France il y a quelques années; par la hauteur des vues, la simplicité des démonstrations, l'intérêt et la netteté des exemples, elle méritait assurément d'être conservée, et il faut remercier l'auteur de l'avoir donnée à l'impression.

Après avoir distingué les deux énergies, potentielle et cinétique, il en établit les expressions mathématiques; quelques exemples éclaircissent les définitions. L'objet de la théorie de l'énergie, c'est l'étude des lois qui régissent la transformation mutuelle de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, ainsi que la transmission d'énergie d'un système matériel à un autre. Ces lois se résument dans le principe de la conservation de l'énergie. L'énumération des éléments qui définissent l'*état* d'un système matériel, la définition du *cycle* et de l'équivalent mécanique de la chaleur, terminent la Leçon.

Je demande la permission de faire à l'auteur une critique qui, cela va sans dire, n'a rien de scientifique : « Si l'on considère, dit-il, le système matériel formé par l'univers, il n'est en communication avec aucun autre système; donc son énergie totale est immuable. » A mon avis, de pareilles spéculations ne sont permises qu'à ceux qui supposent que l'univers matériel est fini. Assurément, je n'entends point contester la légitimité de cette supposition ou d'une autre; mais je pense qu'il serait bon qu'un homme ayant l'autorité de M. Maurice Lévy voulût bien dire nettement qu'elle est indispensable pour la grosse conséquence qu'il affirme : je regrette qu'il n'ait pas saisi cette occasion, car sa Leçon sera lue sans doute par quelques philosophes, qui l'auraient peut-être cru sur parole. J. T.

KŒHLER. — Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure (Questions et solutions). 2 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars.

L'auteur destine ce Recueil aux élèves de Mathématiques spéciales et aux candidats à l'agrégation; et il est vrai de dire que l'absence d'un Ouvrage de ce genre se faisait vivement sentir. On trouvera dans celui-ci un nombre considérable d'énoncés de problèmes portant sur toutes les parties de la Géométrie analytique; chacun de ces énoncés est suivi d'indications brèves, mais largement suffisantes pour rétablir *in extenso* la solution du problème. On verra d'ailleurs, par l'aperçu rapide que nous allons essayer d'en donner, que l'auteur est allé bien au delà des limites tracées par les programmes officiels.

PREMIÈRE PARTIE. — Géométrie plane.

Le Chapitre I renferme des problèmes sur le cercle. On y trouve tout d'abord une étude intéressante du quadrilatère inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, du triangle inscrit (ou circonscrit) à un cercle et polaire conjugué par rapport à un autre. Viennent ensuite divers problèmes où figurent des cercles ou qui donnent des cercles comme solutions : lieu des centres des triangles équilatéraux circonscrits à un triangle donné, lieu des sommets des triangles circonscrits à un cercle et dont le point de concours des hauteurs est fixe, problèmes sur les systèmes de deux cercles, etc.

Dans les Chapitres II et III, on fait des applications de l'étude des coniques sur leurs équations réduites. Nous y trouvons d'abord, à l'égard de l'ellipse et de l'hyperbole, des problèmes sur les tangentes, les pôles et polaires, les diamètres, les triangles inscrits et circonscrits, comme ceux-ci : inscrire dans une ellipse des triangles d'aire maximum, circonscrire à une ellipse des triangles d'aire minimum. Nous passons ensuite aux propriétés focales de l'ellipse et de l'hyperbole, dans l'étude desquelles il est fait usage, suivant les cas, des coordonnées rectilignes ou des coordonnées polaires. Enfin, dans un paragraphe spécialement consacré à la parabole, l'auteur donne plusieurs exemples de la détermination

d'une parabole par quatre conditions (comme trois points ou trois tangentes et la direction de l'axe, trois tangentes et le foyer), et calcule chaque fois son paramètre. Ici encore, les coordonnées polaires fournissent des démonstrations élégantes de certaines propriétés focales. — Vient ensuite la question des normales. Dans le cas de l'ellipse, la condition pour que les normales en trois points soient concourantes, ainsi que la relation entre les pieds des quatre normales issues d'un point, est du plus grand usage dans cette théorie : surtout si on la rapproche de l'égalité bien connue qui exprime que quatre points d'une ellipse sont sur un cercle. Il va de soi qu'un point de l'ellipse est défini par son angle d'anomalie. Dans le cas de la parabole, un point de la courbe est défini sans ambiguïté par le coefficient angulaire de la tangente en ce point. Ici encore, la condition pour que les normales en trois points soient concourantes est très utile à considérer. Enfin l'auteur rattache au même Chapitre des problèmes sur les triangles inscrits dans une conique et circonscrits à une autre.

Dans les Chapitres IV et V, on étudie les coniques définies par l'équation générale du second degré. L'auteur adopte la notation anglaise ($ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$), qu'il regarde avec raison comme plus symétrique que l'autre; il représente en outre, ce qui est assez naturel, le mineur du discriminant relatif à une petite lettre par la grande lettre correspondante. Faisons observer aussi qu'il arrive à l'équation générale des coniques homofocales à une conique donnée par la voie la plus simple, consistant à partir des coordonnées tangentielles. Enfin ces deux Chapitres renferment de nombreux exemples d'équations générales de coniques assujetties à quatre conditions, ainsi que des lieux de points remarquables (centres, foyers, sommets) et des enveloppes de droites remarquables (directrices, asymptotes, axes, tangentes au sommet, etc.). Plusieurs de ces problèmes sont résolus géométriquement. — Dans le Chapitre V, certaines des conditions données se rapportent plus particulièrement à la nature de l'intersection de la conique avec une conique déterminée : elle doit, par exemple, lui être tangente, ou bitangente, ou osculatrice.

Les quatre derniers Chapitres, qui forment plus de la moitié de l'Ouvrage, renferment des développements sur les coordonnées

trilinéaires, la théorie géométrique des coniques et les courbes d'ordre supérieur, sujets sur lesquels on s'étend peu dans les cours. Les coordonnées trilinéaires tiennent les Chapitres VI et VII. Le Chapitre VI contient une collection très complète des formules, relatives à la ligne droite et aux coniques, dont on peut avoir à se servir dans les applications; l'auteur ne s'y est pas restreint, comme on le fait d'habitude, aux questions où n'interviennent que des propriétés descriptives. Il montre d'abord comment on peut passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées trilinéaires, et inversement. Puis viennent les formules relatives à la ligne droite, à l'angle de deux droites, aux perpendiculaires; les coordonnées tangentielles s'introduisent ensuite naturellement à propos de la question de la distance d'un point à une droite. Passant ensuite à la théorie des coniques, l'auteur fait la distinction du genre par une fonction ∇ de *tous* les coefficients. Puis on traite les questions suivantes : pôle d'une droite par rapport à une conique (cas particulier : centre de la conique); équation quadratique des asymptotes; conditions pour que l'équation générale représente un cercle; axes d'une conique; foyers et directrices. — Toutes ces formules se trouvent appliquées dans le Chapitre VII. Nous y trouvons d'abord des exercices sur la droite et sur le cercle : droites remarquables du triangle de référence; cercles remarquables; propriétés du cercle des neuf points; étude et propriétés du cercle de Brocard. Parmi les problèmes sur les coniques, nous relevons les suivants : ellipse minimum circonscrite à un triangle, ellipse maximum inscrite; étude des coniques tangentes à quatre droites; problèmes sur les coniques bitangentes. Le Chapitre se termine par des applications du Chapitre XVIII du *Traité des sections coniques* de M. Salmon : *Invariants et covariants des systèmes de coniques.*

Je signale, pour terminer, à la fin du Chapitre VIII, une étude très intéressante sur les triangles et polygones dont les côtés enveloppent des coniques et dont les sommets se meuvent sur d'autres coniques fixes.

SECONDE PARTIE. — GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

Les divisions de ce second Volume correspondent à peu près à celles du premier. Ainsi le Chapitre I est consacré à la sphère; l'auteur y étudie, avec beaucoup de symétrie, les propriétés des systèmes de sphères ayant même plan radical, ayant même axe radical, coupant deux sphères fixes sous des angles constants, coupant trois sphères fixes sous le même angle, etc. — Mais un Chapitre spécial, le Chapitre II, s'occupe des cônes et cylindres du second degré. Ce Chapitre, dans la rédaction duquel l'auteur s'est inspiré de la *Géométrie supérieure* de Chasles, renferme un grand nombre de questions intéressantes. Citons-en quelques-unes : angle des droites d'intersection d'un plan et d'un cône; cônes de révolution tangents aux faces d'un trièdre, ou passant par les arêtes d'un trièdre; étant donné un cône capable de trièdres trirectangles, trouver le lieu de la droite d'intersection des plans normaux au cône suivant les trois arêtes d'un de ces trièdres. Viennent ensuite des énoncés où figurent à la fois les plans cycliques et les plans tangents au cône. Enfin on introduit les lignes focales par cette propriété caractéristique, que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de l'une d'elles sur les plans tangents au cône sont sur une courbe plane (qui ne peut être qu'un cercle), et l'on étudie leurs autres propriétés.

Quant aux quadriques rapportées à leurs axes, elles tiennent les Chapitres III, IV et V de l'Ouvrage. Voici l'ordre suivi dans cette étude : on s'occupe d'abord des plans tangents à un ellipsoïde, des asymptotes à un hyperboloïde, enfin des cônes et des cylindres circonscrits à l'ellipsoïde. Puis viennent les diamètres et les plans diamétraux : citons l'étude, très bien faite, des propriétés des diamètres conjugués égaux dans l'ellipsoïde. — Nous passons ensuite aux sections planes des quadriques; je signale, dans cet ordre d'idées, les questions suivantes : aire de la section d'un ellipsoïde par un plan sécant quelconque, et applications; équation aux carrés des demi-axes d'une section centrale, et applications, notamment à la recherche des plans coupant un hyperboloïde suivant une hyperbole équilatère; équations des axes d'une section plane quelconque d'un ellipsoïde; lieu des foyers des sections

centrales d'un ellipsoïde. Le Chapitre IV se termine par l'étude des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe. Prenant les équations des génératrices sous la forme commode $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\alpha + \cos\alpha$, $\frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\alpha + \sin\alpha$, on traite différentes questions concernant la perpendiculaire commune à deux génératrices d'un même système. Enfin on donne, avec Painvin, le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont normales à un hyperboloïde à une nappe donné. — Dans le Chapitre V, l'auteur s'occupe des normales à l'ellipsoïde. Il montre que les pieds des six normales issues d'un point sont sur une cubique gauche passant par ce point et par le centre de l'ellipsoïde; cette cubique est la même pour toutes les surfaces homothétiques et concentriques à la proposée. Il s'occupe ensuite de la surface normopolaire de M. Desboves, qu'il définit comme le lieu des points tels que, sur la section de l'ellipsoïde par le plan polaire de chacun d'eux, on puisse trouver les pieds de trois normales concourantes. Enfin ce Chapitre se termine par des exercices sur les surfaces homofocales et sur les focales d'une quadrique; la question de la détermination des axes et des lignes focales d'un cône circonscrit à une quadrique s'y trouve très bien traitée. — Je signale, pour terminer, le complexe du second ordre le plus simple de tous :

$$a^2 \mathrm{P} p + b^2 \mathrm{Q} q + c^2 \mathrm{R} r = 0,$$

que l'auteur introduit par trois fois dans les Chapitres qui précèdent : 1° comme complexe des droites perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à un ellipsoïde; 2° comme complexe des droites telles que chacune d'elles soit un des axes d'une des sections de l'ellipsoïde qui passent par cette droite; 3° comme complexe des normales à une famille de quadriques homofocales.

J'arrive maintenant au Chapitre VI, consacré aux quadriques représentées par l'équation générale du second degré. Il s'ouvre par des formules générales, comme celles qui expriment que la quadrique est un paraboloïde ou un cylindre de révolution; puis viennent des problèmes sur les surfaces circonscrites, bitangentes, etc. Parmi les questions variées qui suivent, je cite celles-ci : On donne un hyperboloïde à une nappe et une quadrique concentrique; à quelles conditions chaque génératrice de l'hyper-

boloïde est-elle perpendiculaire à sa conjuguée par rapport à la quadrique? Tétraèdres maxima inscrits dans un ellipsoïde, tétraèdres minima circonscrits. Mouvement d'une droite dans lequel quatre de ses points se meuvent sur les faces d'un tétraèdre (Mannheim).

Ce Chapitre et le précédent contiennent en outre la résolution d'un grand nombre de problèmes proposés, soit au concours général, soit à l'agrégation.

Le Volume se termine par un Chapitre consacré aux coordonnées tétraédriques et à leurs applications. L'auteur y donne d'abord les formules qui permettent d'exprimer les éléments du tétraèdre de référence en fonction des six arêtes; puis il indique les formules de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées tétraédriques, et inversement. On passe ensuite aux formules relatives au plan, à propos duquel s'introduisent les coordonnées tangentielles, puis à la droite. Enfin, dans l'étude des quadriques, on suit un ordre entièrement semblable à celui du premier Volume. Ces formules donnent lieu à un grand nombre d'exercices intéressants, parmi lesquels nous signalons ceux-ci : point dont la somme des carrés des distances aux faces d'un tétraèdre est minimum; point dont la somme des distances aux sommets d'un tétraèdre est minimum; étude des sphères tangentes aux faces d'un tétraèdre, et des vingt-huit droites qui joignent leurs centres deux à deux; étude spéciale des tétraèdres dont les arêtes opposées sont rectangulaires; conditions auxquelles doit satisfaire un tétraèdre pour qu'il y ait une sphère tangente aux six arêtes; propriétés d'un tétraèdre dans lequel les trois nombres obtenus en faisant le produit de deux arêtes opposées sont égaux.

En résumé, il faut savoir gré à M. Kœhler du travail considérable qu'a dû lui coûter son Livre, destiné certainement à rendre de grands services dans l'enseignement.

POKROVSKY. — Théorie des fonctions ultra-elliptiques de la première classe. In-8°, 234 p. Moscou, 1887. Extrait du *Mathematischesky Sbornik*, t. XIII.

Sur ma proposition, la Faculté des Sciences physico-mathématiques de Moscou présenta, pour le concours du prix *Braschmann*, la question suivante : *Faire l'aperçu critico-historique de la théorie des fonctions ultra-elliptiques et la perfectionner en un certain point.*

D'après mon Rapport, le prix a été décerné à un de mes anciens élèves, le jeune savant Pokrovsky.

Les fonctions ultra-elliptiques forment un cas particulier des fonctions abéliennes, et la théorie des fonctions ultra-elliptiques de la première classe, exposée par l'auteur, est un problème particulier de la théorie générale des fonctions ultra-elliptiques.

L'auteur nomme fonctions ultra-elliptiques de la première classe des fonctions qui contiennent, sous le signe d'intégration, la racine carrée d'un polynôme du cinquième ou du sixième degré.

C'est aux travaux d'Abel et de Jacobi que la Science doit la création et le développement de la théorie des fonctions abéliennes.

En 1828 et 1829, Abel exposa, dans le *Journal de Crelle,* la théorie générale de ces fonctions. D'après cette théorie, une somme déterminée d'intégrales de la forme $\int f(x, y)\,dx$, f désignant une fonction rationnelle de x et de y, et y une racine d'une équation algébrique quelconque, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, peut s'exprimer à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques.

Ce théorème se trouve exposé dans les deux Mémoires suivants : 1° *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte des fonctions transcendantes;* 2° *Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe des fonctions transcendantes* (Abel, *Œuvres complètes,* Christiania, t. I; 1881).

Legendre appela ces Mémoires *monumentum ære perennius* et proposa de donner aux nouvelles transcendantes le nom de *fonctions abéliennes.*

Le problème de l'inversion des fonctions abéliennes fut posé par Jacobi, qui consacra à ces transcendantes une série de Mémoires, parmi lesquels le Mémoire intitulé : *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis,* mérite une attention particulière. Dans ces Mémoires, Jacobi détermine le nombre de périodes dans les intégrales de première espèce, établit le théorème de l'addition des intégrales de seconde et de troisième espèce ainsi que la proposition relative à l'échange du paramètre avec l'argument dans les intégrales de troisième espèce. Il propose de considérer simultanément plusieurs intégrales ultra-elliptiques et pose le principe des périodes *compatibles* ou des modules de périodicité.

La question de la recherche des fonctions inverses des intégrales abéliennes, proposée par Jacobi, est connue sous le nom de *problème de Jacobi.*

Par ses fonctions Θ et par une méthode particulière d'exposition de la théorie des fonctions elliptiques, Jacobi prépara les matériaux pour la résolution du problème de l'*inversion* des fonctions abéliennes, sans le résoudre complètement lui-même. Dans les leçons, professées pendant la dernière période de sa carrière scientifique, Jacobi exposa la théorie des fonctions elliptiques par une méthode qui a pu être étendue au cas des transcendantes supérieures.

Ces Leçons, rédigées par Borchardt, furent publiées sous le titre : *Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet.* (*Jacobi's Werke,* t. I.)

En prenant dans toutes ses Leçons, pour point de départ, les fonctions Θ, Jacobi arrive aux différentielles elliptiques.

Il parvient à cette inversion de la théorie des fonctions elliptiques à l'aide d'une formule fondamentale, qui découle d'un principe fort simple. Par la multiplication de quatre transcendantes Θ, de même forme et ayant les mêmes modules, mais des arguments différents, on obtient une relation linéaire entre des produits de fonctions Θ, chaque produit étant formé de quatre transcendantes du même type et avec un module variable.

La première solution du problème de Jacobi fut donnée simultanément par Gœpel et Rosenhain. Elle repose sur une généralisation des fonctions de Jacobi Θ et de sa méthode d'exposition de la

théorie des fonctions elliptiques. Le Mémoire de Gœpel parut dans le *Journal de Crelle* en 1847, sous le titre : *Theoriæ transcendentium abelianarum primi ordinis adumbratio levis* (*Crelle Journal*, t. XXXV). En 1846, Rosenhain adressa pour le concours du prix de l'Académie des Sciences de Paris le Mémoire suivant : *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes*. Ce Mémoire fut publié en 1851 dans le tome XI des *Mémoires des Savants étrangers*.

Goepel et Rosenhain donnent la solution du problème de Jacobi relatif à l'inversion des fonctions ultra-elliptiques de la première classe.

Dans l'étude des fonctions ϑ à deux arguments, Goepel et Rosenhain, après avoir étudié les propriétés de ces fonctions par des méthodes qui ne diffèrent que dans les détails de l'exposition, donnent ensuite l'application de ces fonctions à la transformation des fonctions ultra-elliptiques de la première classe.

A cause de l'importance des fonctions ϑ, les savants se sont particulièrement attachés à l'étude de leurs propriétés.

Parmi les travaux sur la théorie des fonctions ϑ à deux arguments, méritent un intérêt tout particulier ceux de M. Hermite : *a. Extrait de deux Lettres à Jacobi; b. Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL). Il faut aussi citer les travaux de Koenigsberger : *Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung*, t. 64 et 65).

La théorie des fonctions abéliennes fut considérablement avancée par les recherches de Riemann, publiées en 1857 dans le *Journal de Crelle* [Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen* (*Crelle Journal*, t. 54)].

La représentation géométrique de Riemann permit de lier complètement la théorie des fonctions non monodromes à celle des fonctions monodromes.

L'étude de la connexion d'une surface, introduite par Riemann, l'aida à caractériser une surface par l'ordre de sa connexion. Le problème de Riemann consistait dans la recherche des systèmes de fonctions algébriques et de leurs intégrales *également ramifiées*, c'est-à-dire qui peuvent être étendues uniformément à une même surface de Riemann.

Riemann partage les intégrales abéliennes en classes. A chaque classe correspond une surface déterminée de Riemann.

Ayant ramené la surface donnée, dont la connexion est d'ordre $2p+1$, à des surfaces de connexion simple à l'aide de $2p$ sections, il considère les fonctions qui jouissent de la propriété d'admettre des différences données sur $2p$ sections. Il partage les fonctions non monodromes et les intégrales abéliennes de la même classe, qui leur correspondent, en trois espèces.

D'après Riemann, il existe trois espèces de fonctions : toutes ces fonctions jouissent de la propriété commune d'admettre sur $2p$ sections des différences constantes, dont les parties réelles peuvent, d'après le principe de Dirichlet, être des quantités choisies à volonté; les différences forment $2p$ systèmes de périodes *compatibles*. Sur tout le reste de la surface de Riemann ces fonctions sont monodromes. De plus, les fonctions de première espèce sont partout continues, les fonctions de deuxième espèce ont une discontinuité déterminée en un seul point, enfin les fonctions de troisième espèce admettent une ligne déterminée de discontinuité. Conformément à cette division, à chaque surface donnée correspondent trois espèces d'intégrales abéliennes.

L'ensemble des systèmes de fonctions algébriques *également ramifiées* et de leurs intégrales forme, d'après Riemann, une classe. On peut partager toutes les intégrales abéliennes en classes et à chaque classe correspond une surface déterminée de Riemann.

Pour une surface donnée de Riemann, tous les systèmes d'intégrales peuvent s'exprimer à l'aide des trois espèces d'intégrales abéliennes, qui existent toujours pour cette surface.

Riemann a aussi introduit la considération des intégrales normales de première espèce; mais il n'a point donné les intégrales normales de deuxième et de troisième espèce.

Il compléta ses recherches sur les intégrales abéliennes, en étudiant quelques propriétés des fonctions Θ à n arguments.

Il indique le rapport entre les variations des fonctions Θ et les systèmes de variations simultanées des arguments ou les systèmes de modules compatibles de périodicité. Il examine les zéros, pose la question importante relative aux caractéristiques des fonctions Θ et fait voir que le nombre de fonctions abéliennes d'une classe déterminée dépend du nombre de caractéristiques.

Les idées de Riemann, exposées d'une manière confuse et vague dans ses travaux imprimés, étaient développées par lui avec plus de détails dans ses Leçons. Les disciples de Riemann, Prym, Weber et surtout Neumann complétèrent et développèrent ses représentations géométriques. Dans son Ouvrage : *Theorie der Abelschen Integrale* (Leipzig, 1865), Neumann simplifie considérablement la considération des surfaces de Riemann par l'introduction de la sphère et du principe de la déformation continue des surfaces. Grâce à ce dernier principe, on peut ramener la considération de toute surface de connexion simple à celle du plan élémentaire. La deuxième édition de l'Ouvrage de Neumann, faite en 1884, embrasse aussi la théorie générale des intégrales abéliennes. Neumann complète la classification de Riemann, en montrant qu'à chaque classe d'intégrales abéliennes correspondent deux intégrales normales de deuxième et de troisième espèce, une de chaque espèce. Il indique la possibilité d'exprimer toutes les intégrales abéliennes de deuxième et de troisième espèce à l'aide des intégrales normales précédentes et des intégrales de première espèce et résout la question générale de l'inversion des intégrales abéliennes.

La solution du problème de Riemann, appliqué aux fonctions abéliennes de troisième espèce, a été donnée par Weber (Weber, *Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht* 3). La théorie des fonctions abéliennes de troisième espèce est celle qui a été le plus étudiée. Parmi les recherches relatives à cette théorie, il faut citer celles de Weber [Weber, *Ueber die Transformations Theorie der theta Functionen* (*Annali di Matematica,* 1878)]; Schottky (*Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln*. Leipzig, 1880) et Thomae (*Ueber eine specielle Classe Abelschen Functionen von Geschlecht* 3; Halle, 1879).

La théorie des caractéristiques de Weber a été appliquée aux fonctions Θ à deux arguments par M. Possé, professeur à Saint-Pétersbourg, dont le travail (¹) fut en Russie le premier qui eût traité de la théorie des fonctions ultra-elliptiques.

(¹) Possé, *Sur les fonctions* Θ *à deux arguments et sur le problème de Jacobi;* Saint-Pétersbourg, 1882.

Dans son travail (*Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie*, 1882), Prym généralisa la série Θ de Riemann et développa la théorie des caractéristiques des fonctions Θ à plusieurs arguments. Les principes généraux de Prym fournirent à son élève Kraser (*Theorie der zweifachunendlichen Thetareihen;* Leipzig, 1882) les éléments nécessaires pour la démonstration d'une formule qui indique l'analogie et la dépendance entre les méthodes de Goepel et de Rosenhain.

Une tout autre direction a été suivie par Clebsch.

Dans ses travaux, Clebsch prend pour point de départ les intégrales algébriques sous la forme donnée par Aronhold. Par une transformation linéaire, homogène, Clebsch ramène l'intégrale d'Aronhold au type qui peut être exprimé à l'aide de trois espèces d'intégrales. Les dernières possèdent les mêmes propriétés que, d'après Riemann, les trois espèces d'intégrales abéliennes.

Le système de fonctions algébriques *également ramifiées* est remplacé chez Clebsch (1) par le système de courbes algébriques de même genre (déficient). L'expression *déficient,* introduite par Cayley, désigne la différence entre le plus grand nombre possible de points doubles de la courbe et le nombre réel de ces points.

Dans la théorie de Clebsch, le passage des intégrales abéliennes aux fonctions Θ s'effectue à l'aide des intégrales de troisième espèce.

Aux travaux de Clebsch se rattache l'Ouvrage de Briot (*Théorie des fonctions abéliennes;* Paris, 1879). Briot suit Clebsch, mais prend une courbe plus générale, qui admet des points critiques d'un ordre quelconque, tandis que la courbe de Clebsch n'a que des points doubles. Les recherches de Clebsch et de ses successeurs, Klein, Brill, Nöther, Lindemann, lient intimement la Géométrie à l'Analyse.

Dans la théorie des fonctions ultra-elliptiques, la méthode de M. Weierstrass mérite une attention particulière. Les Leçons du professeur Weierstrass sont malheureusement inconnues en Russie.

---

(1) CLESCH et GORDAN, *Theorie der Abelschen Functionen;* Leipzig, 1866.

Dans ses premières recherches (1), Weierstrass s'arrête sur l'étude des intégrales ultra-elliptiques et donne des relations entre les intégrales de première et de seconde espèce, analogues aux relations de Legendre.

Un cas particulier du théorème d'Abel conduit Weierstrass à la conclusion que, pour des valeurs données de $u_1, \ldots, u_n$, les quantités $u_1, \ldots, u_n$ désignant des sommes déterminées d'intégrales ultra-elliptiques, on peut exprimer à l'aide des fonctions déterminées monodromes des grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les limites supérieures de ces intégrales.

Dans deux Mémoires publiés en 1854 (2) et 1856 (3), Weierstrass introduit des fonctions particulières $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\alpha$, qui correspondent, pour le cas d'un seul argument, aux fonctions $\sin \mathrm{am}\, u$, $\cos \mathrm{am}\, u$, $\Delta \mathrm{am}\, u$.

Il met ces fonctions sous forme d'un quotient de deux fonctions $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\alpha$ et $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, qui s'expriment à l'aide des fonctions analogues aux fonctions ϑ.

Les travaux de Weierstrass sont intimement liés à ses recherches sur la théorie générale des fonctions analytiques, en particulier sur la décomposition d'une fonction analytique monodrome avec un nombre déterminé de points particuliers en fonctions entières et en *fonctions primitives* (*Prim-Function*).

Weierstrass, partant du théorème d'Abel, donne le passage des intégrales ultra-elliptiques aux fonctions Θ par l'intermédiaire de l'intégrale de seconde espèce.

Le développement historique et l'état présent de la théorie des fonctions abéliennes expliquent le plan et le caractère des recherches de Pokrovsky. Dans cette théorie dominent quatre directions : (*a*) la direction de Goepel et de Rosenhain; (*b*) la direction de Riemann; (*c*) de Clebsch et (*d*) de Weierstrass. La méthode de Gœpel et de Rosenhain est basée sur l'étude des fonctions ϑ généralisées. Celle de Riemann est liée à ses représentations géométriques. Dans la théorie de Clebsch et de Gordan, le passage des

(1) *Beitrag zur Theorie der Abelschen Functionen* (*Programm des Gymnasiums zu Braunschweig*, 1849).

(2) Weierstrass, *Zur Theorie der Abelschen Functionen* (*Crelle*, t. 47).

(3) Weierstrass, *Theorie der Abelschen Functionen* (*Crelle*, t. 52).

intégrales aux fonctions $\Im$ s'effectue à l'aide des intégrales de troisième espèce, qui les conduisent à la théorie des fonctions auxiliaires $T_{\xi\eta}(x)$. Mais la théorie de ces fonctions est si compliquée, que Briot, dans sa théorie des fonctions abéliennes, après avoir exposé la première partie d'une manière analogue à celle de Clebsch et de Gordan, reprend la méthode de Riemann, quand il s'agit du passage des intégrales aux fonctions $\Im$.

La méthode de Weierstrass se rattache à un cas particulier du théorème d'Abel.

Les travaux de Neumann aidèrent l'auteur à se familiariser avec la direction de Riemann.

Dans l'exposition de la méthode de Weierstrass et surtout de la résolution du problème de Jacobi, il se servit du travail de Tikhomandritzky (¹), professeur à Kharhov. Le professeur Tikhomandritzky réussit à démontrer les formules de 32 à 35 de Weierstrass après que Weierstrass lui eut personnellement indiqué le cas particulier du théorème d'Abel dont il parle dans le § 4 de son Mémoire, inséré dans le *Journal de Crelle*, t. 47.

De plus, l'auteur se servit de ses propres recherches.

Pour l'exposition des principaux éléments de la théorie des fonctions ultra-elliptiques de la première classe, Pokrovsky choisit la méthode de Riemann. Guidé par l'Ouvrage de Neumann, l'auteur fait des coupures correspondantes sur la surface de Riemann. Il détermine les deux systèmes de formes canoniques des trois espèces d'intégrales, données par Jacobi et par Weierstrass, trouve les périodes des intégrales ultra-elliptiques de première espèce et introduit des intégrales analogues aux *intégrales normales*.

La considération de ces dernières intégrales conduit l'auteur à introduire aussi une forme particulière des fonctions Θ. Les nouvelles fonctions Θ s'expriment facilement à l'aide des fonctions Θ_3, proposées par Jacobi.

Dans ses recherches, Rosenhain a abandonné les notations de Jacobi. L'auteur revient aux notations de Jacobi, et cette circonstance lui facilite l'étude des fonctions Θ et des caractéristiques

---

(¹) TIKHOMANDRITZKY, *Inversion des intégrales hyperelliptiques*. In-4°, 145 p.; Kharkov, 1885.

correspondantes et lui permet aussi d'obtenir une série de relations entre les fonctions ultra-elliptiques.

Ainsi cinq de ses formules (p. 74), depuis (30) jusqu'à (34), relatives à ces fonctions, remplacent plusieurs Tables de l'Ouvrage de Possé.

L'auteur étudie ses nouvelles fonctions Θ dans le cas où elles admettent pour arguments des intégrales, analogues aux intégrales normales, détermine le nombre et la situation des zéros des fonctions Θ, les conditions pour qu'elles deviennent identiquement nulles et exprime le système de constantes à l'aide des zéros donnés. Il trouve ensuite les expressions algébriques de quinze rapports de fonctions Θ à caractéristiques différentes et détermine les constantes dans les expressions algébriques des fonctions Θ.

Dans le Chapitre III, l'auteur expose le théorème d'Abel et la solution du problème de Jacobi par la méthode de Weierstrass. Dans cette exposition il se sert du travail de Tikhomandritzky. Ici l'auteur considère les fonctions $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\alpha$ et $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de Weierstrass.

L'étude détaillée de ces fonctions appartient à l'auteur.

Dans le Chapitre IV, l'auteur se pose le problème, utile et nécessaire pour sa méthode d'exposition, d'indiquer les rapports entre ses fonctions Θ et les fonctions de Rosenhain, de Riemann et de Weierstrass. A cet effet, il trouve des relations entre la fonction Θ_3 de Jacobi et la fonction $\mathfrak{S}_3$ introduite par Rosenhain et définit $\mathfrak{S}_3$ à l'aide de Θ_3. Ceci lui permet d'établir trois théorèmes de Rosenhain. Il définit de même Θ à l'aide de la fonction fondamentale de Riemann et trouve un rapport entre Θ et la fonction $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de Weierstrass.

Tout ce travail, fort utile, est loin d'épuiser l'indépendance et l'originalité des recherches de Pokrowsky.

L'auteur donne un développement suffisant aux travaux de Weierstrass sur les fonctions ultra-elliptiques de forme générale. Weierstrass désigne ces fonctions par le symbole $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\alpha$ et les appelle *fonctions abéliennes*. Il a énoncé sans démonstrations plusieurs théorèmes relatifs à ces fonctions.

Comme application des fonctions ultra-elliptiques de la première classe, l'auteur obtient cinq fonctions $\mathrm{al}(u_1, u_2)_\alpha$ pour $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$.

A ces fonctions correspondent dans la théorie des fonctions elliptiques sin am u, cos am u, Δ am u. Il exprime ces cinq fonctions ultra-elliptiques à l'aide des fonctions de Riemann et de ses propres fonctions Θ.

Il donne de plus l'expression de dix fonctions ultra-elliptiques secondaires.

Dans le Chapitre V, l'auteur expose une étude complètement indépendante des propriétés fondamentales des fonctions ultra-elliptiques et établit les principales relations entre ces fonctions.

Il détermine ici les changements de ces fonctions avec la variation des arguments, leurs périodes, leurs zéros, infinis, les rapports entre les carrés et les produits des fonctions ultra-elliptiques et leurs dérivées partielles.

Dans le Chapitre VI il donne le développement des fonctions ultra-elliptiques et des fonctions Θ en séries trigonométriques et hyperboliques. Les Chapitres IV, V, VI appartiennent exclusivement à l'auteur. Il faut reconnaître avec justice que l'auteur a rendu un service important au développement des fonctions ultra-elliptiques de la première classe. Il a le mérite de se débrouiller et de se bien orienter dans la vaste littérature de cette théorie.

Il a non seulement éclairé toutes les directions, indiqué leur dépendance mutuelle, mais il a aussi complété beaucoup de lacunes de cette théorie.

Ce travail prouve dans l'auteur une vaste érudition, le talent de traiter les questions les plus difficiles de l'Analyse mathématique, et promet en lui à l'avenir un travailleur persévérant, zélé et intelligent pour cette partie des Mathématiques.

N. Bougaief.

MÉLANGES.

VALEUR DE L'INTÉGRALE DÉFINIE $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ DÉDUITE DE LA FORMULE DE WALLIS;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

On connaît déjà bien des méthodes pour calculer l'intégrale dont il s'agit; mais son rôle considérable dans la théorie des moindres erreurs pourra donner quelque intérêt à un nouveau procédé présentant d'ailleurs, sur la plupart des autres, l'avantage d'une rigueur absolue.

En appelant μ un entier quelconque nul ou positif, je poserai

$$S_\mu = \int_0^\infty x^\mu e^{-x^2}\,dx,$$

intégrale dont l'existence résulte de ce qu'on peut assigner à x, et cela quel que soit μ, une valeur positive après laquelle la fonction sous le signe conserve une valeur inférieure à celle de Ax^{-2} par exemple.

L'intégration par parties donne immédiatement

$$S_{\mu+2} = \frac{\mu+1}{2} S_\mu;$$

d'où

$$S_{2m} = p_{2m-1} S_0, \qquad S_{2m-1} = p_{2m-2} S_1,$$

où, pour abréger, j'ai posé

$$\frac{1.3\ldots(2k+1)}{2.2\ldots2} = p_{2k+1}, \qquad \frac{2.4\ldots2k}{2.2\ldots2} = p_{2k}.$$

D'autre part, et en supposant $\mu > 1$, la substitution

$$x = \left(\frac{\mu-1}{2} y\right)^{\frac{1}{2}},$$

faite dans notre intégrale, donne facilement

$$S_\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{-\frac{\mu-1}{2}} T_\mu,$$

où j'ai posé encore

$$T_\mu = \int_0^\infty (ye^{-y})^{\frac{\mu-1}{2}}\, dy.$$

On constate sans peine que, dans cette intégrale, la fonction entre parenthèses est croissante pour $y<1$, décroissante pour $y>1$, par suite que, pour y non $=1$, sa valeur est toujours inférieure à ce qu'elle est pour $y=1$, c'est-à-dire à 1.

Il en résulte évidemment que T_μ décroît toujours quand μ augmente, d'où, en particulier,

$$T_{2m+1} < T_{2m} < T_{2m-1};$$

puis, en exprimant T_μ au moyen de S_μ,

$$\left(\frac{2m}{2}\right)^{-\frac{2m+2}{2}} e^{\frac{2m}{2}} p_{2m} S_1 < \left(\frac{2m-1}{2}\right)^{-\frac{2m+1}{2}} e^{\frac{2m-1}{2}} p_{2m-1} S_0 < \left(\frac{2m-2}{2}\right)^{-\frac{2m}{2}} e^{\frac{2m-2}{2}} p_{2m-2} S_1.$$

Dans ces inégalités, le rapport du dernier membre au premier tend vers 1 pour m infini, car il peut s'écrire

$$e^{-1}\left(1+\frac{1}{-m}\right)^{-m}.$$

Il en est donc de même et à plus forte raison pour celui du membre médian au premier. Il vient ainsi, en élevant au carré et après quelques transformations sans difficulté,

$$S_0^2 = S_1^2 \left[2 \lim \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{4^2}{4^2-1}\cdots\frac{(2m)^2}{(2m)^2-1}\right] \times \left(\lim\frac{2m+1}{2m}\right)\left[e \lim\left(1-\frac{1}{2m}\right)^{2m}\right]\left(\lim\frac{2m-1}{2m}\right).$$

Chacun des trois derniers facteurs se réduit évidemment à 1; le second est égal à π d'après la formule de Wallis. D'autre part, on trouve, en passant par l'intégrale indéfinie, qui est ici calculable,

$$S_1 = \int_0^\infty x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}.$$

Il vient donc enfin, par l'extraction des racines carrées,

$$S_0 = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

On trouverait aussi des formules intéressantes, en appliquant la même méthode aux intégrales de la forme plus générale

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x^n}\,dx.$$

SUR LE LIEU D'UN CERCLE DOUBLEMENT SÉCANT A TROIS CERCLES FIXES;

PAR M. DEMARTRES.

Considérons une surface cerclée dont la génératrice G reste constamment sécante à un cercle fixe C_1, en deux points variables M, M'. La sphère qui contient les deux cercles G, C_1, est tangente à la surface en chacun de ces deux points; ils forment, par suite, ce que j'ai appelé un *couple de points conjugués* (1); en d'autres termes, la droite MM' passe par le centre P d'une sphère orthogonale à toutes les sphères bitangentes à la surface et contenant la génératrice G.

Le lieu de ce point P, lorsque G varie, est alors une certaine courbe située dans le plan du cercle C_1; en outre, l'axe de G rencontre constamment une droite fixe, l'axe de C_1.

Si le cercle mobile G doit rester doublement sécant à *deux* cercles fixes C_1, C_2, le lieu du centre P de la sphère directrice sera, d'après ce qui précède, la droite d'intersection du plan de ces deux cercles; l'axe de G s'appuiera alors sur deux droites fixes, les axes des cercles C_1, C_2.

Si enfin la génératrice reste doublement sécante à trois cercles fixes C_1, C_2, C_3, le point P sera immobile et se confondra avec le point d'intersection des plans de ces trois cercles; j'ai d'ailleurs démontré (2) que, si le point P est invariable, il en est de même du rayon de la sphère orthogonale.

Donc la surface est alors une anallagmatique; et, comme la dé-

(1) Dans une Note récemment insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, M. Cosserat a fait ressortir l'utilité que présente la considération de ces couples de points (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 4 juin 1888).

(2) *Mémoire sur les surfaces à génératrice circulaire* (*Annales de l'École Normale*, p. 148; 1885).

férente admet dans ce cas trois directrices rectilignes, qui sont les axes des trois cercles fixes, cette déférente est une quadrique.

Donc *le lieu d'un cercle variable doublement sécant à trois cercles fixes est une cyclide.*

Ce théorème se transforme homographiquement dans le suivant :

THÉORÈME. — *Étant données trois coniques fixes* C_1, C_2, C_3 *doublement sécantes à une quatrième* K, *le lieu d'une cinquième conique doublement sécante aux quatre premières est une surface du quatrième ordre admettant* K *pour conique double.*

SUR UNE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE QUI ADMET UNE LIGNE OMBILICALE PARABOLIQUE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.
(Extrait d'une Lettre adressée à M. Darboux.)

On a proposé aux candidats à l'agrégation en 1885 de trouver l'équation, la forme et les lignes asymptotiques d'une surface du troisième ordre S ayant pour ombilics tous les points d'une parabole du second degré P et symétrique par rapport au plan de cette courbe; puisque cette surface vous semble devoir intéresser quelques lecteurs du *Bulletin*, permettez-moi de dire brièvement comment on en peut trouver les propriétés les plus simples.

La parabole P est déterminée par ses équations

$$z = 0, \qquad y^2 - 2mx = 0,$$

les coordonnées étant rectangulaires : il est évident que l'équation de la surface S doit être de la forme

$$(1) \qquad (ax + by + c)z^2 + (a'x + b'y + c')(y^2 - 2mx) = 0,$$

et il s'agit de déterminer les constantes de manière qu'un point quelconque A de P soit un ombilic. On peut exprimer que ses coordonnées satisfont aux équations dont on se sert pour déterminer les ombilics : pour former ces équations bien connues, on prendra pour variables indépendantes y et z, et non x et y, parce que les dérivées partielles de z sont infinies pour $z = 0$; les dérivées partielles de x se calculeront en différentiant l'équation (1). Mais une considération géométrique permet d'éviter ce calcul : soient AN la normale à la parabole, AX', AZ' des parallèles aux

axes OX, OZ, $\frac{y_1^2}{2m}$, y_1, o les coordonnées du point A. Pour que ce point soit un ombilic, il faut et il suffit que le rayon de courbure de la section normale ANZ′ soit égal au rayon de courbure R de P, dont le plan est une section principale des surfaces (1) à cause de la symétrie; d'après le théorème de Meusnier, le rayon de courbure ρ de la section oblique AZ′X′ devra être égal à R cos NAX′; mais cette section, rapportée aux axes AX′ et AZ′, a pour équation

$$z'^2\left(ax'+a\frac{y_1^2}{2m}+by_1+c\right)-2mx'\left(a'x'+a'\frac{y_1^2}{2m}+b'y_1+c'\right)=0,$$

et l'on a

$$\rho=\lim\frac{z'^2}{2x'}=m\frac{a'y_1^2+2mb'y_1+2mc'}{ay_1^2+2mby_1+2mc};$$

d'ailleurs

$$\mathrm{R}\cos\mathrm{NAX}'=\frac{(y_1^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}{m^2}\frac{m}{\sqrt{y_1^2+m^2}}=\frac{y_1^2+m^2}{m}.$$

Pour que ce produit soit égal à ρ, quel que soit y_1, on trouve sans peine qu'on doit avoir

$$a=b=b'=0,\qquad ma'=2c,\qquad c'=c;$$

on peut faire $c=m$ et l'on trouve pour l'équation de la surface cherchée S

$$mz^2+(2x+m)(y^2-2mx)=0. \tag{2}$$

La trace de S sur le plan des xy se compose de la parabole P et de sa directrice D; les intersections par des plans parallèles à OXZ sont des hyperboles homothétiques dont un sommet est sur P, l'autre sur D; S est formée de deux nappes: l'une est convexe et se projette sur OXY à l'intérieur de P; l'autre, à courbures opposées en tous ses points, se projette à gauche de D.

Le plan des yz coupe S suivant trois droites définies par l'équation commune $x=0$ et par l'une des équations suivantes,

$$z=iy,\qquad z=-iy,\qquad t=0,$$

t étant la quatrième variable qu'on introduit pour rendre les équations homogènes. Par l'une quelconque de ces trois droites Δ, on peut faire passer, on le sait, quatre plans différents de OYZ et coupant S suivant les trois droites Δ, Δ', Δ''. Mais on trouve que ces plans se confondent deux à deux et que, de plus, les droites Δ' et Δ'' se confondent à leur tour; les plans qui passent par Δ ne don-

ment donc que deux droites situées sur S, mais chacune d'elles doit être considérée comme quadruple. Les six droites qu'on trouve de la sorte sont définies par les équations

$$2x + z + m = 0, \qquad y = \pm mi;$$
$$2x - z + m = 0, \qquad y = \pm mi;$$
$$t = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \qquad 2x + mt = 0;$$

la dernière droite seule est réelle et à distance finie : c'est la directrice D.

Pour déterminer les lignes asymptotiques, cherchons leurs projections sur le plan des xy. On tire de l'équation (2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(y^2+m^2)^2}{m^2 z^3},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{(2x+m)y(y^2+m^2)}{m^2 z^3}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2mx(2x+m)^2}{m^2 z^3},$$

et l'équation qui détermine les projections des lignes asymptotiques peut se mettre sous la forme

$$(3)\quad [(y^2+m^2)\,dx - (2x+m)y\,dy]^2 = (y^2 - 2mx)(2x+m)^2\,dy^2.$$

Le premier membre s'annule quand on fait

$$y^2 + m^2 = C(2x+m)$$

et nous sommes conduits à substituer à x la variable u définie par l'équation

$$(4)\qquad y^2 + m^2 + u(2x+m) = 0.$$

Le changement de variable est facile à faire et l'équation (3) se transforme dans la suivante

$$(5)\qquad \frac{du^2}{\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}mu} = \frac{dy^2}{y^2+m^2};$$

u doit être > 0 ou $< -m$; mais cette dernière inégalité est impossible; car, eu égard à l'équation (4), elle exigerait que $2x+m$ fût positif en même temps que $m+u$, égal à $\frac{2mx-y^2}{2x+m}$, négatif; x, y seraient les coordonnées d'un point du plan OXY situé entre P et D et, dans cette région, ne se projette aucun point réel de S; u doit être positif et il n'y a de lignes asymptotiques réelles qu'à gauche de D : nous pouvions le prévoir.

L'intégrale de l'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$m(2u + m + 2\sqrt{u^2+mu}) = \lambda^2(\sqrt{y^2+m^2}+y)^2,$$

λ désignant une constante; on en déduit

$$m(2u+m-2\sqrt{u^2+mu}) = \frac{1}{\lambda^2}(\sqrt{y^2+m^2}\mp y)^2.$$

Prenons les signes supérieurs, qui conviennent à l'une des f milles d'asymptotiques. En ajoutant les deux dernières équatio n on obtient la valeur de u et l'on en peut déduire celle de $2x+$ — sous une forme simple :

$$2x+m=-\frac{4m}{\left[\lambda\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2+m^2}}\right)-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+m^2}}\right)\right]^2}.$$

La projection de chaque asymptotique est caractérisée par — la valeur de λ. Quand y tend vers $\pm\infty$, x tend vers $-\frac{m}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)$ ou vers $-\frac{m}{2}(1+\lambda^2)$; il y a deux asymptotes parallèles à OY: chacune d'elles est, en outre, asymptote à une branche de la projection d'une asymptotique de la seconde famille; il y a enfin une asymptote parallèle à OX avec rebroussement à l'infini.

Les lignes de courbure de S semblent difficiles à déterminer; mais on peut se rendre compte de la disposition des lignes de courbure qui passent par un ombilic A. Soient $\frac{\beta^2}{2m}$, $-\beta$, o les coordonnées de A: si l'on prend pour axes la normale AN, la tangente à la parabole et une perpendiculaire à son plan, l'équation de S devient

$$mz^2+4x(\beta y-mx)+\frac{(\beta x+my)^2}{m}-\frac{2x}{m}(\beta^2+m^2)^{\frac{3}{2}}+2\frac{(mx-\beta y)(\beta x+my)^2}{(m^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

La distance de la normale à S au point A à la normale en un point très voisin x', y', z' a pour valeur principale

$$\frac{3\beta m z'(z'^2-y'^2)}{2\sqrt{(y'^2+z'^2)(\beta^2+m^2)^3}};$$

elle est en général du second ordre, mais elle devient du troisième ordre si z' est égal à zéro ou à $\pm y'$; il passe donc au point A trois lignes de courbure : P et deux autres qui la coupent sous des angles de 45° et qui appartiennent au réseau général des lignes de courbure tracées sur la surface.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Œuvres complètes de Christian Huygens, *publiées par la Société hollandaise des Sciences;* tome I : Correspondance (1638-1656). La Haye, Martinus Nyhoff, 1888.

Le premier volume des *Œuvres complètes de Christian Huygens,* publiées par la Société hollandaise des Sciences, contient sa correspondance de 1638 à 1656, c'est-à-dire à partir de l'âge de neuf ans, car Christian est né en 1629. Huygens avait légué ses manuscrits à la Bibliothèque de Leyde en priant deux savants éminents, Volder et Fullenius, d'y choisir ce qu'ils jugeraient digne de l'impression. Huit ans après sa mort, en exécution de ses volontés, on a publié, sous le titre de *Christiani Hugenii Opera posthuma,* les Traités inédits spécialement indiqués dans son testament, et dont quelques-uns, le Traité sur la force centrifuge particulièrement, sont des chefs-d'œuvre.

Les savants éditeurs, en disant dans leur préface toute la difficulté de leur tâche, signalaient d'autres Traités trop incomplets, suivant eux, pour l'impression. On le tint pour dit, et l'éditeur des *Œuvres de Huygens,* en 1724 et 1728, ne paraît pas avoir cherché dans les cartons le moyen, facile cependant, de doubler le prix de la publication. Un savant distingué, Van Swinden, a le premier étudié les précieux manuscrits; il y a puisé les éléments d'un Mémoire historique publié en 1817 : *Huygens, inventeur des horloges à pendule.* Les documents annexés au Mémoire semblèrent du plus haut intérêt; on y trouve, entre autres pièces curieuses, la reproduction d'une horloge à pendule commencée par Galilée et celle d'une horloge trouvée à Florence dans le palais des Médicis; ces dessins se trouvaient parmi les manuscrits de Leyde.

Uylenbroeck, en 1833, a suivi l'exemple de Van Swinden. « Je crois à peine possible, disait-il dans la préface des deux Volumes publiés par lui, que l'on parcoure ces écrits sans une grande jouissance d'esprit et sans en éprouver l'utilité. Les plus illustres philosophes de cette ère glorieuse apparaissent devant nos yeux comme des acteurs en scène, racontant et dépeignant ce que

chacun d'eux, pour le bien et l'avancement de la Science, a pensé, écrit et accompli, non pas une fois, mais de jour en jour. » Sous le titre de : *Christiani Hugenii aliorumque seculi* XVII *virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philosophicæ,* il publia la correspondance de Huygens avec Leibnitz et avec le marquis de L'Hospital. Huygens, dans son testament, avait signalé cette partie de sa correspondance et l'avait soigneusement mise à part. Uylenbroeck avait promis plus encore, et par de nombreuses citations, dans un discours prononcé devant l'Université de Leyde, il montrait toute l'importance du dépôt à peine exploré. La publication, si intéressante pour l'histoire de la Science, et dans plus d'un passage, pour la Science elle-même, ne fut pas accueillie avec toute la reconnaissance qu'elle méritait. Un savant dont le nom commandait l'attention rendit compte de la publication nouvelle et, sans en méconnaître l'intérêt, il se demande, par une contradiction singulière, si une telle œuvre était légitime et bonne. Les grands hommes, en parlant les uns des autres dans l'abandon d'une affectueuse intimité, portaient plus d'une fois des jugements qu'ils auraient refusé de rendre publics. Deux siècles écoulés autorisent-ils l'indiscrétion commise? Huygens avait indiqué, en termes fort vagues il est vrai, ce qu'il destinait au public; il avait désigné les exécuteurs de sa volonté : le droit des publications n'est-il pas épuisé?

La cause véritable de ces scrupules imprévus était l'insertion d'un passage relatif à Newton qui, sans porter atteinte à une gloire que rien ne saurait amoindrir, révélait ou rendait incontestables quelques défaillances de ce grand génie. M. Biot, dans ces publications, n'était pas éloigné de voir une mauvaise action.

Attristé sans doute de l'accueil fait à son utile et consciencieux travail, Uylenbroeck ne donna plus rien.

L'Académie des Sciences d'Amsterdam a compris l'importance scientifique de la publication des manuscrits d'Huygens.

Dans son dernier Rapport sur le projet proposé par M. van de Sande Bakhuyzen, la Commission constate l'existence de deux mille six cents pièces de correspondance auxquelles s'ajoutent plusieurs écrits du père et des précepteurs de Christian Huygens concernant son éducation.

Toutes ces pièces seront publiées.

La Société hollandaise des Sciences de Harlem s'est chargée de la publication. Elle accomplira l'œuvre préparée par l'Académie d'Amsterdam. Cette union des deux Sociétés associées suivant les ressources dont elles disposent, pour une œuvre dont le monde savant tout entier doit les remercier, ne fait pas moins d'honneur au désintéressement scientifique de l'une qu'à la générosité de l'autre.

Aucun génie n'a été plus pénétrant que celui de Christian Huygens, aucun esprit n'a été plus vaste, aucune vie n'a été consacrée avec plus de persévérance et de goût à la contemplation des vérités les plus hautes, à la culture intelligente des arts, au commerce empressé des plus grands esprits de son siècle.

L'enfance de Huygens s'est écoulée dans les conditions les plus favorables au développement de cet admirable génie, qu'aucune circonstance n'aurait pu sans doute condamner à l'obscurité. Son père, Constantin Huygens, seigneur de Zulichem, occupait, près des États de Hollande, une position élevée; il ne négligea rien pour donner à ses cinq enfants une éducation brillante. Très capable de la diriger lui-même, il s'adjoignit de bonne heure un précepteur, Henri Bruno. Le choix fut excellent si l'on en juge par les résultats; les lettres de Bruno semblent cependant d'un pédant prétentieux et sans esprit.

Les deux aînés, Constantin et Christian, étaient également bien doués; leurs études sont communes, et les succès dont le précepteur rend compte pendant les absences du père permettent de présager, avant qu'ils aient dépassé l'âge de onze ans, la gloire de Christian et le rare mérite de Constantin.

L'étude de la langue latine et des auteurs classiques, suivie bientôt par celle du grec, était non seulement la base, mais le seul terrain des premières études. Les deux frères, âgés l'un de dix ans, l'autre de onze, composaient des compliments pour la fête de leur père, et le père leur répondait en vers latins, dans lesquels il loue particulièrement Christian de le comprendre sans secours étrangers :

te
Non alienis
Viribus usum

Ces minutieux détails sont d'un grand intérêt. Constantin et

Christian devaient faire briller toutes les méthodes et faire honneur à tous les maîtres; mais leurs deux frères ont suivi la même voie et sont comme eux devenus des hommes très distingués.

La première lettre du précepteur est du 24 mai 1639. Constantin avait onze ans et deux mois, Christian en avait dix. Bruno les exerce à traduire le livre, classique alors, de Sleidanus : « Breve historiarum memorabilium Epitome »; les deux frères font des thèmes et étudient la prosodie. L'ingénieux précepteur compose lui-même des vers latins que ni Plaute ni Bavius, dit-il, n'auraient avoués. Il les lit à ses élèves en y glissant à dessein quelques fautes; les enfants ne s'y laissent pas prendre. « Adeo jam nunc emunctæ naris sunt, ut confestim ijs, tametsi ne monuerim quidem dolus suboleat. » Pendant ce temps, le troisième frère, Ludovic, fait un thème en attendant l'explication d'une page de Térence, puis le petit Philippe reçoit du précepteur une leçon de musique, tandis que Constantin en donne une à son frère Ludovic. Les mots manquent à Bruno pour exprimer les progrès de Constantin.

Christian ne lui est pas inférieur, c'est la plus grande louange qu'on puisse lui donner.

Christian pour la musique surpasse son frère. Ludovic, moins bien doué, traduit Térence dans sa neuvième année et, dans ses thèmes latins, respecte la grammaire. Philippe seul (Ludovicus proficit satis feliciter; Philippus frigide, sed quid? Puerulus est) ne donne pas entière satisfaction à son maître; « cela viendra », dit-il dans une première lettre. Le grand Erasme, à l'âge de 12 ans, ne savait rien, pas même nager. « Neque natare, neque litterarum elementa, neque litteras novisse affirmabatur. » Quelques semaines après, cependant, Bruno perd courage; « Philippe désapprend » : « Tædet me docendo nihil docere et discendo nihil discentem; imo potius dediscentem ». La lettre est du 25 août 1639; le pauvre enfant, né le 12 octobre 1633, n'a pas encore six ans. Pour pouvoir désapprendre, il faut qu'il soit plus précoce encore que ses frères. Constantin et Christian font toujours merveille. Le précepteur envoie au père les vers latins composés par ses fils après la dixième leçon de prosodie. Le premier distique de Christian est spirituel :

Jam primum tantum compono carmen et oro.
Excuses jam me, post meliora dabo.

Christian n'a pas tenu parole; au grand chagrin de Bruno, Pégase pour lui était rétif : « Nescio quo fato, dit-il, ne unum quidem versiculum exsudare potest. » Constantin Huygens, le père, était un poète latin alors célèbre; il a composé sur l'éducation de ses fils un poème fort rare, introuvable au moins à Paris, et que les éditeurs des Œuvres de Huygens pourraient, sans sortir de leur cadre, réunir à leur belle publication.

Les louanges sur les deux frères sont égales; les préférences de Bruno semblent pourtant pour Constantin. Christian est détourné par les mécaniques : « Ad mechanica sua, εὑρήματα et fabricas, et machinamenta, ingeniosa quidem illa, sed ἀωρεσιτένυσα, usque devolvitur. »

A quoi bon, dit Bruno? « Non expectas tu, domine, dit-il au père, ne que desiderat respublica (in cujus spem ad patris exemplum natus est) ut fabricando faber fiat. » Les deux frères, après ces premières et fortes études, sont envoyés à l'Université de Bréda; ils y prennent le premier rang dans tous les exercices.

Il semble, quand on parle successivement de chaque étude, que les deux frères, pour justifier l'admiration de leurs maîtres, devraient s'y consacrer exclusivement. Le Droit, la Philosophie, le grec et l'hébreu sont étudiés avec une égale ardeur. Dans l'étude des Mathématiques, Christian, âgé de 17 ans, ne tarde pas à surpasser son maître, le très habile géomètre Schooten. Dauber écrit à Huygens père : « M. vostre second fils (c'est Christian), qui est logé chez nous, me donne une grande satisfaction, soit pour la diligence qu'il apporte à ses estudes, soit pour l'honnesteté de ses emportements. Sans vous flatter, Monsieur, je le regarde comme un nouvel Orient, qui ne tardera pas à envoyer ses lumières partout. Et quand je considère l'excellence de son esprit, jointe à la solidité de son jugement et le plaisir qu'il prend aux études du Droit, joint le temps qu'il y employe, je ne puis que je ne vous félicite; je ne manque pas de luy donner de l'exercice, mais il ne manque pas aussi à y bien satisfaire; en toutes nos disputes aussy que publiques que particulières, il est presque toujours des acteurs : il soutiendra samedy prochain en particulier des thèses sur le second Livre du Digeste, et dans trois semaines en public *De matrimonio.* »

imparfaitement démontré par Huygens et que personne encore n'avait trouvé? Descartes ne le dit pas, mais il est aisé de le deviner. Le jeune Christian avait trouvé la loi de la chute verticale des corps pesants et démontré la forme parabolique de la trajectoire; il a écrit en effet à son frère Constantin le 3 septembre 1646 pour lui faire connaître ces deux lois : de tout ceci, dit-il, et encore d'une infinité de choses qui en dépendent, « je n'ai jamais sceu la démonstration avant que de l'inventer moi mesme. »

Les démonstrations de Christian furent aussi envoyées au P. Mersenne qui, moins sévère que Descartes sur la rigueur des preuves, n'éleva aucune objection; mais, plus érudit que lui, c'est bien peu dire, il reconnut dans les énoncés les théorèmes célèbres de Galilée. Descartes lisait fort peu et dédaignait particulièrement les mécaniques de Galilée; il n'y a pas à s'étonner que, connaissant certainement les résultats énoncés déjà par le grand physicien de Padoue, il les tienne pour non démontrés. La démonstration de Christian, il faut l'avouer, n'est pas concluante; il la donne avec détails dans une lettre à Mersenne du 28 octobre 1646; mais on comprend qu'un juge comme Descartes, sans pencher du côté de l'indulgence (telle n'était pas son habitude) ait deviné pour le jeune inventeur de 17 ans de hautes destinées scientifiques.

La démonstration repose sur un postulatum qui, dans notre notation actuelle, peut s'énoncer ainsi :

Si un corps tombant verticalement parcourt pendant un temps t un espace x et qu'on ait la relation

$$x = \varphi(t),$$

la fonction $\varphi(t)$ doit *évidemment* satisfaire à la condition

$$\frac{\varphi(t')}{\varphi(t'')} = \mathrm{F}\left(\frac{t'}{t''}\right).$$

Le principe étant admis, Christian en conclut l'impossibilité de toutes les lois proposées et de celles aussi qu'il imagine, à l'exception de la loi déjà donnée à son insu par Galilée.

Son esprit rigoureux ne dissimule pas l'insuffisance d'une telle preuve, car il termine sa démonstration par cette conclusion :

« Et je ne trouve point d'autres progressions qui ayent quelque régularité et la propriété requise que celle cy. Et pour cela, je *croy* qu'il n'y a point d'ordre du tout ou que c'est celui des nombres impairs. »

La solution générale de l'équation qui définit la fonction est

$$\varphi(t) = Gt^m.$$

La conclusion d'Huygens suppose $m = 2$; d'autres progressions très régulières satisfont à la condition requise; il les aurait trouvées très certainement si, au lieu de chercher les espaces parcourus dans des temps égaux successivement considérés, il avait considéré l'espace total à partir du commencement de la chute.

C'est à cette époque qu'on commence, dans la famille Huygens et parmi les amis, à nommer Christian le jeune Archimède. Jamais surnom ne fut mieux justifié.

Ses frères, sans marcher sur ses traces, en savaient assez pour l'admirer; Constantin s'exerçait à l'Algèbre et consultait Christian, qui lui répond le 3 septembre 1646 :

« Je respons à votre dernière avecq laquelle vous m'avez envoyé la question géométrique, de laquelle vous trouverez la solution dans mes commentaires que j'y ay faictes dessus aussi tost que je l'ay recuë. Pour vous dire la vérité, vous montrez clairement de n'avoir pas beaucoup exercé l'algèbre, au moins pas tant que moy; voicy quelques choses que j'ay trouvées par son ayde. » Et Christian envoie à son frère deux élégants résultats relatifs aux volumes engendrés par un segment parabolique et dont l'un était connu d'Archimède. Si Constantin y prenait intérêt, il avait fait déjà de très fortes études.

Les deux frères travaillaient ensemble à construire d'excellentes lunettes. Constantin écrit à Christian, le 14 octobre 1655, pendant son séjour à Paris :

« Je vous envoye un dessein de Jupiter qui le représente tel comme je l'ay veu ces mois passez plus d'une fois, et encore qu'il faille estre accoustumé à se servir de la lunette pour bien pouvoir discerner ces lignes, si est ce que je suis bien asseuré que je ne me suis pas trompé. J'ay encore écrit à Colvius et à Kalthoven pour une nouvelle forme laquelle le dernier m'a promis de faire. Je ne

toucheray pourtant point à la forme que vous ne soyez icy; car, pour faire des lunettes de 20 pieds, nous aurons à quoy nous occuper touts deux. »

Christian cependant était entré en correspondance avec Mersenne qui, comme on le sait, ne ménageait pas les lettres. Le jeune Archimède y répond et prend rapidement l'un des premiers rangs, le premier peut-être, malgré ses 18 ans, parmi les illustres correspondants du savant minime. Mersenne écrit le 3 janvier 1647 à Constantin Huygens :

« Vostre fils s'est surpassé soymesme.

» Je ne croy pas, s'il continue, qu'il ne surpasse quelque jour Archimède, cousin du roy Gélon. »

Mersenne parle cette fois des théorèmes relatifs au polygone funiculaire. Si l'on songe en effet à la difficulté du problème et à l'insuccès des plus habiles alors qu'ils l'ont abordé, on ne peut trouver, pour apprécier les lettres du jeune étudiant, aucune admiration exagérée.

Galilée avait assigné, sans donner de preuve, la forme parabolique à un fil librement suspendu par ses extrémités. La conjecture n'est pas exacte. Le jeune Christian, en l'étudiant, trouve sur le polygone funiculaire ou, plus exactement, sur le polygone articulé chargé de poids à chacun de ses angles, des théorèmes fort élégants qu'il démontre en toute rigueur. C'est à lui qu'appartient sans contredit le théorème sur la courbe formée par la chaîne d'un pont suspendu, en supposant le poids supporté par chaque partie proportionnel à la portion correspondante du tablier. La courbe est une parabole. Les plus grands géomètres à cette époque, et les plus illustres déjà, auraient certainement mis cette découverte du jeune Archimède à côté de leurs inventions les plus heureuses. En déclarant que, s'il continue, il dépassera Archimède, Mersenne, loin d'exagérer ses mérites, faisait d'inutiles réserves; il aurait pu, sans parler de l'avenir, écrire à Constantin Huygens : Votre fils est en Géométrie l'égal de nos illustres amis Descartes, Pascal, Fermat, Roberval et Wallis.

Le Volume publié par la Société des Sciences de Hollande nous introduit dans l'intimité de cette admirable famille Zulichem, et

nous y trouvons, avec de nouvelles preuves de précocité d'un génie incomparable, de précieux renseignements sur les hautes études au XVIIe siècle et sur les soins donnés dans les grandes familles à l'éducation des enfants. Constantin, en quittant l'Université, est envoyé à Genève, puis à Rome; il se rend ensuite à Paris et à Londres, et, formé par l'usage du monde et le commerce des plus honnêtes gens, il revient consacrer ses talents et ses forces au service de son propre pays.

Christian, dès que ses études sont terminées, fait un voyage en Danemark et dans le Palatinat; il se rend ensuite à Paris et y fait un long séjour, parcourt la France en compagnie de jeunes gens aimables, peu préoccupés de la Science, et prend en passant cependant le titre de docteur à l'Université d'Angers.

La correspondance avec son père et son frère, les liens qu'il établit avec Chapelain, Conrart et Roberval, qui deviennent ses correspondants, seront pour beaucoup de lecteurs un des grands attraits de ce premier Volume. Christian, dont l'esprit semble universel, envoie à son frère des airs de musique notés, il compose lui-même des vers français, et le jeune Hollandais pourrait lutter, dans une langue qu'il a apprise à l'Université, avec nos poètes les plus exercés. Des stances composées à l'occasion de la mort de Descartes sont fort belles, et je ne sais vraiment si aucun poète français, à aucune époque, aurait rejeté comme indignes de lui ces quatre vers du jeune Archimède :

> Cette âme qui, toujours en sagesse féconde,
> Faisait voir aux esprits ce qui se cache aux yeux,
> Après avoir produit le modèle du monde,
> S'informe désormais du mystère des Cieux.

Huygens, on le voit, était admirateur du génie de Descartes. Il juge cependant ses œuvres en toute liberté; une appréciation de sa géométrie dans une lettre à Kinner semble mériter qu'on la signale. Il ne paraît voir dans la Géométrie analytique, comme il fera plus tard pour le Calcul différentiel, que le développement et la mise en œuvre d'idées déjà anciennes. Il a été instruit dans l'Algèbre nouvelle par Schooten, « cujus nunc cognitione nihil æque carum habeo. Hanc si teneas cogitesque a Vieta et Marino Getaldo resuscitatam fuisse, et a Cartesio plenissime restitutam

(nam talem quoque veteribus geometris in usu fuisse certissimis mihi indicijs constat), tum demum merita laude horum virorum labores ingeniumque celebres ».

Christian, dans une lettre à Kinner, parle ainsi des lois du mouvement :

« De motu vero hoc, an et impulsorum leges attigerit, in quibus definiendis plurimi male decepti fuere hactenus, maximeque omnium Cartesius, ut aliquando ostensurum me confido. »

Après avoir remercié les éditeurs savants et dévoués d'un bel Ouvrage qui, dans toutes les bibliothèques, aura droit à une place d'honneur, j'oserai, dans l'espoir qu'il en sera tenu compte dans les Volumes suivants, adresser quelques critiques.

Chaque fois qu'un nom est cité, illustre ou obscur, une note renseigne le lecteur sur le personnage; l'éditeur s'en est fait une loi. Il nous apprend la date de naissance et celle de la mort de Arnoldus Vinnius, de Stampioen de Jonge, de Ezechiel de Decker, et de plusieurs centaines d'autres inconnus; c'est une grande peine qu'il se donne, il faut l'en remercier. La règle est sans exception : Kepler, Descartes, Galilée, Pascal, Fermat, le roi Gélon... ont chacun leur petite notice, exactement semblable à celle de Marie Schyrlæus de Rheita ou de Wilhem Blaeu; c'est trop ou trop peu. On aurait pu, pour eux, comme on l'a fait pour Archimède, supprimer la notice. Mais, en s'imposant cette tâche, pour laquelle une grande érudition doit s'associer à une grande patience, les éditeurs en ont négligé une autre qui serait plus utile à beaucoup de lecteurs. Le texte des lettres est souvent difficile à comprendre; les éditeurs, dans plus d'un cas, ont dû trouver dans le travail préparatoire et le classement des pièces le moyen de l'éclaircir.

Très familiers avec les œuvres d'Huygens, les savants éditeurs n'ont pas supposé sans doute que, s'il est question, dans une lettre publiée par le jeune Archimède, d'un nouvel ouvrage, le lecteur puisse être en doute sur le titre, que la date seule lui rappelle. Si dans une lettre il est question de l'un des fils de Constantin Huygens, on ne devine pas toujours auquel s'adressent les louanges que tous peuvent mériter. C'est quelquefois un petit ennui dans la lecture de ce très beau et très intéressant volume.

Si, comme il n'y a pas lieu d'en douter, la Société Hollandaise des Sciences achève sa grande entreprise, elle aura donné à la Science un Livre unique et, pour plus d'une raison, immortel.

J. BERTRAND.

MULLER (F.). — KALENDER KARTEN FÜR DIE JAHRE 1800-1999. Berlin, R. Hertzberg, 1888.

Sous un très petit volume, cet opuscule, composé de trente-quatre pages dont la surface totale ne représente pas 2^{dmq}, peut remplacer les calendriers des deux cents années comprises entre ces deux dates extrêmes 1800 et 1999, autant dire 2000. Veut-on savoir quel jour de la semaine sera le premier avril 1921 ou à quelle époque a été la fête de Pâques en 1810, les Tables de M. Müller donneront une réponse prompte et d'une recherche facile à ces questions. Ces Tables seraient parfaites si elles prédisaient le temps ou les événements futurs; mais il ne faut pas être trop exigeant.

HORMANN (G.). — UNTERSUCHUNG ZWISCHEN WELCHEN UNDULOIDE UND NODOIDE DIE VON ZWEI FESTEN PARALLELKREISFLÄCHEN BEGRENZT SIND BEI GEGEBENEM VOLUMEN EIN MINIMUM DER OBERFLÄCHE BESITZEN. Inaugural-Dissertation. 53 p. in-8°. Gœttingue, 1887.

Étant donnés deux cercles fixes, placés de façon que la droite qui joint leurs centres soit perpendiculaire à leurs plans, la surface qui, avec les deux cercles, limite un volume donné et dont l'aire est un minimum reçoit, suivant les cas, le nom d'*onduloïde* ou de *nodoïde*. L'étude de ces surfaces offre un intérêt physique évident, puisqu'elles sont des formes d'équilibre pour la surface libre d'un liquide soumis aux seules forces moléculaires. Elles ont été, à ce titre, étudiées expérimentalement par Plateau dans des expériences célèbres. L'équilibre est stable si la surface correspond réellement à un minimum.

M. Hormann observe tout d'abord qu'il suffit de chercher les

surfaces de révolution, limitées aux deux cercles, qui fournissent un minimum; qu'elles soient les seules surfaces à considérer, c'est ce qui résulte en effet des recherches de M. Schwarz dans la démonstration qu'il a donnée de la propriété de la sphère d'avoir une aire minimum parmi les surfaces qui limitent un même volume (¹). On a donc à résoudre un problème de minimum à une seule variable, les conditions du problème impliquant qu'une certaine intégrale définie est constante. L'auteur résume à ce propos les résultats de l'analyse de M. Weierstrass et, en particulier, la théorie du *point conjugué* de l'origine de la courbe cherchée, point tel que tout arc de cette courbe, qui ne le contient pas, réponde effectivement à un maximum ou à un minimum.

Les équations de la courbe qui, par sa révolution autour de l'axe des x, engendre la surface cherchée sont ensuite obtenues sous la forme suivante :

$$x = \beta + \frac{4 + \alpha\lambda}{3\lambda\left(1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}\right)} u + \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}}{\lambda} \frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u}$$

$$y = \frac{\pm \alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}} \frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}.$$

u est le paramètre variable; α, β, λ sont des constantes auxquelles les racines e_1, e_2, e_3 du polynôme du troisième degré qui entre dans la définition de pu sont liées par les formules

$$e_1 = \frac{2(2 - \alpha\lambda)}{3\left[1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}\right]^2},$$

$$e_2 = -\frac{2 - \alpha\lambda - 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{3\left[1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}\right]^2},$$

$$e_3 = -\frac{2 - \alpha\lambda + 6\sqrt{1 - \alpha\lambda}}{3\left[1 + \sqrt{1 - \alpha\lambda}\right]^2};$$

on a l'onduloïde pour $\alpha\lambda$ positif, la nodoïde pour $\alpha\lambda$ négatif. La formation de l'équation qui détermine le *point conjugué* du point initial de la courbe, correspondant à la valeur u_0 du paramètre, remplit la plus grande partie du travail de M. Hormann; cette

(¹) *Nachrichte von der K. Gesellschaft der Wissenschaft. zu Göttingen;* 1884.

équation est fort compliquée; cependant l'auteur parvient à en tirer quelques conclusions intéressantes dans le cas général et il pousse la solution jusqu'au bout dans le cas où l'on a $u_0 = 0$ ou $u_0 = \omega$, c'est-à-dire dans le cas où la valeur initiale de y est un minimum ou un maximum. Enfin, dans les dernières pages, il compare les résultats de son analyse aux recherches expérimentales de Plateau. J. T.

MARKOFF (A.). — TABLE DES VALEURS DE L'INTÉGRALE $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$.

1 vol. in-8°; XXVII-98 p. Saint-Pétersbourg, 1888.

Les valeurs de l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

s'introduisent dans diverses questions de Physique mathématique, d'Astronomie et de Calcul des probabilités : Kramp (1) a publié une table de ces valeurs, de leurs logarithmes et des logarithmes du produit

$$e^{x^2} \int_x^\infty e^{-t^2} dt;$$

Bessel (2) a continué cette dernière Table; M. Radau (3) a remarqué que dans ces diverses Tables les dernières décimales étaient incertaines; il a publié avec sept décimales les valeurs de

$$\log\left[e^{-x^2} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \right];$$

La Table de M. Markoff contient les valeurs de l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

(1) *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres;* Strasbourg, 1796.
(2) *Fundamenta Astronomicæ;* Kœnigsberg, 1878.
(3) *Annales de l'Observatoire de Paris,* 1885.

avec onze décimales, pour x variant de millième en millième depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 3$, et de centième en centième jusqu'à $x = 4{,}80$; pour les valeurs plus grandes, l'intégrale est moindre que $\frac{1}{10^{11}}$; les différences première, deuxième et troisième sont données dans toute l'étendue de la Table où cela est utile, en sorte que, par une interpolation aisée, on puisse toujours obtenir la valeur de l'intégrale avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^{11}}$. Une Table supplémentaire fournit les valeurs de

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

pour x variant de centième en centième de zéro à 3,7; cette Table est à six décimales; au delà de 3,7, la fonction est moindre que $\frac{1}{10^6}$.

Une intéressante introduction rappelle les propriétés de la fonction $\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$, qui intéressent le calcul numérique de ses valeurs et l'indication des procédés de calcul; l'auteur s'est surtout servi de la formule approchée

$$\int_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} e^{-t^2}\,dt = he^{-a^2+\frac{h^2}{6}\left(a^2-\frac{1}{2}\right)},$$

qui est déduite d'une formule générale due à Legendre (¹), et dans laquelle l'erreur est moindre que

$$\frac{h^5}{40}.$$

J. T.

(¹) *Exercices de Calcul intégral*, t. III, § II.

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Bien que la question qui va nous occuper soit, depuis fort longtemps déjà, tombée dans le domaine classique, les diverses solutions qui en ont été données laissent toutes quelque chose à désirer. Pour une équation d'ordre quelconque à une seule fonction inconnue, la formation de l'intégrale générale s'effectue d'une manière absolument empirique; en outre, quand les racines de l'équation caractéristique ne sont pas toutes simples, on ne montre pas que la formule trouvée donne bien l'intégrale générale et l'on passe absolument sous silence la détermination des valeurs des constantes arbitraires répondant à des conditions initiales données. On peut en dire autant et même plus, toujours dans le cas où l'équation caractéristique offre quelque racine multiple, quand il s'agit d'un système d'équations simultanées du premier ordre entre des fonctions inconnues en même nombre.

Il est vrai que ce dernier problème, auquel on peut et même on devrait constamment ramener tous les autres, a été résolu par les formules d'une généralité et d'une élégance extraordinaires que Cauchy a données en 1840 dans le tome I de ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. Mais l'illustre auteur y parvient au moyen d'une induction bizarre, suivie d'une simple vérification qui, l'une et l'autre, laissent leur origine et leur structure dans la plus complète obscurité.

On lira donc, avec un certain intérêt peut-être, la méthode nouvelle, cette fois très directe, que je vais proposer pour établir ces formules de Cauchy et qui met leur mécanisme en pleine lumière. Deux mots suffisent maintenant pour en résumer la description : les exponentielles mêlées à des monômes entiers sont amenées par la récurrence des valeurs initiales des intégrales et de leurs dérivées de tous ordres; quant aux résidus, ils s'introduisent au simple

titre de notation commode et générale des coefficients des diverses puissances de l'argument dans la formule de Taylor.

On peut, de plusieurs manières, élargir la notion habituelle de série *récurrente*, de la suivante, en particulier, qu'il va nous être utile de considérer.

Étant données k séries entières dépendant d'une seule et même variable z,

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{U}(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_m z^m + \ldots, \\ \mathrm{V}(z) = v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \ldots + v_m z^m + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{T}(z) = t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_m z^m + \ldots, \end{cases}$$

je dirai qu'elles sont *co-récurrentes* si leurs coefficients sont liés entre eux, et cela pour toutes les valeurs des indices m, par les k relations ou *récurrences*

$$(2)\qquad \begin{cases} u_{m+1} + a_1 u_m + b_1 v_m + \ldots + h_1 t_m = 0, \\ v_{m+1} + a_2 u_m + b_2 v_m + \ldots + h_2 t_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_{m+1} + a_k u_m + b_k v_m + \ldots + h_k t_m = 0, \end{cases}$$

dont les coefficients a_1, b_1, ..., h_1; a_2, ..., h_2; ...; ..., h_k sont des constantes données quelconques et qui permettent évidemment de les calculer tous successivement, dès que les premiers seulement

$$u_0,\ v_0,\ \ldots,\ t_0$$

sont connus.

La sommation de pareilles séries s'effectue facilement au moyen de ce théorème :

Ces séries sont toutes convergentes pour des valeurs de z à modules suffisamment petits, et, en posant

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1 + a_1 z & b_1 z & \ldots & h_1 z \\ a_2 z & 1 + b_2 z & \ldots & h_2 z \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_k z & b_k z & \ldots & 1 + h_k z \end{vmatrix} = \mathrm{F}(z),$$

polynôme entier de degré k en z, en appelant

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}_1(z), & \mathrm{B}_1(z), & \ldots, & \mathrm{H}_1(z), \\ \mathrm{A}_2(z), & \mathrm{B}_2(z), & \ldots, & \mathrm{H}_2(z), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \mathrm{A}_k(z), & \mathrm{B}_k(z), & \ldots, & \mathrm{H}_k(z), \end{cases}$$

les déterminants d'ordre $k-1$ qui constituent les mineurs complémentaires des éléments semblablement placés dans le tableau du déterminant (3) *ci-dessus, et qui tous, comme ce dernier, sont des polynômes entiers en z, mais de degré $k-1$ seulement, on a les formules*

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{U}(z) = \dfrac{u_0 \mathrm{A}_1(z) + v_0 \mathrm{A}_2(z) + \ldots + t_0 \mathrm{A}_k(z)}{\mathrm{F}(z)}, \\ \mathrm{V}(z) = \dfrac{u_0 \mathrm{B}_1(z) + v_0 \mathrm{B}_2(z) + \ldots + t_0 \mathrm{B}_k(z)}{\mathrm{F}(z)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{T}(z) = \dfrac{u_0 \mathrm{H}_1(z) + v_0 \mathrm{H}_2(z) + \ldots + t_0 \mathrm{H}_k(z)}{\mathrm{F}(z)}. \end{cases}$$

En admettant pour un instant la convergence des séries (1), on trouve facilement que leurs sommes sont liées par les k équations linéaires simultanées

$$(6)\qquad \begin{cases} (1 + a_1 z)\,\mathrm{U} + b_1 z\,\mathrm{V} + \ldots + h_1 z\,\mathrm{T} = u_0, \\ a_2 z\,\mathrm{U} + (1 + b_2 z)\mathrm{V} + \ldots + h_2 z\,\mathrm{T} = v_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_k z\,\mathrm{U} + b_k z\,\mathrm{V} + \ldots + (1 + h_k z)\mathrm{T} = t_0. \end{cases}$$

Car, en ajoutant, par exemple, les seconds membres des formules de définition (1) après les avoir multipliés respectivement par

$$1 + a_1 z, \quad b_1 z, \quad \ldots, \quad h_1 z,$$

on constate immédiatement que, dans le résultat, le terme indépendant de z se réduit à u_0 et tous les autres coefficients à 0, à cause de ce que donne la première des récurrences (2) quand on y fait successivement $m = 0, 1, 2, \ldots$. Et de même pour les équations (6) autres que la première. Or la résolution de ces équations conduit directement aux formules (5).

Maintenant, comme on a

$$(7)\qquad \mathrm{F}(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_k z^k,$$

polynôme qui ne peut s'évanouir pour $z = 0$, il résulte des premiers principes de la théorie générale des fonctions, que les fractions rationnelles (5) sont développables par la formule de Maclaurin jusqu'au plus petit module des racines de l'équation

$$\mathrm{F}(z) = 0.$$

Et les séries entières fournies par ces développements ne peuvent différer des proposées (1), puisqu'elles satisfont aux équations (6) qui équivalent aux récurrences (2).

Chacune de ces séries considérée isolément est évidemment *récurrente* dans le sens ordinaire de ce mot.

Nous avons encore à exécuter la sommation d'une série entière dont le coefficient du terme en z^m est égal à celui d'une série récurrente au diviseur $1.2...m$ près.

Si, $F(z)$ *désignant toujours le polynôme* (7) *de degré* k,

$$\frac{\Omega(z)}{F(z)} = w_0 + w_1 z + \ldots + w_m z^m + \ldots \tag{8}$$

est le développement en série récurrente d'une fraction rationnelle en z *dont le numérateur* $\Omega(z)$ *est de degré* $< k$, *la série entière*

$$w_0 + \frac{w_1}{1} z + \frac{w_2}{1.2} z^2 + \ldots + \frac{w_m}{1.2...m} z^m + \ldots \tag{9}$$

est convergente pour toutes les valeurs de z, *et, en représentant sa somme par*

$$\left\{\frac{\Omega(z)}{F(z)}\right\}$$

on a, pour la calculer, la formule

$$\left\{\frac{\Omega(z)}{F(z)}\right\} = \int_s \frac{s^{k-1}\Omega\left(\frac{1}{s}\right)}{\left\{s^k F\left(\frac{1}{s}\right)\right\}} e^{sz} \tag{10}$$

I. Quand la fraction rationnelle (8) se réduit à la fraction simple

$$\frac{1}{(1 - s_1 z)^q}, \tag{11}$$

s_1 désignant quelque constante non $= 0$, on a évidemment

$$\frac{1}{(1 - s_1 z)^q} = \sum \frac{q(q+1)\ldots(q+m-1)}{1.2...m} s_1^m z^m$$

$$= \frac{1}{1.2...(q-1)} \sum (m+1)(m+2)\ldots(m+q-1) s_1^m z^m.$$

intégral, la recomposition des fonctions simples analogues à

$$\frac{1}{\left(1-s_1\frac{1}{s}\right)^q}$$

amène évidemment sous le signe $\int$ le produit de e^{sz} par l'expression

$$\frac{\Omega\left(\frac{1}{s}\right)}{sF\left(\frac{1}{s}\right)}=\frac{s^{k-1}\Omega\left(\frac{1}{s}\right)}{s^kF\left(\frac{1}{s}\right)},$$

ce qui achève notre démonstration.

III. Notre raisonnement suppose implicitement, il est vrai, que $F(z)$ est de degré *effectif* k, c'est-à-dire que p_k n'est pas nul. Car, s'il en était autrement, la fraction rationnelle (8) se résoudrait en fonctions simples non plus seules, mais accompagnées de monômes entiers en z dont jusqu'à présent nous n'avons rien dit. On constatera néanmoins que la généralité de la formule (10) n'en souffre pas, en tenant compte de la racine simple ou multiple $s=0$ qu'offre alors l'équation

$$s^kF\left(\frac{1}{s}\right)=0$$

et de la relation évidente

$$\frac{z^q}{1.2\ldots q}=\int_{s=0}\frac{e^{sz}}{s^{q+1}}=\int_{s=0}\left(\frac{1}{s}\right)^q\frac{e^{sz}}{s},$$

ce qui se fait avec assez de facilité pour que j'en laisse le soin au lecteur.

Peu de mots nous suffisent actuellement pour traiter notre question principale.

Un système d'équations différentielles quelconques peut toujours être ramené à la forme que dans une autre occasion j'ai nommée *immédiate*, c'est-à-dire à ne contenir que des équations du premier ordre fournissant (quand il s'agit comme ici d'équations différentielles *totales*) les diverses dérivées des fonctions inconnues

déterminant (14); *en appelant*

$$u_0,\ v_0,\ \ldots,\ t_0 \tag{16}$$

k constantes arbitraires et posant

$$\begin{aligned}
\upsilon(s) &= u_0\alpha_1(s) + v_0\alpha_2(s) + \ldots + t_0\alpha_k(s),\\
\varphi(s) &= u_0\beta_1(s) + v_0\beta_2(s) + \ldots + t_0\beta_k(s),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\tau(s) &= u_0\eta_1(s) + v_0\eta_2(s) + \ldots + t_0\eta_k(s),
\end{aligned}$$

les intégrales du système (13), *qui, pour* $x = x_0$, *prennent les valeurs initiales* (16), *sont données par les formules*

$$\left\{\begin{aligned}
u &= \sum_s \frac{\upsilon(s)e^{s(x-x_0)}}{(f(s))},\\
v &= \sum_s \frac{\varphi(s)e^{s(x-x_0)}}{(f(s))},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
t &= \sum_s \frac{\tau(s)e^{s(x-x_0)}}{(f(s))},
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

qui fournissent ainsi les intégrales générales des équations considérées.

En faisant $x = x_0$ dans les équations (13) et dans toutes celles qui s'en déduisent par des différentiations indéfinies, on aperçoit immédiatement que les valeurs initiales des intégrales et de leurs dérivées de tous ordres

$$\begin{array}{cccccc}
u_0, & u_1, & \ldots, & u_m, & \ldots\\
v_0, & v_1, & \ldots, & v_m, & \ldots\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,\\
t_0, & t_1, & \ldots, & t_m, & \ldots
\end{array}$$

sont liées par les récurrences (2). Il en résulte que les sommes des séries co-récurrentes en z qui ont ces valeurs initiales pour coefficients sont fournies par les formules (5) et, par suite, que celles des séries entières en $(x - x_0)$ se déduisant de ces dernières par la substitution de $x - x_0$ à z et l'apposition du diviseur $1.2\ldots m$ sous leurs termes en $(x - x_0)^m$, c'est-à-dire les intégrales du système (13) ayant les quantités (16) pour valeurs initiales, peuvent s'obtenir par l'application de la formule (10).

Ces intégrales sont donc bien les seconds membres des formules (17), car on a évidemment

$$f(s) = s^k \mathrm{F}\left(\frac{1}{s}\right),$$

et de même les éléments du tableau (15) sont précisément ce que deviennent ceux semblablement placés dans le tableau (4) quand on les multiplie par s^{k-1}, après y avoir changé z en $\frac{1}{s}$.

La combinaison des formules (17) avec les résultats fournis par la méthode de la *variation des constantes arbitraires* fait ensuite immédiatement connaître les termes à y introduire pour qu'elles donnent les intégrales à mêmes valeurs initiales, de ce que deviennent les équations (13) quand, au lieu d'être nuls, leurs seconds membres sont des fonctions données quelconques de x.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Œuvres de Lagrange, publiées par les soins de M. A. Serret, sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. Tome XIII : *Correspondance de Lagrange avec d'Alembert.*

La Correspondance de Lagrange avec d'Alembert intéresse surtout les géomètres. Les illustres amis, unis par leur commun amour pour la Science, n'ont eu que de très rares relations personnelles : leur intimité est celle de l'esprit. Quand Lagrange se marie, d'Alembert, qui depuis plusieurs années l'appelle cher et illustre ami, l'apprend d'une manière indirecte. « On m'écrit, lui dit-il, que vous avez fait ce qu'entre nous autres philosophes nous appelons le saut périlleux. Je pense qu'un grand mathématicien doit savoir calculer son bonheur et qu'après avoir fait ce calcul vous avez trouvé le mariage pour solution. » Lagrange, alors âgé de trente et un ans, lui répond : « J'ai reçu vos lettres et vos compliments; je vous en remercie de tout mon cœur. Je ne sais si j'ai bien ou mal calculé, ou plutôt je crois n'avoir pas calculé du tout, car j'aurais peut-être fait comme Leibnitz, qui, à force de réfléchir, ne put jamais se déterminer. Il m'a paru que la chose était si indifférente d'elle-même qu'elle ne valait pas la peine de vous en entretenir. » Puis il lui parle du problème des tautochrones. Il faut moins encore chercher dans les Lettres de Lagrange des renseignements sur les affaires publiques. Une seule fois il lui arrive d'en dire un mot, en 1779 : « Il y a apparence que toute l'Europe sera en feu l'année prochaine. Heureux ceux qui peuvent n'être que spectateurs de cette tragi-comédie, dont le dénoûment le plus sûr sera d'avoir sacrifié quelques centaines de mille hommes à l'ambition de quelques particuliers! » Lorsque d'Alembert éprouve le plus grand, presque le seul sérieux chagrin de sa vie et perd Mlle de Lespinasse, Lagrange ignorait leur vie commune.

C'est incidemment seulement que l'on rencontre dans la Correspondance un nom que d'Alembert aimait à écrire. « Je serai charmé, dit-il, de cultiver la connaissance de M. le marquis de Caraccioli; j'espère que j'aurai le plaisir de le voir souvent chez

Mlle de Lespinasse, qui rassemble des gens de mérite de toutes nations et de tous états, et que M. le marquis Caraccioli a déjà vue à son passage à Paris. » Quand il déménage et se rend au faubourg Saint-Germain, il en informe Lagrange, sans lui rien dire des affections qui l'y attirent.

D'Alembert, dès les premiers écrits du jeune professeur à l'école d'artillerie de Turin, a deviné son rare mérite. Il est charmé par ses Mémoires sur la théorie du son et lui adresse spontanément de vives félicitations. « Vous êtes destiné, lui écrit-il, à jouer un grand rôle dans la Science. » Tel est le début de leurs relations. D'Alembert sait observer les distances. Il envoie dans la même Lettre des compliments à Foncenex, qui lui paraît habile mathématicien. Deux mois après, il prie le jeune Lagrange d'accepter les deux premiers Volumes de ses Opuscules mathématiques. « J'y ai parlé de vous, lui dit-il, avec la haute estime que vos talents m'ont inspirée. »

Lagrange, qui n'a pas répondu d'abord aux avances venues de si haut, prend occasion, six mois après, de l'envoi d'un Volume des *Miscellanea Taurinensia* pour le remercier enfin. « Ce délai, dit-il pour excuse, ne doit être attribué qu'au désir que j'avais de pouvoir mieux vous prouver toute ma reconnaissance en vous présentant le second Volume des *Mélanges* de notre Société. » Lagrange indique ensuite à d'Alembert, avec grande liberté, quelques points importants de la Physique mathématique sur lesquels il ne peut s'accorder avec lui. « Je vous prie, lui dit-il, d'examiner mes raisons sans prévention et de me faire part de vos remarques, dont je ne manquerai pas de profiter. »

Un tel début aurait pu diminuer l'empressement de plus d'un personnage, même moins illustre et moins haut placé que d'Alembert. Lagrange était fort négligent. « Je ne sais, écrit-il dans une occasion analogue, si j'ai commis une impolitesse envers le banquier qui m'a envoyé la lettre de change pour l'argent du prix en ne lui faisant pas de réponse; mais j'ai pensé qu'elle ne servirait qu'à le mettre inutilement en frais de port de lettre. »

Lagrange vient passer quelques mois à Paris. En retournant à Turin, il s'arrête à Genève. Recommandé par d'Alembert, il est invité par Voltaire. « L'illustre écrivain était ce jour-là en humeur de rire, écrit Lagrange; ses plaisanteries tombèrent sur la

religion; ce qui amusa beaucoup toute la compagnie. C'est un original qui mérite d'être vu. » Puis il parle des cordes vibrantes. La situation de Lagrange à Turin était très gênée. Il avait 25o écus d'appointements. Le roi de Sardaigne lui a fait des promesses, mais il n'est pas comme César, *ad pœnas lentus, ad præmia velox*. « On regarde à Turin, dit-il, la science dont je m'occupe comme très inutile et même ridicule, et l'on aurait regret à son argent si l'on faisait quelque chose pour un géomètre. » *On* c'est le roi; Lagrange n'a pas osé confier cette lettre à la poste.

D'Alembert, tout-puissant à Berlin, saisit la première occasion de procurer à Lagrange une situation moins précaire. « M. Euler, lui écrit-il le 6 mars 1766, s'en va, dit-on, à Saint-Pétersbourg pour quelque mécontentement qu'il a eu à Berlin. Je lui ai écrit pour l'en dissuader. S'il s'en va et que vous vouliez le remplacer, vous n'avez qu'à m'écrire un mot. Je ferai de mon mieux pour vous servir. » — « On fait tout ce qu'on peut pour retenir Euler, écrit-il un mois après, mais il paraît avoir grande envie de s'en aller. Je ne sais ce qu'il en sera : mais en cas qu'il parte et que le roi de Prusse me croie, M. Euler aura un successeur qui le vaut bien. »

Le roi de Prusse croit d'Alembert et le remercie. « Je dois à vos soins, lui dit-il, d'avoir remplacé un géomètre borgne par un géomètre qui a ses deux yeux. » Le pauvre Euler, en effet, était bien près d'être aveugle et le devint quelques années après. Lagrange reçut de Frédéric une pension de 1500 écus, valant 6000 francs de France, et les frais largement payés du voyage de Turin à Berlin en passant par Paris et par Londres.

On a cité plusieurs fois, avant la publication de la Correspondance, une phrase d'une Lettre de d'Alembert à Lagrange qui, dit-on, rendit les négociations difficiles; elle ne se trouve pas dans le Volume aujourd'hui imprimé. D'Alembert avait écrit : « Il est juste que le plus grand géomètre soit appelé auprès du plus grand roi. » Lagrange avait rendu la Lettre publique. Le roi de Piémont trouva l'argument offensant pour lui-même et pour son pays, et telle serait, d'après une tradition qui remonte à Plana, neveu de Lagrange, la cause véritable des difficultés qu'une demande directe de Frédéric au roi de Piémont put seule aplanir. En prenant place à Berlin parmi ses Confrères, Lagrange, d'après les usages de l'Académie, leur devait, non un remerciement, car

ils n'étaient pour rien dans sa nomination, mais un compliment. Celui qu'il leur adressa n'a pas jusqu'ici trouvé place dans la collection de ses Œuvres; il a été publié par le savant M. Genocchi et est assez court pour que nous le citions en entier : « Messieurs, je ne ferai point un discours en forme pour vous témoigner ma reconnaissance de l'honneur que je reçois. La fatigue du voyage et les occupations que j'ai eues depuis mon arrivée ne m'ont encore permis aucune sorte d'application. Et d'ailleurs il me semble qu'on n'est guère en droit d'exiger une pièce d'éloquence d'un géomètre qui s'est livré dès son enfance aux études les plus abstraites. Je me contenterai donc, Messieurs, de vous exprimer de la manière la plus simple, et en même temps la plus vraie, les sentiments dont je suis pénétré à la vue de vos bontés, et je tâcherai de mériter ces mêmes bontés par mon attachement pour vous et par mon zèle pour la gloire des Sciences et des Lettres, que vous cultivez avec tant de succès; sur ce point seul je me flatte de ne point céder à mon illustre prédécesseur. Puissé-je remplir en quelque façon le vide qu'il a laissé dans cette Académie, et répondre aux intentions de notre grand monarque, qui, au milieu de sa gloire, daigne s'intéresser à elle et l'honorer de sa protection ! et puissiez-vous, Messieurs, trouver en moi un Confrère qui ne soit pas tout à fait indigne de votre estime et de votre amitié ! »

L'empressement à servir les hommes de mérite était infatigable chez d'Alembert. Peu de temps après Lagrange, il recommandait Foncenex, élève de Lagrange à Turin, dont les premiers écrits, dignes d'un tel maître, promettaient un grand géomètre. Il vécut plus de quarante ans encore, officier dans l'armée piémontaise, sans rappeler jamais aux savants son brillant début dans la Science. Apprenant que le chimiste très éminent Margraff est en danger de mort, d'Alembert écrit à Lagrange : « J'ai appris qu'il y avait à Stockholm ou à Upsal un très habile homme, Scheele. J'en ai parlé au roi. » Il intervient aussi en faveur de Lambert, non seulement sans le connaître personnellement, mais sans avoir reçu de ses travaux une impression très favorable. Lagrange l'a éclairé : « J'ai oublié, écrit-il à Lagrange, de vous demander ce que vous avez pensé de M. Lambert. Ce que j'ai lu de lui jusqu'à présent ne me paraît pas de première force. » Lambert avait be-

soin d'aide cependant. « On m'a pour ainsi dire presque forcé, écrit Frédéric, de prendre la plus maussade créature qui soit dans l'univers, pour la mettre de notre Académie; il se nomme Lambert, et, quoique je puisse attester qu'il n'a pas le sens commun, on prétend que c'est un des plus grands géomètres de l'Europe. Je ne me propose pas de sitôt d'avoir l'honneur de m'entretenir avec lui. » Lagrange, beaucoup meilleur juge, éclaire d'Alembert; grâce à lui, la position de Lambert à Berlin fut digne de son mérite.

La sympathie de Lagrange pour Lambert se traduit par une des pages très rares de la Correspondance où il quitte le terrain de la pure Science pour exprimer en termes excellents une véritable émotion. « Je suis tout triste de la mort de mon Confrère M. Lambert; c'est une perte irréparable pour notre Académie et pour l'Allemagne en général; il possédait éminemment le talent rare d'appliquer le calcul aux expériences et aux observations, et d'en extraire, pour ainsi dire, tout ce qu'il pouvait y avoir de régulier. Sa *Photométrie*, Ouvrage peu connu en France et même en Allemagne, est un vrai modèle dans ce genre de recherches; il était d'ailleurs assez versé dans le calcul, et il n'ignorait aucune des différentes branches de l'Analyse et de la Mécanique. Les trois Volumes de Mémoires qu'il a donnés en allemand, il y a quelques années, contiennent d'excellentes choses, et il serait à souhaiter que quelqu'un voulût les traduire. Il y a dans toutes ses recherches une grande netteté, et il avait surtout l'art de parvenir aux résultats les plus simples, même dans les questions qui paraissaient les plus compliquées. Il s'est laissé mourir peu à peu de consomption, n'ayant jamais voulu, excepté dans les derniers quinze jours, ni prendre aucun remède ni même consulter un médecin. Il avait reçu de la nature un caractère et un tempérament admirables; toujours content de lui-même, il n'a jamais montré la moindre envie ni jalousie. Il avait une façon de penser et d'agir très naïve; ce qui a souvent indisposé contre lui les personnes qui ne le connaissaient pas particulièrement; mais, quand on était parvenu à le connaître à fond, on ne pouvait s'empêcher de concevoir pour lui toute l'estime et l'amitié qu'il méritait; c'est ce qui m'est arrivé. Si j'envie sa vie, j'envie tout autant sa mort, qui a été des plus douces et dont il ne s'est pas même douté. »

D'Alembert a deviné le jeune Laplace sur la lecture de ses pre-

miers travaux, comme il avait deviné le jeune Lagrange. L'admiration est moindre, mais la différence est justifiée : les débuts de Laplace n'ont pas eu l'éclat de ceux de Lagrange. « Il y a ici un jeune homme nommé M. de la Place, professeur de Mathématiques à l'École militaire, où je l'ai placé, écrit d'Alembert. Ce jeune homme a beaucoup d'ardeur pour la Géométrie, et je lui crois assez de talent pour s'y distinguer. Il désirerait s'y livrer entièrement, et, comme sa place de professeur lui prend beaucoup de temps, il en voudrait une autre qui le laissât entièrement libre. Notre Académie ne pourrait le satisfaire à ce sujet, parce que les pensions viennent très tard, quelquefois au bout de vingt-cinq ans, et que d'ailleurs il n'en est pas encore, s'étant vu préférer très injustement, malgré mon suffrage et celui de presque tous nos géomètres, un sujet très inférieur à lui et qui, étant professeur au Collège royal, se trouvait appuyé d'un grand nombre d'académiciens. Il a pensé qu'il trouverait peut-être à Berlin ce qu'il ne pouvait pas avoir à Paris, que le roi et l'Académie voudraient peut-être bien le recevoir à votre recommandation et à la mienne : je dis à votre recommandation, car il m'a montré une lettre de vous par laquelle il me paraît que vous êtes content de quelque chose qu'il vous a envoyé. Je crois qu'on rendrait service aux Sciences en mettant ce jeune homme à portée de s'y livrer sans réserve. La question est de savoir : 1° s'il peut actuellement être placé à l'Académie de Berlin ; 2° s'il pourrait y jouir dès son entrée d'un revenu suffisant pour vivre, comme 3000 à 4000 livres, argent de France ; 3° si vous êtes dans une position à vous intéresser pour lui sans vous faire de tracasseries ; 4° si, dans la supposition où vous ne voudriez pas vous en mêler, je pourrais écrire au roi et lui proposer M. de la Place comme un sujet que je connais, que j'estime et dont vous pourrez vous-même lui rendre témoignage. Je vous serai très obligé, mon cher ami, de vouloir bien me répondre à ce sujet le plus tôt qu'il vous sera possible. Vous voudrez bien me dire aussi, dans le cas où je pourrais proposer M. de la Place au roi, s'il n'y aurait pas indiscrétion à demander pour lui 4000 livres de France, faisant environ 1000 écus d'Allemagne. Réponse, je vous prie, et directement par la poste, car ce jeune homme, pour lequel je m'intéresse fort, désirerait de savoir ce qu'il peut espérer et tenter. »

a réponse de Lagrange est excellente : « Mon cher et illustre
, pour répondre à la confiance que vous me témoignez dans
e Lettre du 1er janvier, je vais vous dire avec toute la sincérité
ible ce que je pense sur l'affaire dont il s'agit. Je suis d'abord
convaincu que l'Académie ferait une excellente acquisition
la personne dont vous me parlez; cette acquisition serait
e d'autant plus importante pour elle que la classe de Mathé-
ques est très mince, n'étant composée que de MM. de Cas-
a, Bernoulli et moi : ainsi vous jugez bien que je serais très
né et flatté de pouvoir contribuer en quelque manière à rendre
rvice à l'Académie et à ma classe en particulier. Mais : 1° je
ien éloigné de croire que j'aie auprès du roi le crédit néces-
pour faire réussir une pareille affaire, et je craindrais même
e trouvât mauvais que je prisse la liberté de lui en écrire;
doute fort que l'Académie voulût faire, à ma réquisition,
e démarche pour cela auprès de Sa Majesté, car je ne pour-
ère compter sur les voix des membres de ma classe, et encore
ur celles des autres; d'ailleurs je ne regarde pas sa recom-
ion comme très efficace, puisque, une seule fois qu'elle s'est
e à proposer au roi quelques sujets pour la classe de Philo-
elle n'a reçu aucune réponse. Tout bien considéré, je crois
nieux ce sera que vous proposiez vous-même directement
diatement à Sa Majesté la personne en question. Si elle
tée, l'affaire est faite, et l'Académie recevra ordre de la
u nombre de ses membres et de lui assigner la pension
isse : c'est de quoi j'ai déjà vu plusieurs exemples. Je
eillerais même de ne faire aucune mention de moi dans
que vous écrirez au roi dans cet objet, et cela pour éviter
cabale, qui ne pourrait que nuire au succès de l'affaire.
n cher ami, mon avis sur la meilleure manière de traiter
re. Quant à la pension, je crois comme vous qu'elle ne
re au-dessous de 1000 écus, argent de ce pays, et je
avec cela votre ami pourra vivre ici aussi bien qu'avec
à Paris. Il est vrai que la plupart de mes Confrères ont
s moindres, mais aussi se plaignent-ils, et je ne vou-
u'il vînt ici augmenter le nombre des mécontents.
'ai aucune part au maniement des affaires économi-
idémie, je ne puis pas vous dire au juste combien sa

caisse pourrait fournir par an, mais je crois bien qu'elle pourra encore supporter une pension de 1000 écus, et même au delà. Je crois avoir répondu à tous les articles de votre Lettre; mais, comme je m'intéresse véritablement pour la personne que vous désirez de servir, tant à cause de son propre mérite que parce qu'elle est de vos amis, je crois devoir encore ajouter deux mots, pour que vous puissiez prévenir cette personne sur quelques points essentiels : il est très rare que les académiciens reçoivent des augmentations de pension, quelque bien ou mal qu'ils soient, de sorte que, pour que votre ami ne soit jamais dans le cas de regretter d'être venu ici, il faut qu'il puisse se promettre d'avance d'être toujours également content de ce qu'il obtiendra à son arrivée; 3° il faut que l'attrait des Sciences et l'envie de s'y livrer entièrement soient assez forts en lui pour pouvoir lui tenir lieu des agréments et des avantages qui sont attachés au séjour et à la société de Paris. Toute personne qui peut se suffire à elle-même et qui ne veut se mêler que de ce qui la regarde immédiatement peut être assurée de trouver ici toute la tranquillité nécessaire au bonheur d'un philosophe.

» Il faut donc que votre ami se tâte bien là-dessus avant de s'engager à rien; surtout je ne voudrais pas que le dépit de s'être vu préférer, à l'Académie, un concurrent inférieur en mérite à lui entrât pour la moindre chose dans la résolution qu'il doit prendre; car, au bout de quelque temps, il commencerait à se repentir du parti qu'il aurait pris, surtout en voyant que ceux qui sont actuellement après lui auraient déjà fait leur chemin, tandis que lui en serait toujours au même point. Car, quoique dans votre Académie les pensions viennent assez tard, cependant il paraît que le titre d'académicien est une recommandation suffisante pour obtenir des places et des pensions étrangères; on en voit un grand nombre d'exemples parmi vos Confrères. Il y a encore une autre considération importante à faire sur cette matière : c'est qu'il est bien difficile que quelqu'un s'expatrie sans conserver une espèce d'envie ou de velléité de retourner tôt ou tard dans son pays, et il me semble que les Français, et surtout les Parisiens, sont encore plus dans ce cas que ceux des autres nations. Il s'agit donc d'examiner si votre ami, en quittant la place qu'il a à Paris, pourrait conserver quelque espérance d'en obtenir encore quelqu'une lorsqu'il voudrait y retourner. »

Si d'Alembert est un ami dévoué et un protecteur empressé du mérite, il ne dissimule pas ses antipathies, et la médiocrité le trouve impitoyable.

Daniel Bernoulli, Fontaine, Frisi, Boscowich et Lalande sont fort maltraités. Inégaux par le mérite et par le caractère, ils ne sont pas jugés dans les mêmes termes.

D'Alembert est pour Bernoulli absolument injuste, et Lagrange, il faut le dire, ne paraît pas priser beaucoup ce grand talent d'un genre si différent du sien.

« J'ai lu, écrit-il, le Mémoire de Daniel Bernoulli sur la théorie des tuyaux d'orgue; il n'a fait que développer dans un long verbiage ce que j'avais mis dans quelques formules algébriques. »

« Vous m'aviez promis, écrit dans une autre occasion d'Alembert à Lagrange, de donner un peu sur les doigts à Daniel Bernoulli, et vous ferez bien. »

Lagrange n'aimait pas la controverse et trouvait, comme Newton, le repos *rem prorsus substantialem*.

C'est d'Alembert qui se charge, dans le quatrième Volume de ses Opuscules, de donner sur les doigts à Bernoulli : « Un célèbre géomètre, dit-il, qui n'est ni M. de Lagrange ni M. Euler, prétend prouver par un singulier raisonnement... Il ne s'agit pas de *conjecturer*, mais de *démontrer*, et il serait dangereux (quoique, à la vérité, ce malheur soit peu à craindre) qu'un genre de démonstration si singulier s'introduisît en Géométrie. Ce qui pourra seulement paraître surprenant, c'est que de pareils raisonnements soient employés comme démonstratifs par un mathématicien célèbre... »

La véritable raison de l'irritation de d'Alembert est le Calcul des probabilités. D'Alembert, personne ne l'ignore, n'a jamais voulu en accepter les principes. Lagrange n'aime pas les discussions. En recevant le Volume des *Opuscules*, où d'Alembert conteste les théories les mieux démontrées, il se borne à lui répondre : « J'ai reçu les exemplaires du cinquième Volume de vos *Mélanges* que vous m'avez annoncés... A l'égard de vos difficultés sur le Calcul des probabilités, je conviens qu'elles ont quelque chose de fort spécieux, qui mérite l'attention des philosophes plus encore que celle des géomètres. »

Le refus de s'expliquer est très clair. Lagrange, quelque temps après, à l'occasion d'un programme de concours philosophique,

écrivait : « Vous avez raison de croire que je n'ai eu aucune part au programme métaphysique. Cette science, si c'en est une, n'est nullement de mon gibier... » La question, il est vrai, était singulière. Lagrange, qui ne s'émeut pas facilement, en parle sans s'indigner et sans rire : « Dans toute la nature on observe des effets : il y a donc des forces. Mais ces forces, pour agir, doivent être déterminées. Cela suppose qu'il y a quelque chose de réel et de durable, susceptible d'être déterminé, et c'est ce réel et ce durable qu'on nomme *force primitive et substantielle*. En conséquence, l'Académie demande : *Quelle est la notion distincte de cette force primitive et substantielle qui, lorsqu'elle est déterminée, produit l'effet, ou, en d'autres termes, quel est le* fundamentum virium? Or, pour concevoir comment cette force peut être déterminée, il faut ou prouver qu'une substance agit sur l'autre ou démontrer que les forces primitives se déterminent elles-mêmes. Dans le premier cas, on demande en outre : *Quelle est la notion distincte de la puissance passive primitive? Comment une substance peut agir sur l'autre? Et enfin comment celle-ci peut pâtir de la première?* Dans le second cas, il faudra expliquer distinctement : *D'où viennent à ces forces les bornes qui limitent leur activité? Et pourquoi la même force peut tantôt produire un effet et tantôt ne le peut pas? Comment, par exemple, quelqu'un peut concevoir distinctement ce dont un autre l'instruit, et qu'il n'a pas pu inventer lui-même? Pourquoi on ne peut pas reproduire dès qu'on le veut les idées qu'on a oubliées quoiqu'on ait pu les produire autrefois, et que l'axiome subsiste toujours : que du pouvoir et du vouloir réunis l'action doit suivre? Ou enfin, quelle différence réelle il y a, si la force primitive tire tout de son propre fonds, entre se représenter distinctement une musique savante d'un grand compositeur à laquelle on assiste, la solution d'un problème difficile trouvée par un géomètre de premier ordre, et être soi-même l'auteur de cette musique, de cette solution, ou du moins être capable de composer une musique, de résoudre un problème de la même force, dès qu'on le voudra bien sérieusement?* »

Frédéric, partageant, comme presque toujours, l'avis de d'Alembert, fit, d'après son conseil, remplacer la question par une autre fort différente, suggérée par le géomètre philosophe : « Est-il

utile au peuple d'être trompé, soit qu'on l'induise dans de nouvelles erreurs ou qu'on l'entretienne dans celle où il est? » Cette question, plus facile à comprendre, n'appartenait pas non plus au gibier de Lagrange. Il n'y ajoute qu'une seule réflexion : « On s'attend à recevoir bien du verbiage. » Le verbiage, pour lui, est un grand défaut; il le reproche à Daniel Bernoulli et regrette de le rencontrer jusque dans la Mécanique d'Euler, où il y a, dit-il, d'excellentes choses.

Fontaine est beaucoup plus maltraité par les deux amis que Daniel Bernoulli. D'Alembert cependant, au moment de la mort du Confrère dont il estime fort peu les Ouvrages, le signale comme un grand génie. Le jugement, après la lecture des lettres qui l'ont précédé, est fait pour surprendre quelque peu Lagrange, mais il accompagne un bon mot, dont la médiocrité de Fontaine émousserait la pointe : « M. Fontaine est mort le 21 du mois dernier, dans un état fort misérable, accablé de dettes et même ruiné, le tout par sa faute, et pour avoir eu la vanité de vouloir être seigneur de paroisse et d'avoir acheté pour cela une terre qu'on lui a vendue un prix fou et qu'il n'a pas pu payer. C'était un homme de génie, mais d'ailleurs un fort vilain homme : la société gagne à sa mort encore plus que la Géométrie n'y perd. » La vérité, pourrait-on ajouter, quand on fait de Fontaine un homme de génie, perd encore plus que n'y peut gagner l'épigramme.

Boscowich n'était pas sans mérite; mais il était jésuite et intrigant, deux raisons pour déplaire à d'Alembert : « J'admire et je respecte, mon cher ami, écrit d'Alembert à Lagrange, la modestie avec laquelle vous parlez de vos excellentes productions, tandis que nous avons ici le jésuite Boscowich, qui, à force de parler aux femmes de la cour des belles choses qu'il a faites et que nous ignorons tous deux, s'est fait donner déjà 8000 livres de pension, en attendant mieux, pour avoir, dit-il, un carrosse, dont il ne saurait se passer. Il prétend de plus forcer les portes de l'Académie et s'y faire recevoir incessamment, quoiqu'il n'y ait pas même de place vacante. C'est ce qu'il faudra voir. Vous et lui êtes une preuve bien sensible de ce que vous me disiez il y a quelque temps, que *les prétentions sont en raison inverse du mérite.* »

Ce théorème de morale satirique a été en effet énoncé par Lagrange.

Lagrange fait des réserves sur la médiocrité de Boscowich : « Ce que vous me dites du P. Boscowich, répond-il à d'Alembert, ne me surprend pas, je connais depuis longtemps la *briga fratesca;* il n'est sûrement pas indigne d'être de votre Académie, dont tous les membres ne sont pas des d'Alembert, mais il le deviendrait s'il prétendait y entrer d'une manière irrégulière. »

D'Alembert associe au nom de Lalande des épithètes que l'éditeur remplace par des points. Nous imitons sa réserve. Quant au secrétaire perpétuel, Grand-Jean de Fouchy, il se contente de l'appeler imbécile et viédase. Quand d'Alembert se réconcilie avec Lalande, Lagrange en témoigne quelque étonnement. « A propos de Lalande, lui répond d'Alembert, il est vrai que nous nous sommes raccommodés, parce qu'il en a témoigné un grand désir et qu'au fond je suis bon diable. »

Le nom d'Euler revient souvent dans la Correspondance. Les deux amis en parlent toujours avec déférence, mais d'Alembert sans grande sympathie. J'oserai même relever dans ces documents authentiques un tort assez sérieux de d'Alembert envers l'illustre et vénérable doyen des géomètres. Les prix académiques, fondés par M. de Meslay, avaient un grand attrait pour les plus illustres savants. Euler, les frères de Bernoulli, leur neveu Daniel et Lagrange se présentaient presque à chaque concours sans cacher aucunement leur désir de recevoir la somme promise, égal au moins à la satisfaction de l'emporter sur leurs rivaux. Lagrange avait obtenu déjà cinq prix et Euler douze au moins; on n'en donnait alors qu'un seul tout au plus chaque année. Quand la question proposée n'était pas résolue, l'Académie accordait un délai et le prix était doublé. L'Académie avait proposé la théorie de la Lune; aucune pièce ne fut envoyée. Le prix ayant été remis, on reçut un Mémoire d'Euler, sans signature, c'était la règle; mais, en le recevant de Saint-Pétersbourg, d'Alembert devina qu'il était d'Euler; le Mémoire, fait à la hâte, était fort incomplet; le prix n'étant pas donné, la question fut remise au concours; mais Lagrange hésitait, par un sentiment de déférence et de modestie, à disputer le prix au vieil Euler, dont les encouragements, avant même ceux de d'Alembert, avaient salué ses débuts dans la Science. D'Alembert l'y invite avec insistance : « Quoique le peu de succès du travail de M. Euler, répond Lagrange, dût plutôt me décourager de

concourir que m'y inviter, j'espère que je pourrai au moins faire nombre parmi les concurrents et je vous promets de vous envoyer quelque chose de ma façon, ne fût-ce que pour vous donner une marque de ma déférence. » D'Alembert, pour le décider complètement, lui envoie l'analyse détaillée de la pièce d'Euler. « Voilà, mon cher et illustre ami, ajoute-t-il, un précis assez fidèle de ce Mémoire et je vous laisse à juger si l'Académie a été injuste dans le parti qu'elle a pris; elle aurait plutôt à se reprocher trop d'indulgence que trop de rigueur. » L'indulgence consistait à remettre la question au concours, en donnant à Euler la moitié du prix ; ce qui réduisait le prix nouveau à un prix double au lieu d'être triple. Lagrange, mis au courant des idées et des tentatives d'Euler, se décida à lui disputer le prix double, car l'infatigable vieillard, complètement aveugle déjà, voulut concourir de nouveau; il partagea le prix avec Lagrange.

Le procédé de d'Alembert est d'autant moins correct qu'il devait en réalité prononcer à lui seul les jugements. Clairaut était mort et d'Alembert écrivait à Lagrange en lui envoyant l'extrait du Mémoire d'Euler : « Je vous demande le secret parce que je suis un des juges, et même, entre nous, le seul des cinq commissaires qui puisse apprécier le travail. » — « Je ne crains pas, écrit quelque temps après d'Alembert, de vous constituer en frais de port de lettre pour vous apprendre une nouvelle qui sûrement ne vous fera pas plus de plaisir qu'à moi; c'est que vous avez partagé avec M. Euler le prix double de 5000^{fr} proposé pour cette année. Nous avons cru devoir cette justice à la belle analyse du problème des trois corps que votre pièce renferme, quoique vous n'ayez pas donné les formules du mouvement de la Lune comme M. Euler, qui, à la vérité, n'a sur vous que ce seul avantage et qui vous est bien inférieur par la profondeur des recherches. » Lagrange lui répond : « Je vous prie de vouloir bien remercier de ma part MM. Cassini, Lemonnier, de Condorcet et Bossut de ce qu'ils ont jugé ma pièce digne de leurs suffrages, et de leur dire combien je suis sensible à l'honneur qu'ils m'ont fait de m'associer au triomphe de M. Euler. Sans vanité, je regarde cette circonstance comme beaucoup plus avantageuse pour moi que si j'avais remporté le prix tout seul, surtout étant le successeur de M. Euler, qui a laissé dans ce pays beaucoup d'admirateurs et peut-être même plus qu'il n'en avait lorsqu'il était ici. »

Le nom de Condorcet est toujours prononcé avec de grands égards. On ne soupçonnerait pas, à la lecture de la Correspondance, la médiocrité de ses travaux mathématiques. On a fait plus; Arago, qui avait pu consulter les lettres inédites de d'Alembert, y a vu la preuve, suivant lui décisive, des grands talents de Condorcet comme géomètre. « Le premier Ouvrage de Condorcet, son *Calcul intégral,* dit Arago, fut examiné par une Commission académique; le Rapport, rédigé par d'Alembert, se terminait ainsi: « L'Ouvrage annonce les plus grands talents et les plus dignes d'être excités par l'approbation de l'Académie. » L'Ouvrage est envoyé à Lagrange, qui répond: « Le *Calcul intégral* de Condorcet m'a paru bien digne des éloges dont vous l'avez honoré. »

Il n'est pas besoin d'avoir composé d'éloges académiques pour trouver tout naturel qu'autorisé par deux déclarations de cette importance, l'illustre secrétaire de l'Académie des Sciences ait présenté le premier écrit de Condorcet comme un chef-d'œuvre. On peut admettre même, sans l'en blâmer, qu'à l'abri des jugements de d'Alembert et de Lagrange, il se soit dispensé de le lire. Je croirais volontiers que Lagrange en a fait autant, car il remercie d'Alembert pour le *Traité de Calcul intégral* de M. de Condorcet, qui n'est nullement un traité de Calcul intégral. On pourrait reprocher à Arago, qui très certainement, lui, ne l'a pas lu, et qui l'appelle aussi le *Calcul intégral de Condorcet,* un peu trop d'indignation contre les esprits légers, superficiels, qui, sans avoir jeté les yeux sur le travail de Condorcet, en parlent avec un risible dédain. « Peut-on croire, s'écrie-t-il, en s'appuyant sur le jugement de Lagrange, que le rapporteur de l'Académie l'a traité avec une coupable indulgence? « Si l'on veut bien effacer le mot coupable, évidemment beaucoup trop fort, je crois très certainement, après avoir lu le livre entier, à beaucoup d'indulgence. Comment, dira-t-on, deux grands esprits et deux grands juges s'accordent-ils à louer des travaux très peu dignes de leur attention? L'explication est bien simple. Condorcet était un homme de très grand mérite, très apprécié par les esprits les plus éminents, ami de Turgot, ami de Voltaire, philosophe de plus, quoique de grande famille et marquis. Ses travaux mathématiques n'étaient pas mauvais, un peu faibles seulement; on n'était pas coupable en les déclarant pleins de promesses.

« Je voudrais, écrit d'Alembert à Lagrange, dans l'intimité de leur correspondance, que notre ami Condorcet, qui a sûrement du génie et de la sagacité, eût une autre manière de faire. Je le lui ai dit plusieurs fois; mais apparemment la nature de son esprit est de travailler dans ce genre; il faut le laisser faire. » Lorsque Condorcet, né en 1743, fut nommé membre de l'Académie des Sciences le 8 mars 1769, n'ayant pas vingt-six ans, d'Alembert écrit: « Vous avez appris par les gazettes que nous avons enfin reçu M. de Condorcet, sa famille ayant jugé à propos de ne plus mettre obstacle à ce qu'il fût de l'Académie, car beaucoup de nos gentilshommes croient que le titre et le métier de savant dérogent la noblesse. » Il semble bien certain que ce jeune marquis de vingt-six ans, qui, pour se laisser nommer à l'Académie, n'a à solliciter que sa famille, aurait vu la porte s'ouvrir moins facilement s'il avait été trouvé le lendemain de sa naissance sur le parvis de Saint-Jean-le-Rond.

Deux ans après, en 1771, Voltaire écrivait à Condorcet : « Il faut que vous nous fassiez l'honneur d'être de l'Académie française. » L'indulgence de Voltaire n'a rien de coupable, mais elle est grande.

L'évaluation d'un mérite *catégoriquement* démontrée, comme l'a fait souvent Arago, par les citations empruntées à de grands juges peut conduire aux plus graves erreurs. La correspondance de d'Alembert et de Lagrange en donne plus d'un exemple. Tous deux assurément peuvent faire autorité quand ils jugent un Ouvrage d'Euler. Le charmant Livre, traduit dans toutes les langues, et qui dans toutes a eu de nombreuses éditions, les *Lettres à une princesse d'Allemagne,* est annoncé par Lagrange à d'Alembert : « J'avais compté vous envoyer les *Lettres d'Euler à une princesse d'Allemagne;* mais, comme elles auraient trop grossi le paquet, je les remets à une autre occasion, d'autant plus qu'elles n'ont d'autre mérite que d'être sorties de la plume d'un grand géomètre. »

D'Alembert, qui déjà s'est procuré les *Lettres* à Paris, lui répond : « Quant aux *Lettres d'Euler à une princesse d'Allemagne,* il est inutile de me les envoyer à moins qu'elles ne soient déjà parties; en ce cas, je céderais mon exemplaire à quelque ami et je vous ferais remettre le prix du vôtre. Vous avez bien raison de dire qu'il n'eût pas dû faire imprimer cet Ouvrage pour son honneur. Il est bien incroyable qu'un aussi grand génie que lui

sur la Géométrie et l'Algèbre soit en Métaphysique si inférieur au plus petit écolier, pour ne pas dire si plat et si absurde. C'est bien le cas de dire : *Non omnia eidem Dii dedere.* »

C'est du même Livre cependant que parle en ces termes leur ami Condorcet : « Ouvrage précieux par la clarté singulière avec laquelle il a exposé les vérités les plus importantes de la Mécanique, de l'Astronomie physique, de l'Optique et de la théorie des sons, et par des vues ingénieuses, moins philosophiques, mais plus savantes que celles qui ont fait survivre la *Pluralité des mondes* de Fontenelle au système des tourbillons. Le nom d'Euler, si grand dans les sciences, l'idée imposante que l'on se forme de ses Ouvrages, destinés à développer ce que l'Analyse a de plus épineux et de plus abstrait, donnent à ces lettres si simples, si faciles, un charme singulier : ceux qui n'ont pas étudié les Mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un Ouvrage d'Euler, lui savent gré de s'être mis à leur portée, et ces détails élémentaires des sciences acquièrent une sorte de grandeur par le rapprochement qu'on a fait avec la gloire et le génie de l'homme illustre qui les a tracés. »

Il ne serait pas difficile, pour donner un autre exemple, de trouver, dans la correspondance des académiciens les plus éminents, des appréciations de Grand-Jean de Fouchy, médiocre assurément, mais judicieux et honnête, qui feraient contraste avec ce mot de d'Alembert : « Notre imbécile de G. Fouchy s'est enfin retiré. »

Un géomètre pourrait, très utilement pour lui-même, pour la Science aussi, j'en suis persuadé, suivre pas à pas cette Correspondance, pour éclairer par les jugements donnés de si haut, en toute liberté, les recherches qui y sont mentionnées. Lagrange, par exemple, écrit le 1er septembre 1766 : « J'ai fait des recherches sur l'intégration du problème des trois corps. J'ai trouvé pour cela une assez jolie méthode, laquelle me donne tout d'un coup la valeur du rayon vecteur aussi approché que je veux, sans que je sois obligé de substituer à chaque approximation la valeur trouvée par l'approximation précédente ; aussi cette méthode donne exactement, suivant le degré de l'approximation, le mouvement de l'apogée et la valeur des autres équations. Je vous en entretiendrai une autre fois. »

Celui qui tiendrait les promesses que Lagrange faisait il y a cent vingt ans, avec tant de précision, passerait à bon droit pour un grand inventeur. Y a-t-il illusion? Quelle est la part de la vérité? La question est d'un grand intérêt.

D'Alembert répond assez singulièrement : « Ne me mandez pas ce que vous avez fait, je veux m'y essayer à loisir. » C'est ainsi que, soixante ans plus tard, Gauss, recevant de Schumacher la communication d'un admirable Mémoire inédit de Jacobi, le priait avec mécontentement de ne plus faire de tels envois; il ne voulait ni les voir, ni qu'on pût croire qu'il les avait vus. Il réservait, comme d'Alembert, toute liberté à son esprit inventif.

Les notes qui précèdent ont été prises rapidement pendant la lecture très attachante d'un Livre qui contient bien d'autres passages de grand intérêt. Elles suffiront, je l'espère, pour inspirer le désir d'étudier cet excellent Volume, dont la publication fait grand honneur à l'érudition et au zèle du savant sous-bibliothécaire de l'Institut, M. Ludovic Lalanne. J. Bertrand.

MÉLANGES.

SUR L'ÉQUATION D'EULER;

PAR M. T.-J. STIELTJES, à Toulouse.

1. L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

$$Y = a_0 y^4 + 4a_1 y^3 + 6a_2 y^2 + 4a_3 y + a_4,$$

peut se mettre sous la forme élégante

$$(a) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{x+y}{2} & xy \\ 1 & a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2 + m & a_3 \\ xy & a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

m étant la constante arbitraire.

Cette formule est nouvelle peut-être, du moins nous n'avons pas réussi à la retrouver dans les nombreux travaux sur ce sujet.

Toutefois elle découle très facilement d'un Mémoire de Richelot (*Journal de Crelle*, t. 44, p. 277), mais elle ne se trouve pas explicitement dans ce travail. L'analyse suivante diffère très peu de ce qu'on peut lire dans le Mémoire de Richelot.

2. Considérons une forme quadratique ternaire

$$\varphi = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dYZ + 2eZX + 2fXY$$

et la forme adjointe

$$\varphi_1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY.$$

qui peut s'écrire aussi

$$\varphi_1 = -\begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & a & f & e \\ Y & f & b & d \\ Z & e & d & c \end{vmatrix}.$$

Nous suivons maintenant la méthode d'*Euler* : ainsi nous prenons pour point de départ une équation doublement quadratique et symétrique à deux variables x et y.

Pour cela, nous annulons la forme φ après y avoir effectué les substitutions

$$(1) \qquad X = 1, \qquad Y = -\frac{x+y}{2}, \qquad Z = xy.$$

Il vient ainsi

$$(2) \qquad a + \tfrac{1}{4}b(x+y)^2 + cx^2y^2 - dxy(x+y) + 2exy - f(x+y) = 0,$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$0 = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 = Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2,$$
$$X_0 = a - fx + \tfrac{1}{4}bx^2,$$
$$X_1 = -f + (2e + \tfrac{1}{2}b)x - dx^2,$$
$$X_2 = \tfrac{1}{4}b - dx + cx^2,$$

Y_0, Y_1, Y_2 étant les mêmes fonctions de y.

On en tire l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X_1^2 - 4X_0X_2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y_1^2 - 4Y_0Y_2}} = 0,$$

et, si l'on effectue maintenant l'identification

$$X_1^2 - 4X_0X_2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

on trouve

$$(3) \qquad \begin{cases} a_0 = d^2 - bc, \\ a_1 = cf - de, \\ 6a_2 = 4(e^2 - ac) + 2(be - df), \\ a_3 = ad - ef, \\ a_4 = f^2 - ab. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer a, b, c, d, e, f à l'aide de a_0,

a_1, a_2, a_3, a_4 et d'une quantité indéterminée m qui sera la constante arbitraire.

Pour cela, nous remplaçons la troisième des relations (3) par celles-ci

$$e^2 - ac = a_2 + m,$$
$$be - df = a_2 - 2m.$$

On a donc maintenant les six équations

$$(4)\quad \begin{cases} bc - d^2 = A = -a_0, \\ ac - e^2 = B = -a_2 - m, \\ ab - f^2 = C = -a_4, \\ ef - ad = D = -a_3, \\ df - be = E = -a_2 + 2m, \\ de - cf = F = -a_1. \end{cases}$$

Or la détermination de a, b, c, d, e, f par ces relations n'offre aucune difficulté : en effet, on sait que la forme adjointe de φ_1 est simplement égale à $\Delta\varphi$, Δ étant le déterminant de φ; donc

$$\Delta a = BC - D^2, \quad \Delta b = AC - E^2, \quad \Delta c = AC - F^2,$$
$$\Delta d = EF - AD, \quad \Delta e = DF - BE, \quad \Delta f = DE - CF.$$

On obtient maintenant l'intégrale générale cherchée en substituant ces valeurs de Δa, ... dans l'équation (2), qu'on multipliera d'abord par Δ.

Il est clair par là que la relation cherchée s'obtient simplement en annulant la forme adjointe de φ_1 et en effectuant les substitutions (1). Dans la relation ainsi obtenue

$$\begin{vmatrix} 0 & X & Y & Z \\ X & A & F & E \\ Y & F & B & D \\ Z & E & D & C \end{vmatrix} = 0,$$

il suffit de restituer, au lieu de A, B, ..., leurs valeurs (4) pour obtenir le résultat annoncé (a).

3. Supposons que l'on détermine la constante m par l'équation cubique

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ a_1 & a_2 + m & a_3 \\ a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -4m^3 + Sm + T = 0.$$

où

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$$

et

$$T = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

sont les invariants de $X = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + \ldots + a_4$.

Alors on sait, d'après une propriété connue des déterminants (ou des formes quadratiques), que le premier membre de (a) est un carré parfait. Ainsi la relation entre x et y se réduit dans ce cas à une équation de cette forme

$$p + q(x+y) + rxy = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = -\frac{p+qx}{q+rx},$$

relation qui doit toujours satisfaire à l'équation différentielle.

On obtient ainsi, correspondant aux trois valeurs de m, trois substitutions linéaires qui transforment en elle-même la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$. On voit que cette détermination n'exige pas la résolution de l'équation $X = 0$.

Pour $m = \infty$, l'équation (a) se réduit à $(x-y)^2 = 0$ et l'on obtient ainsi la quatrième substitution linéaire $x - y = 0$, qui transforme en elle-même la différentielle elliptique. Les trois autres peuvent s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2 + m \\ xy & a_2 - 2m & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

m étant une racine de l'équation cubique.

4. Considérons encore le premier membre de (a). En posant $x = y$ et changeant de signe, on trouve facilement

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & -x & x^2 \\ 1 & a_0 & a_1 & a_2 - 2m \\ -x & a_1 & a_2 + m & a_3 \\ x^2 & a_2 - 2m & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = H + mX,$$

$H=(a_0a_2-a_1^2)x^4+\dots$ étant le hessien de X. [*Voir* aussi DARBOUX, *Journal de Liouville*, 2e série, t. XVIII, p. 220 (1).]

Si l'on détermine encore m par l'équation cubique, $H+mX$ devient un carré parfait, et l'on a, par exemple,

$$\sqrt{H+mX}=\frac{1}{\sqrt{a_0a_2-a_1^2+a_0m}}\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ -x & a_1 & a_2+m \\ x^2 & a_2-2m & a_3 \end{vmatrix}.$$

Il est clair par ce qui précède qu'on peut énoncer cette proposition :

Soit

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma$$

un polynôme du second degré, qui ne diffère que par un facteur constant de $\sqrt{H+mX}$.

Alors, en posant

$$\alpha xy+\beta(x+y)+\gamma=0,$$

on aura une substitution linéaire qui transforme en elle-même la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$.

5. D'après ce qui précède, le premier membre de (a) changé de signe devient égal à $H+mX$ en posant $x=y$. Or soient h et f les secondes polaires de H et de X respectivement, $h+mf$ sera une expression doublement quadratique et symétrique en x et y, et qui se réduit à $H+mX$ pour $x=y$.

Mais, d'après une remarque due à M. Halphen et qu'on vérifie directement, deux expressions doublement quadratiques et symétriques en x et y, qui sont égales pour $x=y$, ne peuvent différer que par un terme $\lambda(x-y)^2$.

Dès lors, un calcul facile montre que l'on peut écrire la relation

---

(1) Nous profitons de cette occasion pour signaler les corrections suivantes : dans les valeurs de H et de K, formule (7) page 221 : Il faut remplacer partout Y par $-Y$, et page 223, ligne 7 en descendant, il faut faire le même changement. Ces corrections ont aussi une légère influence sur les art. V et VI du Mémoire de M. Darboux.

(*a*) sous cette forme :

$$h + mf + (\tfrac{1}{1^2}S - m^2)(x-y)^2 = 0.$$

Cette forme de l'intégrale de l'équation d'Euler est due à M. Cayley; Laguerre l'a retrouvée de son côté dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SÉRIES SIMPLEMENT CONVERGENTES;

PAR M. JOSEPH BAGNERA,
Étudiant à l'Université de Palerme.

Étant donnée une série divergente $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, dont les termes sont positifs et ne croissent pas, détachons-en une nouvelle série $u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots$, sans altérer l'ordre des termes. Supposons que, parmi les n premiers termes de la série donnée, il y en ait p_n qui appartiennent à la nouvelle série. Leur somme peut être mise sous la forme suivante :

$$\sum_1^n (p_i - p_{i-1})u_i = p_n u_{n+1} + \sum_1^n (u_i - u_{i+1})p_i.$$

Si, pour $n > \nu$, le rapport $\frac{p_n}{n}$ finissait par surpasser $h > 0$, la dernière somme surpasserait $h(u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \ldots + u_n)$. Conséquemment, pour que la série $u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots$ soit *convergente*, il faut que $\frac{p_n}{n}$ tende vers zéro, *au moins pour une succession spéciale de valeurs de n*. Cette condition est *nécessaire* : pour se convaincre qu'elle n'est pas *suffisante*, on remarquera qu'elle peut être vérifiée lorsque u_n ne tend pas vers zéro. Cela posé, considérons une série *simplement convergente*, dont les termes ne croissent pas en valeur absolue. Supposons que, parmi les n premiers termes, il y ait un *excédent* de p_n termes positifs, et que cet excédent *se conserve* à partir d'une certaine valeur de n. Nous pouvons même supposer que cela arrive dès le premier terme, en supprimant un nombre convenable de termes initiaux,

sans influence sur le caractère de la série. Dès lors, chaque terme négatif peut être accouplé avec un des termes positifs, *qui le précèdent*, en donnant lieu à un terme unique, *positif ou nul*. La somme des n premiers termes de la série donnée se compose donc des $\frac{1}{2}(n - p_n)$ termes, qui résultent des accouplements indiqués et des p_n premiers termes d'une série $u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots$, nécessairement *convergente*, contenue dans la *série des valeurs absolues* $u_1 - u_2 - u_3 - \ldots$, qui, en vertu des hypothèses, est *divergente*. Donc il existe une succession de valeurs de n qui rendent $\frac{p_n}{n}$ aussi petit qu'on le désire. Le même raisonnement est applicable au cas de $\frac{p_n}{n}$ constamment inférieur à quelque nombre négatif. Enfin, il ne peut exister un intervalle $(-h, h)$ tel que $\frac{p_n}{n}$ surpasse h ou soit inférieur à $-h$, suivant la valeur de n; car on devrait avoir, pour des valeurs de n, arbitrairement grandes,

$$2h < \left| \frac{p_n}{n} - \frac{p_{n-1}}{n-1} \right| < \frac{2}{n},$$

ce qui devient impossible lorsque n croît à l'infini. On arrive ainsi à la proposition suivante : *Il existe, pour toute série simplement convergente, dont les termes ne croissent pas en valeur absolue, une succession de valeurs de n, telles que l'excès de la fréquence des termes positifs, parmi les n premiers termes de la série, sur la fréquence des termes négatifs, ait zéro pour limite.* Autrement dit : *les termes négatifs tendent à devenir aussi fréquents que les positifs*, au moins pour une succession spéciale de valeurs de n. Ce théorème est dû à M. Cesaro. La démonstration que nous venons d'en donner, bien que ne différant pas au fond de celle de M. Cesaro, nous a semblé plus propre à mettre en évidence la *raison* du fait curieux que le théorème exprime.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MATHIEU. — Théorie de l'Électrodynamique. 1 vol. in-4°, x-296 pages. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888.

M. Émile Mathieu a entrepris la publication d'un Cours général de Physique mathématique, et il met cette entreprise à exécution avec une extraordinaire activité. Après avoir donné en quelques années un Volume sur la *Théorie de la capillarité* (1883) et deux Volumes sur la *Théorie du potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme* (1885-1886), M. Mathieu vient de faire paraître une *Théorie de l'Electrodynamique*. Comme les volumes précédents, celui-ci ne renferme pas seulement l'exposé des résultats déjà connus : il contient en outre beaucoup de vues nouvelles et de résultats dus aux travaux de l'Auteur.

Pour rendre compte de cet Ouvrage, nous suivrons l'ordre même adopté par l'Auteur, ordre d'ailleurs très simple et très logique; nous glisserons rapidement sur les Chapitres consacrés à l'étude des travaux des devanciers de M. Mathieu, pour insister surtout sur ceux qui renferment les recherches personnelles de ce géomètre.

Le Chapitre I est consacré aux *Principes généraux sur le mouvement de l'Électricité dans l'intérieur d'un corps conducteur*. M. Mathieu y définit les éléments qui entrent en considération dans l'étude de tout mouvement de l'électricité à l'intérieur d'un conducteur à trois dimensions : flux électrique, résistance, force électromotrice. Il envisage ensuite les courants permanents, sur lesquels il se réserve d'ailleurs de revenir dans un autre Chapitre; il démontre ce théorème de Kirchhoff, que la densité de l'électricité libre est nulle à l'intérieur de tout conducteur homogène traversé par des courants permanents. Il indique comment se propagent les courants électriques dans un conducteur hétérogène formé de deux métaux en contact. Enfin, il détermine d'une manière générale le travail de l'électricité mise en mouvement par des courants permanents et arrive ainsi à la loi de Joule, en suivant à peu près la marche indiquée autrefois par Clausius.

Au Chapitre II, M. Mathieu étudie les *Lois générales des cou-*

rants linéaires permanents. Il commence par exposer la loi d'Ohm sous la forme que lui a donnée Kirchhoff, en la déduisant des principes généraux posés au Chapitre I; après avoir dit quelques mots du phénomène de Peltier, M. Mathieu résout complètement, en se servant des principes de Kirchhoff, le problème de la distribution des courants permanents dans un réseau de fils conducteurs.

La seconde Partie du Chapitre II renferme l'étude des actions des courants linéaires permanents entre eux et sur les aimants. La voie suivie par M. É. Mathieu dans cette étude nous semble assez nouvelle pour mériter de fixer l'attention des physiciens; essayons de marquer ici le tracé général de cette voie, inspirée en partie par Riemann.

Le point de départ de l'analyse de M. Mathieu est le suivant :

Un courant linéaire C, fermé et uniforme, exerce sur une masse magnétique égale à l'unité, située au point (x, y, z), une action dont les composantes ont pour valeur

$$X = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial P}{\partial z},$$

la fonction P et ses dérivées partielles des deux premiers ordres étant supposées finies, continues et uniformes, sauf sur une surface σ ayant pour contour le courant C, et les dérivées secondes étant supposées vérifier l'équation de Laplace

$$\Delta P = 0.$$

M. Mathieu démontre en premier lieu que la fonction P est déterminée lorsqu'on connaît la différence B des valeurs qu'elle prend sur l'une et l'autre face de la surface σ.

Puis, il prouve que l'on a

$$P = \frac{B}{4\pi} \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} d\sigma,$$

N étant la normale à l'élément $d\sigma$ de la surface σ, et r la distance du point (x, y, z) à un point de l'élément $d\sigma$.

On arrive ainsi à cette proposition d'Ampère :

1 ***courant linéaire, fermé et uniforme sur une tique, équivaut à l'action d'un feuillet magné- urant pour contour.***

Les actions mutuelles d'un courant linéaire, fermé et uniforme, et d'un système magnétique quelconque, peuvent être dès lors déduites des seules lois du magnétisme.

Il s'agit alors de passer aux lois des actions mutuelles des courants, et voici comment raisonne M. É. Mathieu.

Envisageons deux courants C, C′, et les feuillets σ, σ' qui leur correspondent.

Le feuillet σ et le courant C exercent même action sur le feuillet σ' et en reçoivent même action.

Le feuillet σ' et le courant C′ exercent même action sur le feuillet σ et en reçoivent même action.

M. É. Mathieu fait *implicitement* l'hypothèse suivante :

Les deux courants C et C′ exercent les mêmes actions mutuelles que les deux feuillets σ et σ'.

Cette hypothèse faite, il suffit de calculer, d'après les lois du Magnétisme, le potentiel des deux feuillets σ et σ' pour obtenir l'expression du potentiel électrodynamique de deux courants.

Ayant l'expression du potentiel de deux courants fermés et uniformes, M. Mathieu en déduit l'action de deux éléments de courants par l'hypothèse que cette action doit être soumise à la loi de l'égalité entre l'action et la réaction. Il remarque d'ailleurs que, si l'on n'adoptait pas cette hypothèse, on pourrait admettre pour l'action mutuelle de deux éléments de courants une infinité d'expressions autres que celle qu'a donnée Ampère.

Une fois ces résultats fondamentaux obtenus, M. Mathieu expose les théorèmes les plus importants auxquels sont parvenus Ampère, Savary, Biot et Savart et Laplace, dans l'étude des actions d'un courant fermé sur un élément de courants, des solénoïdes entre eux et avec les courants, enfin d'un courant sur un pôle d'aimant.

Le Chapitre III a pour objet l'*Induction produite dans les courants linéaires*. M. Mathieu établit les lois fondamentales de l'Induction en s'appuyant sur la loi de la conservation de l'énergie, comme Helmholtz l'a fait le premier. La formule obtenue sert à démontrer quelques-uns des résultats que F.-E. Neumann avait trouvés auparavant par une voie directe, bien préférable, selon nous et selon M. Helmholtz lui-même, à celle qui part du premier

principe de la Théorie mécanique de la chaleur. Puis, M. Mathieu développe, d'après Maxwell, la théorie de l'action mutuelle des courants électriques, théorie fondée sur l'emploi de formules analogues à celles par lesquelles Lagrange met en équation tout problème de Dynamique. Enfin l'auteur montre comment on peut, en suivant les idées de Weber, réunir les lois de l'Électrostatique, de l'Électrodynamique et de l'Induction en une formule unique qui fait dépendre l'action mutuelle de deux particules électriques de leur distance et de leurs vitesses.

Nous regrettons que M. Mathieu n'ait pas joint à ce Chapitre l'exposé et la discussion des formules qu'on a proposé de substituer à celle de Weber, formules qui ont donné lieu dans ces derniers temps à de si importantes controverses. M. Mathieu avait pris part à ces controverses et avait marqué sa place dans ce débat par un important Mémoire intitulé : *Réflexions sur les principes fondamentaux de l'Électrodynamique;* nous espérions retrouver dans le Livre de M. Mathieu les parties principales de ce Mémoire; mais l'auteur, très modeste, s'est borné à en rappeler le point de départ et les conclusions.

Le Chapitre IV est consacré à la *Théorie des courants permanents dans des conducteurs de forme quelconque.* C'est un de ceux qui intéresseront le plus les physiciens; il débute par l'exposé d'une idée propre à M. É. Mathieu sur la nature de la couche électrique qui produit le mouvement de l'électricité dans les courants permanents. Essayons de donner un aperçu exact de cette idée.

Dans un conducteur, dont la résistance spécifique est k, les trois composantes u, v, w du flux électrique sont données par les formules

$$u = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad v = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad w = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial z},$$

V étant la fonction potentielle de l'électricité libre répandue sur le conducteur.

La condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

qui exprime que le courant est uniforme, entraîne alors la condition

$$\Delta V = 0,$$

et, comme la densité ρ de l'électricité libre est donnée par la formule

$$\Delta V = -4\pi\rho;$$

on voit qu'à l'intérieur d'un conducteur homogène traversé par des courants uniformes il n'y a pas d'électricité libre; il y a en tout point autant d'électricité positive que d'électricité négative. Tel est le résultat important obtenu autrefois par G. Kirchhoff.

G. Kirchhoff en avait conclu que, dans un conducteur parcouru par des courants permanents comme dans un conducteur sur lequel l'équilibre électrique est établi, l'électricité est distribuée uniquement sur la surface du conducteur, de manière à avoir, en chaque point de cette surface, une densité superficielle finie σ. Seulement la distribution de cette couche n'est pas la même, suivant que l'équilibre électrique est établi sur le conducteur ou que ce conducteur est traversé par des courants permanents.

Dans ces idées de G. Kirchhoff, adoptées aujourd'hui par presque tous les physiciens, voyons quelle est la marche à suivre pour étudier complètement le problème du mouvement électrique sur un conducteur.

Nous imaginons que ce conducteur C soit un espace fermé dont la connexité de première espèce soit du second ordre, analogue à un tore. Une section SS′ le transforme en un espace dont la connexité de première espèce est du premier ordre. Nous admettons que cette section représente la pile, supposée très mince.

La fonction potentielle V de l'électricité doit être finie, continue et uniforme dans tout l'espace, excepté sur la surface SS′. D'un côté à l'autre de la surface SS′, V varie d'une quantité constante E qui est la force électromotrice de la pile en unités électrostatiques. V s'annule à l'infini.

Les dérivées partielles du premier ordre de V sont finies, continues et uniformes dans tout l'espace, sauf sur la surface s qui limite le conducteur et sur la surface SS′. Aux divers points de la surface s, on a

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = 0.$$

Aux divers points de la surface SS′, on a

$$\frac{\partial V}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial N'} = 0,$$

N et N′ étant les deux directions de la normale en ce point.

Les dérivées du second ordre sont finies dans tout l'espace, sauf sur les surfaces s et SS′, et elles vérifient l'équation de Laplace.

Il est très facile de voir que ces conditions ne déterminent pas entièrement la fonction V. Mais, si l'on désigne par U une quelconque des fonctions qui satisfont à ces conditions, la forme la plus générale de V sera

$$V = U + W,$$

W étant une fonction uniforme, finie et continue dans tout l'espace, même sur la surface SS′, dont les dérivées du premier ordre sont finies et continues dans tout l'espace, sauf sur la surface s, dont les dérivées du second ordre satisfont dans tout l'espace à l'équation de Laplace, et qui, enfin, se réduit à une constante à l'intérieur du conducteur C.

La fonction W représente la fonction potentielle d'une couche électrique en équilibre sur le conducteur C. L'indétermination de V signifie donc que l'on peut, sans modifier le mouvement de l'électricité à l'intérieur du conducteur, déposer à la surface de ce conducteur une couche électrique en équilibre, et, sous cette forme, on voit que cette indétermination était évidente *a priori*. Cette indétermination sera levée par une condition accessoire, par exemple par la connaissance de la quantité totale d'électricité libre que renferme le conducteur C.

On voit maintenant que la résolution du problème que nous étudions est ramenée :

1° A déterminer une quelconque des fonctions U qui répondent au problème;

2° A déterminer une distribution d'équilibre sur le conducteur C, ce qui fait connaître la forme générale de W.

Ces deux fonctions étant en effet connues, nous avons

$$V = U + W.$$

W étant constant à l'intérieur du conducteur C, les composantes du flux électrique sont

$$v = -\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad w = -\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

A la surface s, on a

$$\frac{\partial U}{\partial N_i} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial N_i} = 0;$$

la densité superficielle de l'électricité a donc pour valeur

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial N_e} + \frac{\partial W}{\partial N_e}\right).$$

Enfin, les composantes de l'action que l'électricité libre exerce à l'extérieur sur une masse électrique égale à l'unité ont pour valeur

$$X = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x}\right),$$
$$Y = -\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y}\right),$$
$$Z = -\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

Ainsi, pour résoudre le problème, il est nécessaire et suffisant de connaître la forme générale de la fonction W et la forme de la fonction U *aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur du conducteur* C.

La solution du problème devient plus simple si l'on adopte les idées de M. É. Mathieu.

Soient SS′ et S_1S_1' les deux faces du feuillet SS′. Soit U_0 la valeur de la fonction U en un point des surfaces s, SS′, S_1S_1'. En un point intérieur au conducteur C, nous aurons, en vertu d'une formule connue,

$$4\pi U = \sum_s U_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i}\,ds + \sum_{SS'} U_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i}\,ds + \sum_{S_1S_1'} U_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i}\,ds$$
$$- \sum_s \frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial N_i}\,ds - \sum_{SS'} \frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial N_i}\,ds - \sum_{S_1S_1'} \frac{1}{r}\frac{\partial U_0}{\partial N_i}\,ds.$$

Mais :

1° Aux points correspondants de SS′ et de S_1S_1', $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i}$ a des valeurs égales et de signe contraire, et les valeurs de U_0 diffèrent de ε. Si donc N est la normale du côté où la fonction potentielle a

la valeur la plus grande, on a

$$\int\int_{SS'} U_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i} ds + \int\int_{S_1 S'_1} U_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i} ds = \mathcal{E} \int\int_{SS'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} ds.$$

2° Aux points correspondants de SS′ et de $S_1 S'_1$, $\frac{\partial U_0}{\partial N_i}$ a des valeurs égales et de signes contraires; on a donc

$$\int\int_{SS'} \frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial N_i} ds + \int\int_{S_1 S'_1} \frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial N_i} ds = 0.$$

3° Aux divers points de s, on a

$$\frac{\partial U_0}{\partial N_i} = 0.$$

On a donc

$$\int\int_{s} \frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial N_i} ds = 0.$$

De toutes ces égalités, il résulte que l'on a

$$U = \int\int_{s} \frac{U_0}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i} ds + \int\int_{SS'} \frac{\mathcal{E}}{4\pi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N} ds.$$

On voit par là que la valeur de U à l'intérieur du conducteur C peut être regardée *comme la fonction potentielle d'une couche électrique double* recouvrant la surface SS′ avec la puissance constante $\frac{\mathcal{E}}{4\pi}$, et la surface s avec la puissance variable $\frac{U_0}{4\pi}$.

La forme la plus générale de V, *à l'intérieur du conducteur* C, demeure

$$V = U + W,$$

W étant la fonction potentielle d'une couche électrique en équilibre sur le conducteur C.

Au lieu d'admettre avec Kirchhoff que le mouvement de l'électricité dans le conducteur C est déterminé par une simple couche d'électricité recouvrant la surface S, M. Mathieu admet que cette surface renferme à la fois une simple couche en équilibre et une double couche analogue à celle qui vient d'être définie.

Dès lors, il est nécessaire et suffisant, pour résoudre le problème du mouvement de l'électricité dans un conducteur, de savoir déterminer :

1° La fonction W;

2° La valeur de l'une des fonctions U *à l'intérieur seulement du conducteur* C.

Ces éléments, en effet, étant connus, les composantes du flux électrique seront données par

$$u = -\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad v = -\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad w = -\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial z};$$

la puissance de la double couche en un point de la surface S aura pour valeur

$$\Phi = \frac{U}{4\pi};$$

la densité de l'électricité libre en un point de S aura pour valeur

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial W}{\partial N_e},$$

et, comme la fonction potentielle de la double couche est égale à o en tout point extérieur au conducteur C, les composantes de l'action électrostatique extérieure auront pour valeur

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Ainsi, l'avantage de la théorie de M. Mathieu est de ne pas exiger la détermination de la valeur, *à l'extérieur du conducteur* C, d'une fonction U satisfaisant au problème de Kirchhoff.

Le problème est parfois ainsi notablement simplifié. Ainsi M. Mathieu est parvenu à déterminer la fonction U pour l'intérieur d'un conducteur formé de fils et d'un parallélépipède rectangle, et la détermination de la valeur extérieure de la même fonction serait extrêmement difficile.

« Ainsi, dit M. Mathieu, cette théorie doit être considérée comme plus simple que l'ancienne, et je ferai remarquer, sans

que je veuille pourtant trop insister sur cette raison, que l'histoire des Sciences physiques montre que, de deux théories qui semblent d'abord satisfaire également à l'expérience, la plus simple est celle qui a le plus de chances d'être vraie. »

Nous ignorons l'accueil que les physiciens feront à l'idée nouvelle émise par M. É. Mathieu ; mais elle ne peut manquer d'attirer leur attention ; peut-être quelqu'un d'entre eux cherchera-t-il à décider par l'expérience entre cette idée et celle de M. Kirchhoff, ce qui semble possible, puisque les actions électrostatiques extérieures ne sont pas les mêmes dans les deux théories.

Nous ne voulons pas terminer ce sujet sans une dernière remarque.

Dans la théorie de Kirchhoff, le problème comporte une indétermination qui peut être levée au moyen d'une condition accessoire, par exemple la connaissance de la quantité totale d'électricité que renferme le système. Dans la théorie de M. É. Mathieu, chacune des deux fonctions U et W comporte une indétermination. La dernière indétermination se lève comme dans la théorie de Kirchhoff, mais il n'y a aucun moyen de lever la première. Il en résulte que, dans la théorie de M. É. Mathieu, les courants sont complètement déterminés, mais la couche double ne l'est pas complètement. On peut lui superposer une couche double quelconque de puissance uniforme.

Après avoir ainsi étudié la constitution de la couche électrique qui détermine un courant permanent à l'intérieur d'un conducteur, M. É. Mathieu donne les formules générales relatives à l'action magnétique des courants traversant des conducteurs à trois dimensions. Puis M. É. Mathieu étudie d'une manière toute particulière un important problème abordé en premier lieu par Helmholtz : le mouvement permanent de l'électricité à l'intérieur d'un conducteur sphérique où le courant est amené par deux électrodes. M. Mathieu insiste spécialement sur le cas important où les électrodes se trouvent aux deux extrémités d'un diamètre. Enfin le Chapitre se termine par l'étude du mouvement permanent dans un ellipsoïde planétaire.

Le Chapitre V est intitulé : *Exemple de courants permanents dans des conducteurs homogènes et, en particulier, dans des*

plaques. M. É. Mathieu y étudie le mouvement permanent de l'électricité dans diverses plaques planes ou courbes. Plusieurs des cas qu'il traite avaient déjà été examinés par Kirchhoff, mais M. Mathieu ne s'est pas borné à reproduire les calculs de l'illustre physicien, il en a ajouté beaucoup d'autres qui lui sont propres. Ainsi G. Kirchhoff avait déterminé l'action exercée sur un pôle d'aimant infiniment voisin par une plaque circulaire que traversent des courants permanents; ce calcul lui avait permis de comparer l'expérience à la théorie. M. Mathieu est parvenu à déterminer l'action exercée par la plaque sur un pôle d'aimant situé en un point quelconque.

M. Mathieu démontre ensuite que le problème du mouvement de l'électricité dans une plaque courbe peut se résoudre lorsque l'on sait effectuer la représentation conforme de la plaque courbe sur une plaque plane dans laquelle le mouvement de l'électricité est connu. M. Mathieu applique ce théorème à la coquille sphérique et étudie quelques autres exemples de plaques courbes donnés par G. Kirchhoff.

Enfin, M. Mathieu donne, en terminant ce Chapitre, une solution complète de deux problèmes inabordés avant lui : le mouvement de l'électricité dans une plaque rectangulaire et dans un parallélépipède rectangle.

Les courants permanents ayant été étudiés d'une façon aussi complète, M. Mathieu aborde un dernier ordre de questions susceptibles d'être traitées par le seul emploi des principes relatifs aux courants permanents. Ces questions font l'objet du Chapitre VI, qui est intitulé : *Problèmes particuliers relatifs à des courants d'induction produits dans des plaques ou des conducteurs de révolution*.

Lorsqu'une plaque de révolution ou un corps de révolution tourne autour de son axe, en présence d'un système inducteur, il se développe dans sa masse des courants induits qui, grâce à la symétrie, sont uniformes. M. Mathieu montre, avec beaucoup de soin, comment l'étude de semblables courants découle des principes posés pour les courants linéaires; il développe cette étude et en fait l'application à la célèbre expérience d'Arago sur le Magnétisme de rotation.

Le Chapitre VII de l'Ouvrage de M. Mathieu est consacré aux *Unités électriques*.

Le Chapitre VIII étudie le *Mouvement variable de l'Électricité dans les conducteurs de forme quelconque*. M. Mathieu reproduit la très importante théorie donnée par Helmholtz; il la modifie seulement en ce point qu'il suppose la surface des conducteurs recouverte à la fois d'une simple couche d'électricité et d'une couche double; il y a ajouté un exposé succinct de la marche que l'on aura à suivre, en général, pour intégrer les équations du mouvement de l'électricité.

Enfin, au Chapitre IX, M. Mathieu traite des *Fils télégraphiques*. Après avoir développé d'une manière très complète le problème, déjà attaqué par Kirchhoff et Helmholtz, du mouvement varié de l'électricité dans un conducteur cylindrique infiniment long, M. É. Mathieu fait l'application des résultats trouvés aux lignes télégraphiques sous-marines et aériennes. Citons ce que M. Mathieu dit lui-même de cette partie de son Ouvrage : « J'ai consacré beaucoup de temps à cette recherche. M. W. Thomson a obtenu, par des raisonnements empiriques, une formule relative à l'intensité du courant dans les fils télégraphiques sous-marins. Par une analyse rigoureuse, j'étudie toutes les circonstances du mouvement et je calcule toutes les quantités qui en dépendent; de la sorte j'obtiens, en particulier, pour le courant longitudinal, une formule plus compliquée que celle de M. Thomson, mais qui donne des résultats peu différents, surtout quand le courant a duré assez longtemps pour qu'on puisse réduire dans les deux formules les séries de termes variables avec le temps au premier terme. On sait que déjà l'expérience avait montré l'utilité de l'emploi de la formule de M. Thomson dans la télégraphie sous-marine. »

« La propagation de l'électricité dans les fils sous-marins est extrêmement rapide; mais elle l'est encore bien davantage dans les fils aériens; il en résulte que les expériences sur ces derniers fils sont plus difficiles que sur les premiers. Néanmoins, de l'ensemble des recherches faites par les physiciens, il semble résulter que la durée de l'établissement du courant dans un fil aérien, estimée avec un appareil donné, varie avec la longueur du fil dans-

un rapport très analogue aux carrés de cette longueur. Après avoir retourné la question dans tous les sens, je n'ai pu arriver à ce résultat qu'en tenant compte de la perte de l'électricité par les poteaux qui soutiennent le fil. Je précise alors la manière dont la durée de l'établissement du courant varie avec la longueur du fil.»

Le compte rendu que l'on vient de lire ne donne qu'une idée bien incomplète du grand nombre de problèmes que traite le nouveau Livre de M. Mathieu. A des résultats épars dans une foule de Mémoires, qu'il réunit d'une manière systématique, il joint l'exposé d'une foule de recherches personnelles. Aussi ce Livre nous semble-t-il tout à fait digne de ceux qui l'ont précédé. Espérons que l'œuvre considérable que M. Mathieu a entreprise, et dont il a déjà réalisé une si grande part, contribuera à relever en France le goût des travaux de Physique mathématique, si nécessaires et pourtant si délaissés. P. DUHEM.

A TREATISE ON HYDRODYNAMICS, WITH NUMEROUS EXAMPLES; by *A.-B. Basset*, M. A. of Lincoln's Inn, barrister at law, fellow of the Cambridge philosophical Society and formerly scholar of Trinity College, Cambridge. Vol. I, 264 p. Cambridge, Deighton, Bell and C°. London, George Bell and Sons, 1888.

Le Traité d'Hydrodynamique de M. Basset aura deux Volumes; le premier, paru il y a quelques mois, contient les généralités et, parmi les applications, celles pour lesquelles il existe un potentiel des vitesses; le second Volume, qui doit paraître avant la fin de l'année, sera consacré principalement aux tourbillons rectilignes et circulaires, aux mouvements d'un ellipsoïde liquide sous l'influence de sa propre attraction, aux ondes, enfin aux liquides visqueux.

Depuis Stokes, l'étude de l'Hydrodynamique n'a pas cessé d'être en honneur à l'Université de Cambridge; il s'est formé autour de lui un groupe de mathématiciens, s'intéressant aux problèmes eux-mêmes indépendamment de leurs applications physiques, à la recherche des cas particuliers qu'il est possible de traiter complètement, collaborant ainsi à une œuvre dont les Bulletins de la

Société philosophique de Cambridge nous montrent le développement progressif. Depuis la publication du Traité de M. Lamb, en 1878, l'activité de l'École de Cambridge n'a fait que croître; ses travaux tiennent une grande place dans le Traité de M. Basset.

« J'ai voulu essayer de grouper toutes ces recherches (anglaises et étrangères), qui sont du plus grand intérêt pour le mathématicien, et de les condenser sous une forme convenable pour un Traité ». C'est donc un Traité mathématique du mouvement des liquides que l'auteur a voulu faire; son Ouvrage se recommande par de très remarquables qualités didactiques; chaque chose est exposée à sa place naturelle, là où elle est presque évidente, et n'exige que quelques lignes d'explications. Pourtant, à force de condenser, l'auteur a-t-il peut-être omis de place en place une phrase ou deux qu'il est nécessaire de dire à un étudiant, de mettre en évidence, de répéter au besoin.

Les propositions cinématiques sur le mouvement des fluides sont établies dès le premier Chapitre par rapport à des axes fixes, ou mobiles d'une manière quelconque, en coordonnées rectilignes, cylindriques et sphériques, ainsi que les diverses formes de l'équation de continuité et des rotations élémentaires. Les lignes de *flux*, qui, à une époque déterminée, ont pour tangente en chaque point la direction de la vitesse $\left(\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}\right)$, sont bien distinguées des lignes de mouvement, ou de *courant*, que suit un point du liquide mobile $\left(\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w\right)$. Ces deux systèmes de lignes ne coïncident que dans le cas particulier où les lignes de flux ne changent pas avec le temps, pour le mouvement permanent par exemple, et pour certaines lois particulières de mouvement varié.

Dans le second Chapitre sont établies rapidement les équations dynamiques d'Euler pour le mouvement des fluides parfaits par rapport à des axes fixes ou mobiles, la conservation du potentiel des vitesses quand il existe à un moment quelconque, la signification physique des rotations élémentaires. Ici une observation : Pourquoi l'auteur dit-il, p. 22, « *Puisque p* est une fonction de ρ, ... », et p. 24, « Si donc *par suite d'une action chimique* la pression cessait d'être une fonction de la densité ... »? Il n'est pas besoin d'une action chimique, il suffit qu'il y ait échange de chaleur entre les éléments voisins en même temps que

variation de température de chaque élément pour que la transformation ne soit ni isotherme ni adiabatique et que la pression ne soit plus une fonction de la densité seule. Ce n'est que par des précautions spéciales ou pour certains mouvements particuliers qu'on peut regarder la pression comme une fonction de la densité seule.

Viennent ensuite les équations de Lagrange, la transformation de Weber, les intégrales de Cauchy et la transformation de Clebsch; enfin les diverses formes d'équations relatives au mouvement permanent et au mouvement produit par une impulsion.

Le Chapitre III contient la théorie des images hydrodynamiques dans le plan et dans l'espace, théorie développée par M. Hicks, et qui joue un rôle important dans l'étude du mouvement de deux cylindres et de deux sphères, objets des Chapitres X et XI.

Le Chapitre IV est encore consacré à des généralités importantes : les propriétés des tourbillons, des surfaces de discontinuité, des mouvements cycliques, les relations analytiques avec les propriétés des courants électriques et des aimants, y sont exposées sous leurs divers aspects, d'une manière très complète. A la suite viennent les conséquences du théorème de Green relativement à l'énergie cinétique d'un liquide. Une partie de ces conséquences est énoncée sous une forme due, je crois, à Sir W. Thomson : « Un liquide dont le mouvement est acyclique et sans rotation élémentaire est entièrement ramené au repos quand on immobilise la surface limite ».

Les Chapitres V et VI sont consacrés au mouvement à deux dimensions; le Chapitre V contient de nombreux et intéressants exemples dus principalement à MM. Basset, Ferrers, Greenhill, Hicks, etc., du mouvement sans rotation d'un liquide à l'intérieur ou à l'extérieur de cylindres de diverses formes, soit immobiles, soit animés d'un mouvement quelconque de translation ou de rotation. Je ferai observer seulement que dans un cylindre tournant le mouvement d'un liquide naturel ne peut être doué de potentiel qu'au commencement, et que les solutions données dans ce Chapitre ne sont applicables dans la réalité qu'à l'état initial produit par une mise en mouvement brusque du cylindre, mais nullement à l'état permanent.

L'étude des mouvements discontinus, préparée par une intéres-

sante citation de Stokes (p. 99), est présentée exactement sous la forme que lui a donnée Kirchhoff dans son Traité de Physique mathématique.

Avec le Chapitre VII nous arrivons au mouvement des solides plongés dans un liquide lorsqu'il y a un potentiel des vitesses uniforme et sans surface de discontinuité : sphère, ellipsoïde, cavités ellipsoïdes, calotte sphérique (¹).

Le Chapitre VIII contient la théorie générale du mouvement des solides pleins ou perforés dans un liquide indéfini, lorsqu'il y a un potentiel des vitesses, avec ou sans mouvement cyclique à travers les ouvertures ; c'est une exposition précise du mode d'application des équations de Lagrange pour le mouvement des systèmes développé par Thomson et Tait dans la seconde édition de leur *Philosophie naturelle* sous le nom de *Ignoration of the coordinates*. Le Chapitre se termine par quelques indications relatives au mouvement des cylindres parallèles indéfinis.

La discussion du mouvement d'un seul solide abandonné à lui-même est exposée dans le Chapitre IX, sur plusieurs exemples; les plus intéressants sont le cylindre indéfini, avec circulation du liquide autour de lui, et le tore doué d'un plan de symétrie, perpendiculaire à son axe, avec circulation à travers l'ouverture centrale; les conditions de stabilité des mouvements rectiligne, circulaire et hélicoïde y sont examinées avec soin. Le Chapitre se termine par quelques propositions générales sur les mouvements permanents hélicoïdes.

Enfin les Chapitres X et XI contiennent l'étude détaillée du mouvement de deux cylindres avec ou sans circulation du liquide, et celle du mouvement de deux sphères de diamètres différents. Dans le cas où l'une des sphères se réduit à un plan fixe, il y a attraction ou répulsion apparente entre ce plan et la sphère mobile suivant que la direction du mouvement de la sphère fait avec la normale au plan un angle plus grand ou plus petit qu'un certain angle critique. Cet angle critique a pour valeur $\frac{\pi}{4}$ dans le cas d'un plan fixe et d'un cylindre mobile.

(¹) Le tore récemment traité par M. Hicks exige l'emploi de fonctions nouvelles.

Si l'une des sphères A oscille comme un pendule, l'autre B se mettra à osciller avec la même période; en outre, si la densité de la sphère B est plus grande que celle du liquide, elle sera toujours attirée par la sphère A: il en sera de même si la sphère B est moins dense que le liquide, mais seulement à petite distance de la sphère A; plus loin l'attraction cessera et sera remplacée par une répulsion. Enfin tout le monde connaît les résultats relatifs aux attractions ou répulsions des sphères *pulsantes*, changeant périodiquement de volume.

Quelques notes terminent le Volume. Chaque Chapitre est suivi d'exercices nombreux et intéressants, qui se rapportent généralement bien aux questions exposées auparavant; il n'y a d'exception que pour le Chapitre relatif aux mouvements discontinus. Dans une lecture, rapide à la vérité, je n'ai aperçu qu'un très petit nombre de fautes d'impression très faciles à corriger. J'espère que l'analyse toute sèche des matières exposées dans ce Livre indique suffisamment quelle lacune considérable il vient combler; il n'y avait d'analogue, en langue anglaise, que le Traité beaucoup moins étendu de Lamb; je ne crois pas qu'il en existe aucun équivalent sur le continent. M. B.

VILLIÉ (E.). — TRAITÉ DE CINÉMATIQUE A L'USAGE DES CANDIDATS A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION. 1 vol. in-8°; VIII-275 p. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888.

Le Livre de M. Villié est un Livre d'enseignement; par la façon dont il est composé, comme par la simplicité des démonstrations, il répond aux besoins des candidats à la licence, auxquels il rendra d'incontestables services. Il se compose de six Chapitres. Les deux premiers contiennent les notions et les formules essentielles relatives à la vitesse et à l'accélération d'un point : le second se termine par l'étude cinématique du mouvement elliptique. Trois Chapitres sont ensuite consacrés au mouvement d'un solide invariable. L'étude, tant au point de vue des vitesses que des accélérations, est faite avec les détails qui conviennent, et l'auteur a développé avec mesure les plus importantes des propositions géo-

métriques qu'ont suggérées les belles découvertes de Chasles; il a même introduit quelques-unes des propriétés que MM. Appell et Picard ont données dans leurs thèses sur les courbes ou les surfaces dont les tangentes ou les génératrices appartiennent à un complexe linéaire.

Le dernier Chapitre se rapporte aux mécanismes; il est, dit l'auteur, extrait en grande partie du cours fait par M. Poincaré à la Sorbonne, en 1886. On y traite des engrenages, des joints, de la vis sans fin, des bielles et des manivelles, des excentriques, de la coulisse de Stephenson, du parallélogramme de Watt et de l'inverseur Peaucellier. J. T.

MÉLANGES.

REMARQUE SUR LA DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES EN ÉLÉMENTS SIMPLES;

PAR M. ÉD. WEYR.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

... Peut-être y aurait-il quelque intérêt à établir de la manière suivante la nouvelle formule de décomposition que vous venez de publier dans la Note *Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II; 1888).

Soit $f(z)$ une fonction du second ordre, aux périodes ω, ω' et aux infinis α, β, de sorte que

$$f(\alpha+\beta-z)=f(z).$$

Soit $F(z)$ une fonction méromorphe doublement périodique, aux mêmes périodes ω, ω' et aux n infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Supposons ces infinis simples et appelons $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les résidus de $F(z)$ relatifs à ces points.

Envisageons la fraction $\frac{1}{f(z)-f(\alpha_1)}$; elle possède les deux seuls infinis α_1 et $\alpha+\beta-\alpha_1$, aux résidus respectifs $\frac{1}{f'(\alpha_1)}$ et $-\frac{1}{f'(\alpha_1)}$.

Puis, envisageons la fraction $\frac{f'(z)}{f(z)-f(\alpha_1)}$ qui est du quatrième ordre, car elle possède les infinis α_1, $\alpha+\beta-\alpha_1$, α, β. Les résidus relatifs aux deux premiers sont égaux à 1; les résidus relatifs à α et β sont tous les deux égaux à -1.

Envisageons maintenant la somme $\frac{g}{f(z)-f(\alpha_1)}+\frac{g'f'(z)}{f(z)-f(\alpha_1)}$; elle est du quatrième ordre et elle possède les infinis : α_1 au résidu $\frac{g}{f'(\alpha_1)}+g'$; $\alpha+\beta-\alpha_1$ au résidu $-\frac{g}{f'(\alpha_1)}+g'$; α au résidu $-g'$ et enfin β au résidu $-g'$.

Déterminons maintenant g et g' de telle manière qu'on ait

$$\frac{g}{f'(\alpha_1)}+g'=A_1 \qquad \text{et} \qquad -\frac{g}{f'(\alpha_1)}+g'=0,$$

c'est-à-dire prenons

$$g=\frac{1}{2}A_1f'(\alpha_1) \qquad \text{et} \qquad g'=\frac{1}{2}A_1;$$

alors notre somme $\frac{g+g'f'(z)}{f(z)-f(\alpha_1)}$ possédera l'infini α_1 au résidu A_1, tout comme $F(z)$; elle aura outre cela les infinis α et β aux résidus $-g'$.

Posons maintenant

$$\varphi(z)=\sum_{h=1}^{n}\left[\frac{g_h}{f(z)-f(\alpha_h)}+\frac{g'_hf'(z)}{f(z)-f(\alpha_h)}\right],$$

où

$$g_h=\frac{1}{2}A_hf'(\alpha_h) \qquad \text{et} \qquad g'_h=\frac{1}{2}A_h.$$

Cette fonction $\varphi(z)$ aux périodes ω, ω' aura évidemment les infinis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aux résidus respectifs $A_1, \ldots, A_n$; quant aux points α et β, ce ne seront plus des infinis de $\varphi(z)$, car les résidus des $\varphi(z)$ en ces points sont

$$-\Sigma g'_h=-\frac{1}{2}\Sigma A_h=0.$$

On a donc, d'après le théorème de Liouville,

$$F(z) - \varphi(z) = \text{const.},$$

de sorte que

$$F(z) = \text{const.} + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} \frac{A_h f'(\alpha_h) + A_h f'(z)}{f(z) - f(\alpha_h)}.$$

Si l'on suppose à la fonction de second ordre $f(z)$ un infini double α, on parvient à la même formule; en effet, dans ce cas, la fonction

$$\frac{g + g' f'(z)}{f(z) - f(\alpha_h)}$$

possède les trois infinis simples α_h, $2\alpha - \alpha_h$, α aux résidus respectifs

$$\frac{g}{f'(\alpha_h)} + g', \quad -\frac{g}{f'(\alpha_h)} + g', \quad -2g',$$

ce qui montre que la conclusion reste la même.

Or, en prenant dans ce cas

$$\omega = 2K, \qquad \omega' = 2iK', \qquad f(z) = \operatorname{sn}^2 z,$$

on tombe sur votre formule, relative à des infinis simples,

$$F(z) = C + \Sigma A \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 z - \operatorname{sn}^2 a}.$$

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE FRANCHIR PAR LA FORMULE DE TAYLOR LES CERCLES DE CONVERGENCE DE CERTAINES SÉRIES ENTIÈRES;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Toutes les fonctions auxquelles les théorèmes généraux de l'Analyse infinitésimale sont applicables peuvent être engendrées par le raccordement de développements successifs effectués au moyen de la formule de Taylor, chacun de ces développements conduisant par lui-même et par ses dérivées aux coefficients de celui qui lui succède. Le plus ordinairement cette marche pro-

gressive peut s'effectuer, sinon d'une manière tout à fait arbitraire, du moins dans des aires illimitées.

Mais il peut en être autrement, assertion à l'appui de laquelle M. É. Picard cite, dans son Cours d'Analyse, la proposition suivante de M. Weierstrass :

En posant

$$f(x) = 1 + x^{1^2} + x^{2^2} + \ldots + x^{m^2} + \ldots, \tag{1}$$

série entière en x dont le rayon de convergence maximum est évidemment 1, *et en appelant a une quantité quelconque de module* < 1, *le développement de* $f(a+h)$ *par la série de Taylor a toujours* $1 - \text{mod}\, a$ *pour rayon de convergence maximum.* D'où il suit immédiatement que *la formule de Taylor appliquée au calcul des valeurs de* $f(x)$ *ne permet jamais de sortir du cercle de rayon* 1 *ayant l'origine pour centre.*

Cette remarque de M. Weierstrass est une contribution très intéressante à la théorie des fonctions, dont on peut donner la démonstration élémentaire que voici :

I. *Si les exposants positifs en nombre illimité*

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_g, \quad \ldots$$

vont sans cesse en croissant, cas auquel la série entière

$$\Phi(x) = x^{K_1} + x^{K_2} + \ldots + x^{K_g} + \ldots$$

admet 1 *pour rayon de convergence maximum, sa somme est infinie quand x tend vers* 1 *en ne prenant que des valeurs positives croissantes.*

D'une part, il est évident que $\Phi(x)$ croît sans cesse; d'autre part, le polynôme $x^{K_1} + x^{K_2} + \ldots + x^{K_G} + x^{K_{G+1}}$ ayant pour limite $G+1$, il existe pour x quelque valeur positive et < 1 au delà de laquelle ce polynôme et $\Phi(x)$, à plus forte raison, restent supérieurs à l'entier G, si grand qu'il soit.

II. *Si, dans la suite d'entiers positifs*

$$k_1, \; k_2, \; \ldots \; k_g, \; \ldots$$

k_g est toujours compris entre K_g et K_{g+1} et si l'on pose

$$\varphi(x) = x^{k_1} + x^{k_2} + \ldots + x^{k_g} + \ldots,$$

on a

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} = 1. \qquad (2)$$

quand x tend vers 1 de la manière indiquée ci-dessus (I).

A cause des inégalités évidentes

$$\Phi(x) - x^{k_1} < \varphi(x) < \Phi(x),$$

on a

$$1 - \frac{x^{k_1}}{\Phi(x)} < \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} < 1,$$

ce qui entraine la relation (2) parce que $\Phi(x)$, étant infinie (I), on a

$$\lim \frac{x^{k_1}}{\Phi(x)} = 0.$$

III. *Soient $p = 2\mu + 1$ un nombre premier quelconque > 2 et θ une racine primitive $p^{ième}$ de l'unité. Si l'on fait dans la série* (1) $x = \theta\xi$, *ξ désignant une quantité positive tendant vers 1 en croissant, on aura*

$$f(\theta\xi) = f_0(\xi)[1 + (2 - \varepsilon_1)\theta^{r_1} + (2 - \varepsilon_2)\theta^{r_2} + \ldots + (2 - \varepsilon_\mu)\theta^{r_\mu}], \qquad (3)$$

où l'on a représenté par $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ les $\mu = \frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques positifs et $< p$ de ce nombre premier, par ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ des quantités infiniment petites et où l'on a posé

$$f_0(\xi) = 1 - \xi^{p^2} - \xi^{2p^2} - \ldots - \xi^{kp^2} - \ldots.$$

En sommant séparément dans la série (1) les termes dont les racines carrées des exposants sont divisibles par p, puis ceux pour lesquels la division de ces racines par p donne les restes 1, 2, ..., $p-1$, on obtient les séries partielles

$$f_0(x) = 1 + x^{p^2} + x^{2p^2} + \ldots + x^{kp^2} + \ldots,$$

puis

$$f_1(x) = x^{1^2} + x^{1+p^2} + \ldots + x^{1+kp^2} + \ldots,$$
$$f_2(x) = x^{2^2} + x^{2+p^2} + \ldots + x^{2+kp^2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{p-1}(x) = x^{(p-1)^2} + x^{p-1+p^2} + \ldots + x^{p-1+kp^2} + \ldots.$$

et l'on a évidemment

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_{p-1}(x). \tag{4}$$

Maintenant, si $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ sont les résidus positifs minima, suivant le module p, des carrés 1^2 et $(p-1)^2$, 2^2 et $(p-2)^2$, ..., μ^2 et $(\mu+1)^2$, il vient évidemment, en outre, d'abord

$$f_0(\theta\xi) = f_0(\xi),$$

puis

$$\begin{aligned}
f_1(\theta\xi) &= \theta^{r_1} f_1(\xi),\\
f_2(\theta\xi) &= \theta^{r_2} f_2(\xi),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
f_\mu(\theta\xi) &= \theta^{r_\mu} f_\mu(\xi),\\
f_{\mu+1}(\theta\xi) &= \theta^{r_\mu} f_{\mu+1}(\xi),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
f_{p-2}(\theta\xi) &= \theta^{r_2} f_{p-2}(\xi),\\
f_{p-1}(\theta\xi) &= \theta^{r_1} f_{p-1}(\xi),
\end{aligned}$$

relations dont la combinaison avec (4) donne la formule (3) à cause de $\lim \frac{f_1(\xi) + f_{p-1}(\xi)}{f_0(\xi)} = 2$, (II).

IV. *On ne peut avoir*

$$1 + 2\theta^{r_1} + 2\theta^{r_2} + \ldots + 2\theta^{r_\mu} = 0.$$

Effectivement cette équation étant de degré $p-1$ au plus et ayant pour coefficients des entiers égaux 1 à 1, $\frac{p-1}{2}$ à 2 et autant à 0, son premier membre ne peut avoir aucun diviseur commun avec celui de l'équation

$$1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{p-1} = 0,$$

à laquelle satisfait aussi la racine θ, parce que cette dernière équation est, comme on sait, irréductible.

V. *La quantité $f(\theta\xi)$ est donc infinie*, puisque, en vertu de la relation (3), elle est le produit de deux facteurs dont le premier est infini (I) et dont le second tend vers une limite non $= 0$ (IV).

VI. En d'autres termes, $f(x)$, somme de la série considérée (1), est toujours infinie, quand x tend vers une racine primitive de

l'unité d'indice premier quelconque (> 2) en suivant la droite c qui conduit de l'origine à cette racine. *Le rayon de convergence du développement de* $f(a+h)$ *ne peut donc surpasser la distance minima du point* a *aux racines de cette espèce;* or, à cause de l'indétermination du nombre premier p, *cette distance minima est évidemment* $1 - \mod a$.

Le raisonnement ci-dessus s'applique évidemment à une infinité d'autres séries entières, en particulier à toutes celles où, comme dans (1), les coefficients se réduisent à 1 et les exposants aux puissances semblables des nombres entiers naturels.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HALPHEN. — Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. *Deuxième Partie :* Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral. 1 vol. in-8°; 659 p. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1888.

Les lecteurs de M. Halphen trouveront assurément, dans cette deuxième Partie de son *Traité des fonctions elliptiques*, tout ce que la première Partie pouvait leur faire espérer : les problèmes classiques, élucidés par des maîtres illustres, et devenus presque inséparables d'une *Théorie des fonctions elliptiques*, sont repris avec une notation uniforme, complétés sur bien des points, poussés aussi loin que possible; les formules sont prêtes pour l'application numérique; les divers cas qui peuvent se présenter sont discutés avec la dernière précision. Le travail auquel M. Halphen s'est livré sur ces problèmes aurait pu contenter un excellent géomètre; mais à ces problèmes il en a ajouté d'autres : ceux qui ont suivi, dans les *Comptes rendus* de ces dernières années, ses belles Communications à l'Académie des Sciences seront heureux de retrouver dans son Livre, avec tous les développements et les éclaircissements qu'ils désiraient, des résultats dont ils n'avaient pas manqué d'admirer l'élégance et l'originalité. Tout cela fait en somme une œuvre considérable, qu'on ne peut avoir ici la prétention d'analyser en détail; il suffira d'indiquer rapidement quelles sont les principales matières traitées, et ce sera un peu au hasard que l'on insistera, çà et là, sur un point plutôt que sur un autre.

Chap. I : *Formules elliptiques pour la rotation des corps.* — L'auteur commence par introduire des formules, contenant deux arguments elliptiques et une constante, qui peuvent servir à représenter les angles qu'une direction fait avec trois directions rectangulaires. Ces formules contiennent en évidence une demi-période; quand on prend pour cette demi-période successivement les trois demi-périodes distinctes, on obtient trois directions rectangulaires; la position d'un trièdre trirectangle se trouve ainsi définie, par rapport à un autre trièdre trirectangle, au moyen de trois para-

mètres. Les angles d'Euler s'expriment au moyen de ces paramètres, et l'on a, tant pour ces angles que pour les neuf cosinus, d'importants développements en série, donnés en partie par Jacobi. L'introduction de ces paramètres permet encore de donner une forme simple aux composantes p, q, r d'une rotation quelconque.

Chap. II : *Mouvements à la Poinsot.* — Il s'agit des mouvements qui sont la généralisation immédiate du mouvement que prend un corps solide, qui a un point fixe et qui n'est soumis à aucune force extérieure; M. Darboux, dans ses Notes au *Traité de Mécanique* de M. Despeyrous, a fait l'étude géométrique de ces mouvements auxquels il est bien naturel d'attacher le nom de Poinsot. M. Halphen avait antérieurement fait cette étude au point de vue de la représentation du mouvement par les fonctions elliptiques, de manière à embrasser les résultats obtenus par Jacobi, par M. Hermite et divers auteurs; tous les éléments du mouvement sont ici donnés sous forme explicite, développés en série de manière à permettre le calcul numérique; les diverses formes de l'herpolhodie sont discutées avec détail. Une intéressante étude des mouvements à la Poinsot *concordants,* c'est-à-dire tels que les fonctions elliptiques correspondantes aient un même invariant absolu et que les périodes de temps soient les mêmes, termine ce Chapitre.

Chap. III : *Rotation d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe. La courbe élastique gauche.* — Après avoir donné les éléments du mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe, l'auteur établit cette belle proposition de Jacobi, qu'un tel mouvement peut s'obtenir par la composition de deux mouvements à la Poinsot, qui sont concordants, proposition dont il fait une étude très approfondie. Le pendule conique est traité comme cas particulier du corps grave de révolution. Pour la courbe élastique gauche, M. Halphen reproduit la belle analyse de M. Hermite dans son Mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques.*

Chap. Ier [illegible] *d'un corps solide dans un liquide indéfini e*[illegible] *es accélératrices.* — Ce mouvement,

étudié par Kirchhoff et Clebsch, dépend de quadratures elliptiques dans un cas particulier qui comprend celui, signalé par Kirchhoff, où le corps est homogène et de révolution. M. Halphen traite avec détail de ce cas particulier et montre comment le mouvement de rotation peut se décomposer en deux mouvements à la Poinsot, en y joignant une rotation variée, qui s'effectue toujours autour de la même droite. Cette dernière rotation disparaît si le corps est homogène et de révolution. On a ainsi une proposition toute pareille à celle de Jacobi sur le corps pesant, et qui donne lieu à une étude analogue.

CHAP. V : *La courbe élastique plane sous pression normale uniforme.* — Il s'agit de la forme d'équilibre d'une verge élastique dans le cas suivant : 1° la verge est supposée, dans son état naturel, de forme circulaire (ou droite); 2° outre des forces ou couples quelconques agissant à ses extrémités, dans le plan de la fibre moyenne, elle supporte une pression uniformément répartie sur cette fibre, normale à cette courbe et dans son plan, et lui restant toujours normale dans les déformations. L'étude de cette forme d'équilibre, faite pour la première fois par M. Maurice Lévy (1), a été reprise ensuite par M. Halphen (2); elle est traitée ici avec tous les détails désirables; les diverses formes que la courbe peut affecter sont décrites et dessinées.

CHAP. VI : *Lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré.* — L'étude de ces lignes conduit à un grand nombre de propriétés intéressantes. Tout d'abord, elles se classent suivant six espèces différentes. Sur une surface d'un type déterminé, il n'y a en général qu'une seule espèce de lignes géodésiques; il y a exception pour la surface gauche de révolution, sur laquelle elles se répartissent d'une façon très simple. Sur une même ligne géodésique, deux points variables, répondant à des arguments dont la somme ou la différence est constante, sont liés l'un à l'autre par des relations purement algébriques, non seulement entre leurs coordonnées,

(1) *Journal de Liouville*, 3e série, t. X.
(2) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIVe Cahier.

mais aussi entre les arcs qui aboutissent à ces points. La surface développable qui a pour arête de rebroussement une ligne géodésique est coupée par les surfaces confocales à la surface du second degré suivant deux courbes distinctes, égales entre elles, qui diffèrent de position par une simple rotation, et qui sont homographiques à la géodésique. La considération des points correspondants sur ces deux courbes donne lieu à des théorèmes très élégants sur les arcs de la géodésique. Il n'y a point de lignes géodésiques qui soient algébriques; mais des équations ayant une forme toute pareille peuvent représenter des courbes algébriques; en particulier, il y a des herpolhodies algébriques.

Chap. VII : *Problèmes de Géodésie.* — Ce Chapitre contient l'application, au cas d'un ellipsoïde légèrement aplati, des formules du Chapitre précédent. On y trouvera les formules approchées relatives aux coordonnées géographiques et à la distance géodésique, qui peuvent servir dans les problèmes de Géodésie.

Chap. VIII : *Attraction d'un anneau sphérique.* — Gauss a remarqué que les variations séculaires qui, pour les éléments d'une orbite planétaire, résultent de la perturbation causée par une autre planète, sont indépendantes de la position qu'occupe cette dernière dans son orbite; en sorte que, en imaginant la masse de cette planète répartie dans son orbite proportionnellement au temps qu'elle emploie à parcourir chaque élément, on trouverait, par cette hypothèse, les mêmes perturbations. De là l'intérêt que présente le calcul de l'attraction sur un point quelconque d'un anneau elliptique constitué comme on vient de l'expliquer; les formules que Gauss a données pour cet usage, et que M. Halphen commence par reproduire, exigent la résolution de l'équation du troisième degré dont dépendent les axes d'une surface du second ordre; M. Halphen montre comment, avec l'emploi des fonctions de M. Weierstrass, on peut éviter cette résolution. La solution du problème donne alors lieu à d'intéressants développements algébriques.

Chap. IX : *Équation d'Euler.* — L'auteur établit d'abord que toute équation du second degré, par rapport à deux variables sé-

parément, traduit la relation entre deux fonctions elliptiques, du même argument, c'est-à-dire deux fonctions rationnelles de pu et de $p'u$. Si l'équation est doublement linéaire, c'est que les deux fonctions elliptiques sont à deux pôles, et que les sommes des infinis coïncident entre elles. Si l'équation est doublement quadratique et symétrique, c'est que les deux fonctions sont de la forme $f(u)$ et $f(u+\mathrm{U})$, $f(u)$ étant une fonction elliptique, à deux pôles, d'argument u, et U une constante. Le cas général se ramène à celui-là par une substitution linéaire, mais il est indispensable de l'étudier directement : dans cette étude apparaissent les invariants de l'équation doublement quadratique $\mathrm{F}=0$, invariants qui, réciproquement, définissent sans ambiguïté cette équation, à des substitutions linéaires près. Après ces préliminaires, qui mettent en lumière des faits algébriques très intéressants, M. Halphen aborde l'intégration de l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}+\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}=0,$$

où les polynômes du quatrième degré X, Y diffèrent seulement par le nom de la variable. L'intégrale algébrique de cette équation est obtenue d'abord sous diverses formes irrationnelles, où la constante d'intégration est mise en évidence et pour lesquelles l'auteur lève les ambiguïtés relatives aux signes. On obtient ensuite la forme doublement quadratique de l'intégrale. Le problème de la réduction d'une fonction elliptique à la forme normale, dans sa forme générale, ne diffère pas, au fond, de l'intégration de l'équation d'Euler. Toutefois, l'auteur le traite directement. Le Chapitre se termine par l'examen de diverses propriétés algébriques des polynômes du quatrième degré et des équations doublement quadratiques.

Chap. X : *Les polygones de Poncelet.* — L'équation doublement quadratique, qui jouait un rôle essentiel dans le Chapitre précédent, n'en joue pas un moindre dans cette théorie. Symétrique, elle définit une relation entre deux points d'une même conique et, par suite, un polygone inscrit dans cette conique, parfaitement déterminé quand on donne un de ses sommets; dans le cas général, elle définit une correspondance entre deux points de

deux coniques distinctes et un polygone inscrit dans l'une, circonscrit à l'autre. Les invariants de cette équation sont les rapports anharmoniques des quatre points communs aux deux coniques, pris, dans le même ordre, sur l'une ou sur l'autre. La condition pour qu'un polygone, inscrit à la première conique, circonscrit à l'autre, se ferme est d'abord étudiée géométriquement, puis au moyen de la représentation elliptique des équations doublement quadratiques développée dans le précédent Chapitre. Les conditions de fermeture s'expriment simplement au moyen des deux rapports anharmoniques; elles sont aussi obtenues autrement, en particulier sous la forme si curieuse qu'a donnée M. Cayley. Toute cette théorie se relie ensuite, de la façon la plus belle, à la multiplication de l'argument, ainsi que M. Moutard l'avait montré dans un Mémoire inséré dans les *Applications d'Analyse et de Géométrie* de Poncelet.

Chap. XI : *Les courbes du premier genre; la cubique plane.* — M. Halphen nous offre, dans ce Chapitre, un résumé des recherches les plus importantes faites sur ces courbes à partir de Clebsch, recherches dont une large part lui revient d'ailleurs (*Mathematische Annalen*, t. XV); il y traite de la représentation des cubiques planes au moyen des fonctions elliptiques, de la forme, en coordonnées homogènes, de l'intégrale elliptique de première espèce, de l'expression elliptique des polaires, de l'expression des fonctions elliptiques par des covariants, de la multiplication de l'argument, enfin de l'application à la biquadratique gauche de considérations analogues à celles qui servent à l'étude des cubiques planes.

Chap. XII : *Équation de Lamé.* — L'auteur commence par introduire les coordonnées elliptiques d'un point de l'espace. Un tel point peut être regardé comme l'intersection de trois surfaces confocales du second degré; ses coordonnées s'expriment, par des formules bien connues, au moyen des trois paramètres qui définissent les trois surfaces; à chaque système de valeurs de ces paramètres répondent huit points; on obtient, au contraire, des formules univoques, en substituant à ces paramètres des arguments elliptiques.

Dans ce nouveau système de coordonnées, l'équation des potentiels, ou l'équation d'équilibre de la chaleur, prend une forme très simple. M. Halphen explique comment le problème de Lamé, relatif à l'équilibre de la chaleur dans un ellipsoïde homogène dont la surface est entretenue à une température fixe, mais variable d'un point à un autre, se ramène à l'intégration de l'équation

$$y'' - [n(n+1)\mathrm{p}u + \mathrm{B}]y = 0,$$

par des fonctions entières du degré n des quantités

$$\sqrt{\mathrm{p}u - e_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3);$$

pour qu'il en soit ainsi, il faut que la constante B soit racine d'une équation du $(2n+1)^{\text{ième}}$ degré, laquelle, d'ailleurs, se décompose en plusieurs autres, qui correspondent à trois types possibles de solutions. Les diverses espèces de solutions (fonctions de Lamé) sont étudiées avec détail et obtenues de diverses façons, et l'on montre comment elles conduisent à la solution du problème concernant l'équilibre des températures. Après une courte digression relative à l'attraction des ellipsoïdes, l'auteur aborde l'intégration de l'équation de Lamé dans le cas où B est une constante et développe la belle méthode que l'on doit à M. Hermite. Il termine en s'occupant de l'équation de Riccati, qui peut être regardée comme un cas dégénéré de l'équation de Lamé; il en traite d'abord à ce point de vue, puis directement.

Chap. XIII : *Équations différentielles linéaires.* — Les recherches de M. Hermite sur l'équation de Lamé ont été le point de départ de travaux très importants sur les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions elliptiques et qui, pour ce qui est des points critiques, rentrent dans le type simple sur lequel M. Fuchs a appelé l'attention. M. Picard a considéré celles de ces équations dont l'intégrale générale est uniforme, ce que les méthodes de M. Fuchs permettent de reconnaître aisément. Une telle équation admet toujours au moins une intégrale doublement périodique de seconde espèce, et l'intégrale générale est un polynôme entier en u et ζu à coefficients doublement périodiques de seconde espèce. M. Halphen, dans son Mé-

moire sur la réduction des équations différentielles aux formes intégrables (¹), a étudié la répartition de ces intégrales en groupes et, d'autre part, a considéré les équations linéaires à coefficients doublement périodiques dont les intégrales ont des rapports uniformes, ce que l'on sait encore reconnaître. A la vérité, ces équations, par un changement convenable des variables, se ramènent à celles de M. Picard; mais il est préférable de les traiter directement. L'étude de ces diverses classes d'équations est reprise ici avec détails. Des exemples intéressants, empruntés en partie au Mémoire de l'auteur que l'on vient de rappeler, éclaircissent la théorie.

CHAP. XIV : *Fractions continues et intégrales pseudo-elliptiques.* — Le beau Chapitre qui termine le Volume est consacré à l'une des plus curieuses et des plus importantes questions de la théorie des fonctions elliptiques. Dans une courte *Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques* (²), Jacobi a montré comment la question du développement en fraction continue de la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré se reliait à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques et donné l'expression simple, au moyen de ces fonctions, d'un quotient complet quelconque. D'autre part, dans son célèbre Mémoire *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$ ... (³), Abel avait montré comment, en supposant que R est un polynôme entier en x, la recherche du cas où l'on pouvait trouver pour ρ une fonction entière telle que l'on eût

$$\int \frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{y+\sqrt{R}}{y-\sqrt{R}},$$

en désignant par y une fonction rationnelle de x, dépend de la périodicité de la fraction continue qui représente $\sqrt{R}$, et il en a déduit, dans le cas où R est du quatrième degré, des moyens de

(¹) *Recueil des Savants étrangers*, t. XXVIII.
(²) *Werke*, t. I, p. 330.
(³) *Œuvres*, t. I, p. 104.

former des intégrales pseudo-elliptiques. M. Halphen reprend la question en l'élargissant quelque peu. Au lieu du développement de $\sqrt{X}$, il traite, en effet, du développement en fraction continue de

$$\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y},$$

X et Y étant le même polynôme du quatrième degré, l'un avec la variable x, l'autre avec la variable y, et parvient à l'expression elliptique des divers éléments de la fraction continue. De plus, il arrive, sur la convergence de cette fraction, à des résultats très nets et très curieux. Cette difficile question n'avait pas été abordée avant M. Halphen. Il traite en dernier lieu des intégrales pseudo-elliptiques : il montre comment, en se restreignant au cas où R est un polynôme du quatrième degré, le problème posé par Abel peut être résolu en supposant seulement que ρ est une fonction rationnelle et termine par quelques indications un peu décourageantes sur la question de savoir si, ρ et R étant donnés, l'intégrale $\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$ est, ou non, pseudo-elliptique. J. T.

PEANO (G.). — CALCOLO GEOMETRICO SECONDO L' « AUSDEHNUNGSLEHRE DI H. GRASSMANN », PRECEDUTO DALLE OPERAZIONI DELLA LOGICA DEDUTTIVA. 1 vol. in-8°; X-170 p. Turin, Bocca frères; 1888.

M. Peano, en écrivant le petit Livre que nous annonçons, a voulu familiariser le lecteur avec les procédés de raisonnement qui, employés déjà en partie par divers auteurs, ont été systématisés et généralisés par Grassmann; il caractérise exactement ces procédés, en les désignant comme des opérations analogues à celles de l'Algèbre, effectuées sur les êtres géométriques eux-mêmes, et non pas sur des nombres qui déterminent ces êtres; son exposition, nouvelle sur beaucoup de points, est claire et facile; M. Peano, comme il convenait dans un Livre de ce genre, a renoncé aux concepts trop généraux et trop abstraits, et le lecteur qui voudra bien commencer par le commencement le suivra sans peine. Les six

premiers Chapitres contiennent, à proprement parler, les éléments du calcul géométrique, à savoir la définition des *formations géométriques* des quatre espèces, c'est-à-dire des ensembles de points, de segments, de triangles, ou de tétraèdres, respectivement affectés de coefficients numériques, la réduction de ces formations géométriques, ce qui, pour les deux premières espèces, comprend le calcul barycentrique et la réduction d'un système de forces, la théorie des opérations effectuées sur les formations géométriques, en particulier, la théorie de la projection et de l'intersection.

Le Chapitre VII concerne les propriétés infinitésimales des formations géométriques; le Chapitre VIII et dernier traite des systèmes linéaires. Enfin une intéressante Introduction, d'une vingtaine de pages, se rapporte aux opérations de la logique déductive. J. T.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

PAR M. PTASZYCKI,
Privat-Docent à l'Université de Saint-Pétersbourg.

1. Désignons par $\sqrt[m]{R}$ le radical

$$\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ étant des nombres différents, $m, n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ des nombres entiers positifs, tels que leur plus grand commun diviseur est 1 et $n_i < m$; désignons encore par

$$F(x, \sqrt[m]{R})$$

une fonction rationnelle de x et de $\sqrt[m]{R}$. Cela posé, on demande quel doit être le radical $\sqrt[m]{R}$, pour que l'intégrale

$$\int F(x, \sqrt[m]{R})\, dx,$$

pour toutes les valeurs de F, soit exprimable sous forme finie

(c'est-à-dire en indiquant sur la variable un nombre limité d'opérations algébriques et logarithmiques). On a le théorème suivant :

Pour que l'intégrale

$$\int \mathrm{F}(x, \sqrt[m]{\mathrm{R}})\, dx,$$

pour chaque valeur de la fonction rationnelle F, *soit exprimable sous forme finie, il faut et il suffit que le radical* $\sqrt[m]{\mathrm{R}}$ *ait l'une des deux formes*

$$\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}}, \quad \sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{m-n_1}}.$$

2. On s'assure aisément que les conditions indiquées sont suffisantes. En effet, à l'aide de la substitution $x - a_1 = z^m$, dans le cas de $\sqrt[m]{\mathrm{R}} = \sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}}$, et à l'aide de la substitution $\frac{x-a_1}{x-a_2} = z^m$, dans le cas de $\sqrt[m]{\mathrm{R}} = \sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{m-n_1}}$, on ramène la différentielle $\mathrm{F}(x, \sqrt[m]{\mathrm{R}})\, dx$ à la forme rationnelle.

3. Pour démontrer que nos conditions sont nécessaires, il suffit d'indiquer les intégrales, de forme $\int \mathrm{F}(x, \sqrt[m]{\mathrm{R}})\, dx$, qui ne s'expriment pas sous forme finie, toutes les fois que le radical $\sqrt[m]{\mathrm{R}}$ n'est ni de la forme $\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}}$, ni de la forme $\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{m-n_1}}$.

Je vais démontrer ici l'impossibilité sous forme finie de ces trois intégrales

(A) $$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}}},$$

où $n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda > m$;

(B) $$\int \frac{x^{\lambda-2}\, dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}}},$$

où $n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda = m$, $\lambda > 2$;

(C) $$\int \frac{x^{\lambda-2}\, dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}}},$$

où $n_1 + n_2 + \dots + n_\lambda < m$, $\lambda \geq 2$.

4. La démonstration de l'impossibilité des intégrales (A), (B), (C) sous forme finie repose tout entière sur le théorème connu d'Abel concernant l'intégration finie. D'après ce théorème, si l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{Q\sqrt[m]{R}}$ (P, Q étant des polynômes entiers en x) est exprimable sous forme finie, on pourra lui donner la forme

$$\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}} + \Sigma A \log\left[\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right)\varphi^{\alpha}\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\varphi^{\alpha^2}\left(\alpha^2\sqrt[m]{R}\right)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right)\right],$$

X, Y étant des polynômes entiers, A une constante, α une racine primitive de l'équation $x^m - 1 = 0$, $\varphi\left(\alpha^i\sqrt[m]{R}\right)$ une fonction rationnelle de x et de $\alpha^i\sqrt[m]{R}$.

C'est l'expression de cette forme que M. Tchebycheff a prise pour point de départ dans ses recherches sur l'intégration des différentielles irrationnelles (*Journal de Liouville*, t. XVIII).

Je me propose de démontrer succinctement quelques propriétés de cette expression, qui me seront indispensables.

5. La dérivée de la fonction

$$\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}$$

se réduit à

$$\frac{L}{M\sqrt[m]{R}},$$

L, M étant des polynômes entiers. Nous supposerons les fractions $\frac{X}{Y}$, $\frac{L}{M}$ irréductibles.

Soit $(x - a_i)$ un facteur du polynôme

$$R = (x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2}\ldots(x - a_\lambda)^{n_\lambda},$$

et p_i l'exposant de $x - a_i$ dans le premier terme du développement de $\frac{X}{Y}$ suivant les puissances croissantes de ce binôme, il est clair que le premier terme du développement de $\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}$ sera en $(x - a_i)^{p_i - \frac{n_i}{m}}$, et le premier terme du développement de $\frac{L}{M\sqrt[m]{R}}$ sera en $(x - a_i)^{p_i - \frac{n_i}{m} - 1}$; par conséquent, le premier terme du déve-

loppement de $\frac{L}{M}$ sera en $(x-a_1)^{p-1}$. Soit, en second lieu, $(x-b)$ un facteur, premier avec R, du polynôme Y, et q l'exposant avec lequel ce facteur se trouve dans Y: il est clair que ce facteur se trouvera dans le polynôme M avec l'exposant $q+1$.

Il résulte de ces remarques que si le polynôme M n'a ni facteurs multiples, ni facteurs appartenant à R, alors Y est égal à une constante, et le polynôme X est divisible par tous les λ facteurs $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, ..., $(x-a_\lambda)$: donc, dans ce cas, le degré de la fonction $\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}$ n'est pas inférieur au nombre

$$\lambda - \frac{n_1 - n_2 - \ldots - n_\lambda}{m}.$$

Remarquons encore que ce nombre surpasse zéro, car $\frac{n_i}{m} < 1$.

6. La dérivée de la fonction

$$\log W = \log\left[\varphi(\sqrt[m]{R})\,\varphi z(z\sqrt[m]{R})\,\varphi z^2(z^2\sqrt[m]{R})\ldots\varphi z^{m-1}(z^{m-1}\sqrt[m]{R})\right]$$

se réduit à

$$\frac{P_0}{Q_0\sqrt[m]{R}},$$

P_0, Q_0 étant des polynômes entiers. Pour l'examiner, je présenterai la fonction $\log W$ sous une autre forme.

Soit μ le degré de l'équation irréductible, à coefficients rationnels, dont z est racine; on aura

$$z^{\mu+i} = c_0 + c_1 z - c_2 z^2 + \ldots + c_{\mu-1} z^{\mu-1}, \qquad (i \geq 0),$$

c désignant des nombres entiers rationnels; à l'aide de cette formule, nous trouverons

$$\log W = \log\left[\psi_0(\sqrt[m]{R})\,\psi_1 z(\sqrt[m]{R})\,\psi_2 z^2(\sqrt[m]{R})\ldots\psi_{\mu-1} z^{\mu-1}(\sqrt[m]{R})\right].$$

$\psi_i(\sqrt[m]{R})$ étant des fonctions rationnelles de x et de $\sqrt[m]{R}$. On a donc

$$\frac{P_0}{Q_0\sqrt[m]{R}} = \frac{d\log W}{dx} = \frac{d}{dx}\log\left[\psi_0(\sqrt[m]{R})\,\psi_1 z(\sqrt[m]{R})\,\psi_2 z^2(\sqrt[m]{R})\ldots\psi_{\mu-1} z^{\mu-1}(\sqrt[m]{R})\right].$$

7. Proposons-nous de trouver le premier terme dans le dévelop-

pement de $\frac{P_1}{Q_1\sqrt[m]{R}}$ suivant les puissances décroissantes de x. Désignons par $\omega^{(1)}$ l'exposant de x dans le premier terme du développement de $\psi_1(x\sqrt[m]{R})$: alors, on peut dire que le terme cherché sera

$$\frac{X_0}{x} = \frac{\omega^{(1)} + \omega^{(2)}x + \ldots + \omega^{(\mu-1)}x^{\mu-1}}{x}.$$

On en conclut que le degré de $\frac{P_0}{Q_0\sqrt[m]{R}}$ n'est pas supérieur à -1.

8. Si ce degré est inférieur à -1, alors on a

$$X_0 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\omega^{(1)} = \omega^{(2)} = \ldots = \omega^{(\mu-1)} = 0.$$

Il en résulte que, si le degré de $\frac{P_0}{Q_0\sqrt[m]{R}}$ est inférieur à -1, toutes les fonctions $\psi_1(x\sqrt[m]{R})$ restent finies pour $x=\infty$; et cette propriété aura lieu pour toutes les m significations du radical $\sqrt[m]{R}$, car la dernière égalité du n° 6 entraîne encore la suivante :

$$\frac{P_1}{Q_1 x\sqrt[m]{R}} = \frac{\ell}{dx}\log[\psi_1(x\sqrt[m]{R})\,\psi_1^{\alpha}(x\sqrt[m]{R})\,\psi_2^{\alpha^2}(x\sqrt[m]{R})\ldots\psi_{\mu-1}^{\alpha^{\mu-1}}(x\sqrt[m]{R})].$$

9. Proposons-nous maintenant de trouver le premier terme dans le développement de $\frac{P_1}{Q_1\sqrt[m]{R}} = \frac{d\log W}{dx}$ suivant les puissances croissantes d'un binôme quelconque $x-b$. Désignons par ω_1 l'exposant de ce binôme dans le premier terme du développement de $\psi_1(x\sqrt[m]{R})$: alors on peut dire que le terme cherché sera

$$\frac{X_0}{x-b} = \frac{\omega_1 + \omega_2(x-b) + \omega_3(x-b)^2 + \ldots + \omega_{\mu-1}(x-b)^{\mu-1}}{x-b}.$$

On en conclut que, dans l'expression $\frac{P_0}{Q_0\sqrt[m]{R}}$, le polynôme Q_0 ne contient aucuns facteurs multiples, ni facteurs appartenant à R.

10. Si le binôme $x-b$ n'est pas diviseur de Q_0, on a

$$X_0 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$w_0 = w_1 = \ldots = w_{\mu-1} = 0.$$

Il en résulte que, si le binôme $x - b$ n'est pas diviseur de Q_0, toutes les fonctions $\psi_i(\sqrt[m]{R})$ restent finies pour $x = b$; et cette propriété aura lieu pour toutes les m significations de $\sqrt[m]{R}$: c'est ce qu'on vérifie en remarquant que la dernière égalité du n° 6 entraîne toujours la dernière du n° 8.

11. Maintenant il est aisé de reconnaître que la fonction $\frac{P_0}{Q_0 \sqrt[m]{R}}$ ne peut être d'un degré inférieur à -1 en même temps que $Q_0 = 1$.

En effet, en vertu des propositions des n°s 8, 10, on voit que le contraire aurait lieu seulement dans le cas où toutes les fonctions $\psi_i(\sqrt[m]{R})$, pour toutes les m significations de $\sqrt[m]{R}$, resteraient finies pour chaque valeur, finie et infinie, de x. Or cela est impossible; en effet, des pareilles fonctions $\psi_i(\sqrt[m]{R})$ se réduiraient à des constantes, comme on le prouve dans la théorie des fonctions. Ceci, du reste, se démontre facilement, en remarquant que, si l'on pose

$$\psi_i(\sqrt[m]{R}) = X_0 + X_1 \sqrt[m]{R} + X_2 \sqrt[m]{R^2} + \ldots + X_{m-1} \sqrt[m]{R^{m-1}},$$

on a

$$m X_k \sqrt[m]{R^k} = \psi_i(\sqrt[m]{R}) + \alpha^{-k} \psi_i(\alpha \sqrt[m]{R}) + \alpha^{-2k} \psi_i(\alpha^2 \sqrt[m]{R}) + \ldots + \psi_i^{-(m-1)k}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{R}).$$

12. Examinons enfin la fonction

$$\Sigma A \log W = \Sigma A \log[\varphi(\sqrt[m]{R})\, \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[m]{R})\, \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[m]{R}) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{R})],$$

qui figure dans l'expression du n° 4. Nous supposons, ce qui est permis, que l'on a réduit au moindre nombre possible les logarithmes contenus dans la somme $\Sigma A \log W$.

On trouve

$$\frac{d}{dx} \Sigma A \log W = \Sigma A \frac{P_0}{Q_0 \sqrt[m]{R}} = \frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}};$$

le degré de $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$ ne surpasse pas -1, et le polynôme Q_1 n'a ni facteurs multiples, ni facteurs appartenant à R.

Il est facile de voir que la fonction $\frac{P_1}{Q_1 \sqrt[m]{R}}$ ne peut être d'un degré inférieur à -1 en même temps que $Q_1 = 1$.

En effet, le contraire aurait lieu seulement dans l'un de ces deux cas : 1° chacune des fonctions $\frac{P_0}{Q_0 \sqrt[m]{R}}$ est d'un degré inférieur à -1 en même temps que $Q_0 = 1$; 2° les coefficients A de la somme $\Sigma A \log W$ sont liés par les relations de la forme $\Sigma A \mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{N}$ désignant des nombres complexes définis dans les n°s 7, 9. Nous avons déjà prouvé que la première supposition est impossible; la seconde doit être de même considérée comme inadmissible. En effet, la relation $\Sigma A \mathfrak{N} = 0$ permettrait de diminuer d'une unité le nombre de termes entrant dans la somme $\Sigma A \log W$; ce qui est contraire à l'hypothèse posée au commencement de ce numéro.

Les propositions contenues dans les n°s 7, 9 sont établies par M. Tchebycheff dans le Mémoire cité plus haut; on y trouve aussi la démonstration des propositions des n°s 8, 10, 11, 12 pour le cas de m premier (1).

13. En s'appuyant sur les propositions des n°s 5-12, il est aisé de reconnaître que les intégrales (A), (B), (C) du n° 3 ne s'expriment pas sous forme finie, c'est-à-dire que l'équation

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt[m]{R}} = \frac{X}{Y \sqrt[m]{R}} + \Sigma A \log W$$

(1) A l'occasion de la proposition qui est démontrée dans le n° 11, pour m quelconque, je crois utile de faire la remarque suivante.

Dans son Mémoire cité plus haut, M. Tchebycheff a établi des théorèmes d'une grande importance, pour l'intégration sous forme finie. Sans énumérer les applications qui s'en déduisent, je rappellerai cependant que c'est en s'appuyant sur ces théorèmes que l'illustre géomètre a démontré que les cas connus de l'intégrabilité des différentielles binômes

$$x^p (a + b x^q)^{\frac{n}{m}} dx, \qquad (p, q, n, m \text{ étant des nombres entiers})$$

sont les seuls où l'intégration est possible par des signes algébriques et logarithmiques, en nombre fini.

Je remarquerai ici que la démonstration donnée par M. Tchebycheff à ses théorèmes doit être complétée sur un point (*voir* § VI du Mémoire cité), et c'est à l'aide de la proposition du n° 11 qu'on peut y apporter le complément suffisant.

ne peut pas subsister si l'on remplace $\int \frac{P\,dx}{\sqrt[m]{R}}$ par les intégrales (A), (B), (C).

En nous servant de la notation adoptée dans le numéro précédent, nous donnerons à cette équation la forme suivante :

$$\frac{P}{\sqrt[m]{R}} - \frac{P_1}{Q_1\sqrt[m]{R}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}\right).$$

En l'examinant, nous remarquons d'abord que son premier membre représente une fonction $\frac{L}{M\sqrt[m]{R}}$, où M est un polynôme qui n'a ni des facteurs multiples, ni des facteurs appartenant à R; il en résulte que le second membre doit être égal ou à zéro, ou (n° 5) à une fonction dont le degré n'est pas inférieur à

$$\lambda - \frac{n_1+n_2+\ldots+n_\lambda}{m} - 1.$$

Discutons séparément ces suppositions à l'égard de chacune de nos trois intégrales.

14. Prenons, en premier lieu, l'intégrale (A); alors la seconde équation du n° 13 s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt[m]{R}} - \frac{P_1}{Q_1\sqrt[m]{R}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}\right);$$

on a ici

$$R = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_\lambda)^{n_\lambda} \quad \text{et} \quad n_1+n_2+\ldots+n_\lambda > m.$$

On voit que le premier terme dans cette équation est du degré $-\frac{n_1+n_2+\ldots+n_\lambda}{m} < -1$; le degré du second terme est $\leqq -1$; il s'ensuit que la supposition que le degré du troisième terme n'est pas inférieur au nombre $\lambda - \frac{n_1+n_2+\ldots+n_\lambda}{m} - 1$ doit être rejetée, car ce nombre est > -1; de même, ce terme ne peut être égal à zéro. En effet, dans le cas contraire, on tomberait sur l'équation $\frac{1}{\sqrt[m]{R}} = \frac{P_1}{Q_1\sqrt[m]{R}}$, qui est impossible (n° 12), car elle suppose le degré de $\frac{P_1}{Q_1\sqrt[m]{R}}$ égal à $-\frac{n_1+n_2+\ldots+n_\lambda}{m} < -1$ en même temps que $Q_1 = 1$.

Prenons, en second lieu, l'intégrale (B); alors la seconde équa-

tion du n° 13 s'écrit

$$\frac{x^{\lambda-2}}{\sqrt[m]{R}} - \frac{P_1}{Q_1\sqrt[m]{R}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}\right);$$

on a ici

$$R = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}$$

et

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_\lambda = m, \qquad \lambda > 2.$$

On voit que le degré du premier terme de cette équation est $\lambda - 2 - \frac{n_1+n_2+\ldots+n_\lambda}{m} > -1$; le degré du second terme est $\leqq -1$; il en résulte que le troisième terme ne peut être égal à zéro; la supposition que le degré de ce terme n'est pas inférieur au nombre $\lambda - \frac{n_1+n_2+\ldots+n_\lambda}{m} - 1$ doit être rejetée aussi. En effet, ce nombre surpasse le degré du premier terme, et celui du second.

Prenons enfin l'intégrale (C); alors la seconde équation du n° 13 s'écrit

$$\frac{x^{\lambda-2}}{\sqrt[m]{R}} - \frac{P_1}{Q_1\sqrt[m]{R}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{X}{Y\sqrt[m]{R}}\right);$$

on a ici

$$R = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}$$

et

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_\lambda < m, \qquad \lambda \geqq 2.$$

On voit que le degré du premier terme dans l'équation est $\lambda - 2 - \frac{n_1+n_2+\ldots+n_\lambda}{m} > -1$; le degré du second terme est $\leqq -1$; il en résulte que le troisième terme ne peut être égal ni à zéro, ni à une fonction dont le degré n'est pas inférieur à

$$\lambda - \frac{n_1+n_2+\ldots+n_\lambda}{m} - 1.$$

Ainsi l'on a complètement démontré la proposition du n° 3, et en même temps le théorème énoncé dans le n° 1.

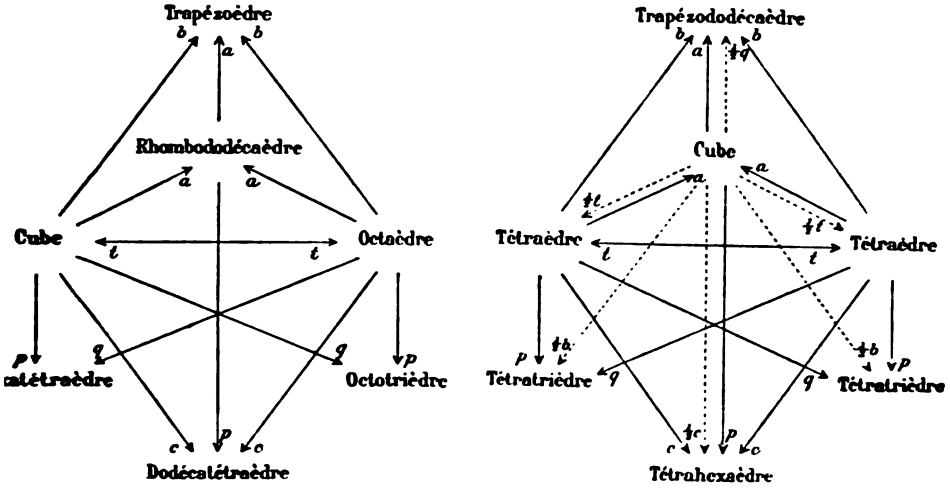
TABLEAU DES DÉRIVATIONS CRISTALLOGRAPHIQUES DANS LE PREMIER SYSTÈME;

PAR M. E. CESARO.

Nous croyons répondre à un besoin de l'enseignement de la Cristallographie en coordonnant dans un tableau les dérivations

mutuelles des formes cristallines simples du premier système. On sait que les auteurs français considèrent le *cube* comme forme fondamentale, tandis que les auteurs allemands font jouer ce rôle à l'*octaèdre*. Notre Tableau, renfermant toutes les dérivations possibles, contient aussi les deux systèmes de dérivation que nous venons de rappeler; mais il met en évidence deux faits remarquables : 1° la corrélation parfaite existant entre les deux systèmes de dérivation; 2° la dépendance mutuelle des opérations cristallographiques. Chaque opération a été représentée par une flèche, allant de la forme primitive à la forme dérivée. La flèche est

Fig. 1.



accompagnée d'une lettre, indiquant la nature de l'opération à effectuer. Voici la signification des différentes lettres :

t, troncature des sommets;
a, troncature des arêtes;
b, pointement direct (c'est-à-dire reposant sur les faces);
c, pointement double;
p, biseautement;
q, pointement indirect (c'est-à-dire reposant sur les arêtes).

Si l'on convient de représenter la *succession* de deux opérations comme étant le *produit* (non commutable) de ces opérations, on

tion ... suivantes :

on

et

... niques se
... on prend
... *tronca-*
... *direct*
... pointement
... autement :
... suivie d'un
... analogue pour le
... fondamentales
... *droit* et *gauche*,
... sommets alter-
... représentées en traits
... ient $\frac{1}{2}$. La construc-
... *hexadiédrique* n'est
... des formes simples,
... été observées sur
... un système de formes
... adopté par les cristal-

... A M. HERMITE :

... qui s'occupent ...
... en série des inté-

... *ns continues* ...
... *développée en une série*

on a

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots.$$

De ce théorème on tire comme corollaire le théorème suivant :

B. *Si* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, u_1, u_2, ... *sont des fonctions continues dans l'intervalle* (a, b) *et si* $\varphi(x)$ *peut être développée en une série uniformément convergente dans le même intervalle*

$$\varphi(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

on a

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b u_1\psi(x)\,dx + \int_a^b u_2\psi(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\psi(x)\,dx + \ldots.$$

On peut aussi commencer par établir ce théorème et ensuite en déduire le théorème (A) en posant $\psi(x) = 1$. Mon but est de vous présenter, Monsieur, quelques remarques pour démontrer qu'il est bien préférable d'établir directement le théorème (B) pour profiter de quelques circonstances de sa démonstration qui restent cachées dans la démonstration du théorème (A).

Si l'on représente par R_n la somme

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

qui est une fonction continue de x, on peut écrire

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b u_1\psi(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\psi(x)\,dx + \int_a^b R_n\,\psi(x)\,dx.$$

Or le développement de $\varphi(x)$ étant uniformément convergent dans l'intervalle (a, b), on peut, quelque petit que soit ε, déterminer n_1 de manière que $|R_n| < \varepsilon$ pour $n > n_1$, dans l'intervalle considéré. Nous avons donc

$$\left|\int_a^b R_n\psi(x)\,dx\right| < \int_a^b |R_n||\psi(x)|\,dx < \varepsilon\int_a^b |\psi(x)|\,dx$$

et, par conséquent,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b R_n \psi(x)\, dx = 0.$$

Donc

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx = \int_a^b u_1 \psi(x)\, dx + \int_a^b u_2 \psi(x)\, dx + \ldots + \int_a^b u_n \psi(x)\, dx + \ldots.$$

Voici maintenant les remarques sur ce théorème que je me propose de vous communiquer :

1° Soient M la plus grande valeur de $|R_n|$ dans l'intervalle (a, b), et L la plus grande valeur de $|\psi(x)|$ dans le même intervalle. La démonstration du théorème (A) fait voir que la valeur absolue de l'erreur commise quand on arrête au terme d'ordre n de la série (2) est moindre que $ML(b-a)$.

La démonstration du théorème (B) donne cette même expression de l'erreur, en y posant $\varphi(x) = \varphi(x)\psi(x)$ et $\psi(x) = 1$, et encore la suivante :

$$M \int_a^b |\psi(x)\, dx|,$$

qui est préférable quand on a

$$\int_a^b |\psi(x)\, dx| < L(b-a).$$

Ainsi, par exemple, si l'on considère l'intégrale elliptique

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où $0 < a < b < 1$, et si l'on calcule au moyen des n premiers termes de la série

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2 \int_a^b \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}k^4 \int_a^b \frac{x^4\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots.$$

on a les deux expressions de l'erreur

$$\frac{M}{\sqrt{1-b^2}}(b-a),$$

$$M\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = M[\arcsin b - \arcsin a],$$

où

$$M < \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}b^{2n} + \frac{1.3\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n+2)}k^{2n+2}b^{2n+2} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$M < \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}b^{2n}\frac{1}{1-k^2b^2}.$$

Si $b=1$, la première expression de l'erreur est inapplicable, parce qu'elle donne l'infini; au contraire, la seconde donne

$$M\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a\right).$$

De la même manière, si l'on considère l'intégrale

$$\int_a^b \frac{e^x\,dx}{x},$$

où $0<a<b$, et si l'on calcule au moyen des n premiers termes de la série

$$\int_a^b \frac{e^x\,dx}{x} = \log\frac{b}{a} + b - a + \frac{b^2-a^2}{1.2.2} + \ldots,$$

on trouve, en posant $\varphi(x)=\frac{e^x}{x}$, $\psi(x)=1$, l'expression de l'erreur

$$\frac{M}{a}(b-a)$$

et, en posant $\varphi(x)=e^x$, $\psi(x)=\frac{1}{x}$, l'expression

$$M\int_a^b \frac{dx}{x} = M\log\frac{b}{a}.$$

Or nous avons

$$\frac{a(\log b - \log a)}{b-a} < 1;$$

donc la seconde expression est préférable à la première.

2° Voici maintenant la seconde considération pour préférer l'établissement direct du théorème (B).

En analysant la démonstration du théorème (B), on voit qu'il est applicable quand la fonction $\psi(x)$ devient infinie ou discontinue dans un nombre limité de points de l'intervalle (a, b), si les intégrales

$$\int_a^b |\psi(x)|\,dx, \quad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx, \quad \int_a^b \psi(x)u_1\,dx, \quad \ldots$$

sont finies et déterminées. Au contraire le théorème (A) n'est pas alors applicable.

Ainsi, par exemple, au moyen du théorème (A), on ne peut pas trouver le développement de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

au contraire, on peut l'obtenir au moyen du théorème (B), parce que les intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

sont finies et déterminées.

3° Le théorème (A) n'est pas applicable quand les limites a et b sont infinies. Au contraire, le théorème (B) est applicable, si les intégrales

$$\int_a^b \psi(x)\,dx, \quad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx, \quad \int_a^b \psi(x)u_1\,dx, \quad \ldots$$

sont alors finies et déterminées.

Porto, le 23 octobre 1888.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

P. DE LAFITTE. — ESSAI D'UNE THÉORIE RATIONNELLE DES SOCIÉTÉS DE SECOURS MUTUELS. 1 vol. in-8°, XVI-158 pages. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888.

Les Sociétés de secours mutuels ont pour but essentiel : de procurer les soins du médecin et les médicaments à leurs membres participants malades; de leur payer une indemnité journalière pendant la durée de leurs maladies; de leur faire obtenir une petite pension viagère quand ils ont un âge convenu; de leur assurer une sépulture convenable. Elles leur accordent encore des secours divers, lorsqu'elles ont des ressources extra-sociales suffisantes (cotisations des membres honoraires, dons, legs, subventions, etc.).

Les participants payent une cotisation mensuelle, le plus souvent la même à tout âge. Les secours promis par la Société et la cotisation des participants sont déterminés par les Statuts.

Si l'on veut qu'une Société puisse faire honneur à ses engagements, il faut d'abord que la cotisation soit proportionnée aux secours promis; mais cela ne suffit point, et il est facile de s'en rendre compte : la pension viagère n'est accordée qu'après que la cotisation a été payée pendant de nombreuses années, et il faut savoir, pendant ce temps, prélever sur cette cotisation, mettre en réserve et capitaliser une prime annuelle suffisante pour réaliser en temps utile la somme que coûtera la pension du vieillard. D'un autre côté, pendant la jeunesse et l'âge mûr des sociétaires, les maladies ne sont pas fréquentes, les décès sont peu nombreux, et il faut, comme pour les retraites, réaliser, mettre en réserve et capitaliser de petites économies annuelles pendant que les participants sont jeunes, pour subvenir à des dépenses qui deviendront plus lourdes aux âges avancés.

Il ne suffit donc pas qu'une Société de secours mutuels tienne un compte exact des recettes et des dépenses de chaque exercice : il faut qu'elle sache évaluer exactement ses charges, non seulement dans le présent, mais encore et surtout dans l'avenir, il faut que tous les ans elle établisse un INVENTAIRE de fin d'année qui lui

apprenne si ses différentes réserves, accrues du produit des cotisations, ont plus ou moins qu'il ne faut pour faire face aux besoins prévus des années suivantes, comme à ceux des échéances éloignées. Pour n'avoir pas compris la nécessité de ces inventaires, dont pas une Compagnie d'assurances n'oserait s'affranchir, ou pour n'avoir pas su les faire, des Sociétés de secours mutuels en sont venues à ne pouvoir plus remplir leurs engagements, à se dissoudre, et nombre de celles qui existent aujourd'hui paraissent dans une situation difficile qui pourrait faire craindre la même fin.

C'est à prévenir ces faillites morales, très dangereuses pour la Mutualité elle-même, que l'Auteur a employé tous ses efforts.

M. de Lafitte prend pour base de la théorie les MISES individuelles des sociétaires dans le *fonds commun*. La MISE est, en tout temps, le produit des économies réalisées sur les cotisations du participant. Un Chapitre est consacré au calcul des MISES; on suppose d'abord que tous les sociétaires sont admis quand ils ont 16 ans, pour passer ensuite en quelques lignes au cas général, celui où les membres sont admis à des âges divers.

Cette diversité des âges d'entrée est pour les Sociétés de secours mutuels la source de difficultés très grandes : si l'on n'admet que les jeunes gens, le recrutement devient difficile; si l'on accepte des candidats âgés de 35 ou de 40 ans, comme les membres admis à 16 ans ont déjà une MISE élevée à ces mêmes âges, il faut exiger du nouveau venu une MISE égale, que le plus souvent il ne pourrait pas verser. Les différents systèmes propres à concilier tous les intérêts en présence : DROITS D'ENTRÉE, RETRAITES PROPORTIONNELLES, COTISATIONS PROPORTIONNELLES, sont étudiés d'une manière approfondie et soumis à des règles précises.

Les cinquante premières pages renferment de nombreuses Tables, dont la construction et l'usage sont expliqués avec le plus grand soin; et, sans exiger du lecteur d'autres connaissances préalables que celles des premières règles de l'Arithmétique, telles qu'on les enseigne à l'École primaire aux enfants de 10 à 13 ans, ces Tables permettent d'établir avec exactitude et très rapidement l'inventaire de toute Société dont les livres sont bien tenus.

Après cette question vitale des inventaires, celle des pensions de retraite est particulièrement importante, parce que le service

de ces pensions exige des réserves plus considérables que celles des deux autres assurances réunies. Deux systèmes sont en présence : dans l'un, les capitaux consacrés aux pensions sont versés, pour la majeure partie, à un *fonds de retraites* collectif où ils sont immobilisés; les *fonds de retraites* sont gérés par la *Caisse des Dépôts et Consignations;* dans l'autre système, que la législation existante n'a pas prévu, les économies réalisées sur les cotisations et sur des ressources extra-sociales seraient réparties annuellement entre les participants, et inscrites à leurs noms sur des LIVRETS INDIVIDUELS de la *Caisse nationale des Retraites*. Trois Chapitres sont consacrés à cette question, qui revient à son heure, puisque le Projet de loi sur les Sociétés de secours mutuels arrivera prochainement en discussion à la Chambre des Députés.

Le nombre des retraités que doit prévoir une Société de secours mutuels; l'augmentation des cotisations, opération fréquente et très délicate si l'on veut ne léser aucun intérêt légitime; la mission et le domaine propre de la Société de secours mutuels, et ce qui la distingue essentiellement de toutes les Compagnies d'assurance connues; l'emploi et l'administration des ressources extra-sociales, et enfin l'application pratique de la théorie à deux Sociétés existantes, telles sont, avec les précédentes, les principales questions étudiées dans le remarquable et consciencieux Ouvrage de M. de Lafitte.

Une Table des matières très développée rend les recherches faciles et rapides. Voici les titres des Chapitres :

CHAP. I. — Préliminaires. — Les MISES (6 pages);
CHAP. II. — Calcul des MISES (26 pages, 8 Tables);
CHAP. III. — Droits d'entrée, retraites proportionnelles, cotisations proportionnelles (18 pages, 7 Tables);
CHAP. IV. — Des inventaires (11 pages);
CHAP. V. — Du nombre de retraités que doit prévoir une Société de secours mutuels (11 pages, 2 Tables);
CHAP. VI. — De l'augmentation des cotisations (7 pages);
CHAP. VII. — La mission et le domaine propre de la Société de secours mutuels (10 pages);
CHAP. VIII. — Des ressources extra-sociales (8 pages);
CHAP. IX. — La pension viagère immédiate à capital réservé en faveur de la Société de secours mutuels (8 pages);

CHAP. X. — Les fonds de retraite subventionnés; les Sociétés de retraites (7 pages).
CHAP. XI. — Le livret individuel de la Caisse des Retraites (6 pages);
CHAP. XII. — Applications (21 pages, 5 Tables).

STURM (CH.). — COURS D'ANALYSE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, revu et corrigé par *E. Prouhet*, et augmenté de la Théorie élémentaire des fonctions elliptiques par *H. Laurent;* neuvième édition, revue et mise au courant du nouveau programme de la Licence, par *A. de Saint-Germain*. 2 vol. in-8°, XXXII-563 p.; x-637 p. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888.

Nous n'avons pas à parler ici des mérites d'un Livre qui est classique depuis trente ans. Malgré les progrès accomplis dans la Science et dans l'enseignement, le *Cours de Sturm* garde son mérite, et plus d'un étudiant aurait avantage à se l'assimiler avant de pratiquer des Ouvrages ou des Cours d'un ordre plus relevé. Toutefois, quelques améliorations de détail se faisaient désirer et quelques compléments étaient indispensables, si l'on voulait qu'il pût suffire aux candidats à la licence. Déjà, dans les éditions antérieures, figurait, outre les notes de MM. Catalan, Prouhet, Brassine, un important travail de M. Laurent sur la *Théorie élémentaire des fonctions elliptiques;* M. de Saint-Germain a pourvu au reste. D'une façon très discrète et très sûre, il a retouché çà et là le texte de Sturm et de Prouhet, abrégé et même, au besoin, remplacé quelques démonstrations un peu longues ou défectueuses; mais il n'a rien changé à l'esprit et à l'ordonnance; il n'a fait qu'ajouter aux qualités maîtresses du Livre : la clarté et la simplicité.

Il a ajouté, en outre, quatre Leçons nouvelles qui feraient aisément corps avec le texte de Sturm, mais que, par excès de discrétion, il a voulu rejeter à la fin des Volumes : on verra, par les sujets qui y sont traités, qu'elles étaient indispensables.

La première se rapporte aux lignes à double courbure; on y trouvera les premiers termes du développement des coordonnées d'un point d'une telle courbe en séries procédant suivant les puissances de l'arc, les formules de Frenet-Serret, les propriétés les

plus simples de la surface polaire et des développées et la théorie du contact d'une courbe et d'une surface.

La deuxième Leçon se rapporte aux propriétés les plus simples des courbes unicursales et à la réduction des intégrales elliptiques.

La troisième est consacrée aux surfaces : propriétés élémentaires des surfaces réglées, des lignes asymptotiques; indications relatives au contact de deux surfaces.

Enfin, dans la dernière Leçon, M. de Saint-Germain traite des séries de Lagrange et de Fourier dans le sens de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. J. T.

MAURICE LÉVY (Membre de l'Institut). — LA STATIQUE GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS, t. II, III et IV. Paris, Gauthier-Villars; 1886-1888.

La *Statique graphique* de M. Maurice Lévy est aujourd'hui complètement parue : elle ne comporte pas moins de quatre Volumes, accompagnés chacun d'un Atlas. Nous avons rendu compte précédemment (¹) du premier Volume, qui est consacré, rappelons-le, aux principes de la Statique graphique pure et à leurs applications les plus immédiates. Les Volumes suivants ont pour objet la résistance des matériaux, pour laquelle M. Maurice Lévy a une si haute compétence et qui lui doit de si nombreux perfectionnements. Ces perfectionnements avaient leur place marquée dans ce Traité. Nous allons rendre compte des principales innovations.

Le deuxième Volume contient la théorie de la flexion plane et celle des poutres droites. L'auteur y fait des applications neuves des lignes dites *d'influence*, dont la découverte est due à M. Fränkel. Supposons qu'un mobile m parcoure un arc ou une poutre et qu'on veuille représenter la tension que fait naître à chaque instant le mobile dans une barre déterminée. On porte pour cela,

(¹) Voir *Bulletin*, t. X, p. 146.

à partir de m, un segment vertical égal à la tension (dirigé vers le bas, s'il s'agit d'une véritable tension, et vers le haut, s'il s'agit d'une pression); le lieu des extrémités de ces segments est la *ligne d'influence*. M. Maurice Lévy propose une représentation analogue pour les moments de flexion.

Les problèmes de poutres droites, accessibles à la Statique seule, ont été traités dans le premier Volume. Les cas étudiés dans le deuxième Volume sont ceux qui relèvent de la résistance des matériaux. M. Maurice Lévy y fait usage d'une proposition générale dont il avait déjà fait connaître un cas particulier dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* et qui fournit à elle seule la solution de la plupart des problèmes de poutres. Ici encore, les lignes d'influence jouent un rôle important, notamment dans la détermination des positions dangereuses d'un convoi.

Le Tome III expose la théorie des arcs, des ponts suspendus et des surfaces de révolution. A propos des arcs, l'auteur introduit la ligne de poussée, dont la construction se ramène, dans certains cas, à celle d'une courbe funiculaire, et qui est d'un usage analogue à celui des lignes d'influence. Grâce au principe de superposition des efforts, cette ligne une fois connue (elle ne dépend que de la forme géométrique de l'arc), on peut calculer immédiatement la poussée produite par une charge quelconque, continue ou discontinue. Ce procédé offre l'avantage de ramener le problème des arcs à celui des poutres droites, à la condition d'adjoindre la poussée précédemment calculée aux forces directement appliquées.

Le Tome IV contient l'étude des ouvrages en maçonnerie et des systèmes réticulaires à lignes surabondantes.

L'auteur se fonde sur le principe de l'équilibre limite, qu'il a autrefois formulé et qui s'énonce ainsi :

Si un ouvrage est établi de façon à résister aux actions qu'il éprouve lorsqu'il est sur le point d'être renversé, il résistera à celles qu'il éprouve dans tout autre état.

Outre l'exposé de sa méthode personnelle, fondée sur ce principe, M. Maurice Lévy fait succinctement connaître les travaux de M. Durand [illegible] Peaucellier.

L'Ouvrage se termine par une intéressante étude sur les systèmes réticulaires à lignes ou conditions surabondantes.

Ajoutons que plusieurs Notes importantes font suite au corps même de l'Ouvrage. Deux d'entre elles sont deux Mémoires originaux de l'auteur.

L'une a trait à l'étude des arcs d'égale résistance. La méthode de l'auteur est directe, et la construction graphique à laquelle il parvient est plus simple que celle que l'on connaissait déjà.

La seconde Note dont nous voulons parler est la reproduction de la Note II de la première édition; elle a pour titre : *Recherches des tensions dans les systèmes de barres, et sur les systèmes qui, à volume égal de matière, présentent la plus grande résistance possible.* Ce Mémoire, fort important, de l'auteur avait été présenté par lui, en 1873, à l'Académie des Sciences.

Signalons enfin, en terminant, un Appendice relatif aux systèmes articulés, qui, quoique n'ayant pas de lignes surabondantes, ne sont pas cependant librement dilatables. Dans une étude géométrique, pleine d'intérêt, l'auteur recherche les caractères distinctifs de ces systèmes, étudie leur équilibre et calcule leurs tensions. G. K.

Dr H. WEISSENBORN. — GERBERT, *Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters.* Mit 6 Figuren-Tafeln. Berlin, Mayer und Müller, 1888. In-8°, VI-251 pages.

Pour qui rejette la prétendue origine néopythagoricienne de nos chiffres modernes, pour qui admet que l'Occident latin n'a pu les emprunter qu'aux Arabes, il restait à résoudre une difficulté passablement embarrassante : comment cet emprunt s'est-il tout d'abord borné aux chiffres significatifs, à l'exclusion du zéro? Comment les procédés de calcul de l'*algorithme* ne se sont-ils pas immédiatement propagés, en même temps que les chiffres arabes? Comment, au contraire, a-t-on été conduit à employer tout d'abord ces chiffres sur l'*abacus,* inconnu aux Arabes, et avec des modes de calcul tout particuliers, dont l'origine ne peut être retrouvée?

Un des érudits qui ont le plus contribué à ruiner la croyance à l'authenticité de la Géométrie dite *de Boèce*, à détruire, par suite, le seul fondement sérieux de la légende sur l'origine néo-pythagoricienne, vient de fournir aux questions indiquées ci-dessus une réponse plausible et probablement définitive quant au fond.

Les procédés de calcul applicables avec l'emploi du zéro supposent que l'on soit exercé à l'écriture. Avec les habitudes que nous contractons à cet égard dès notre enfance, il ne nous est guère possible de nous rendre compte des difficultés que présentait la propagation de ces procédés au IXe ou au Xe siècle, à une époque où ceux-là même qui savaient écrire n'écrivaient que très peu et très rarement. Mais on doit reconnaître que ces difficultés étaient très considérables, et il faut y voir le véritable motif du compromis qui fut admis à l'origine, lors des premières tentatives faites pour améliorer le mode de calcul dans l'Occident latin.

Certainement, on n'a jamais calculé avec des chiffres romains en écrivant; on se servait de l'abaque et de jetons représentant les unités de divers ordres. Le calculateur conserva son matériel et la plus grande partie de ses habitudes; le seul progrès fut que les jetons, au lieu de représenter des unités, marquèrent désormais, grâce à des signes empruntés aux Arabes, les groupes d'unités de chaque ordre. Ce progrès, toutefois, entraîna nécessairement des modifications dans les procédés de calcul; ces modifications furent appropriées à la faiblesse du développement intellectuel général, et calculées de façon à exiger le moins possible du côté de la mémoire. Ainsi s'introduisirent des procédés comme ceux de la multiplication ou de la division complémentaire, pour lesquels il suffisait de connaître les produits des nombres 1 à 5. Sans doute ils remplaçaient des procédés encore plus élémentaires, comme ceux que permet l'abacus à jetons-unités, avec lequel on n'a, à la rigueur, besoin de rien savoir par cœur.

Si je m'attache surtout à ces conclusions, c'est qu'il s'agit d'une question que j'ai posée ici même, il y a déjà longtemps, précisément en discutant l'authenticité de la géométrie de Boèce; mais le lecteur pourra trouver nombre d'autres discussions intéressantes, nombre de renseignements exacts et précieux dans le nouvel écrit du Dr Weissenborn.

En dehors de la préface et d'un résumé substantiel, cet écrit se divise en quatre Chapitres : I. La Géométrie de Gerbert. — II. Les anciens procédés et instruments de mesure. — III. La multiplication complémentaire. — IV. L'abacus et le calcul d'après Gerbert. — Après ce que j'ai déjà dit, je n'ai pas à revenir sur les deux derniers de ces Chapitres. Les deux premiers, qui concernent un objet tout différent, méritent, au contraire, une analyse particulière.

On connaît, sous le nom de *Géométrie de Gerbert*, un écrit latin publié pour la première fois en 1721, par le bénédictin Bernard Pez, d'après un manuscrit du couvent de Saint-Pierre de Salzbourg, et dont on retrouve diverses parties, anonymes de fait, dans différents autres manuscrits.

Olleris, l'éditeur des *Œuvres de Gerbert* (Paris-Clermont, 1867), a, le premier, mis en doute l'authenticité de la Géométrie, et son opinion a été fortement appuyée par Friedlein. M. Cantor, au contraire, a défendu l'authenticité de cet Ouvrage, et il a cru pouvoir établir qu'il avait été composé par Gerbert lors de son séjour au monastère de Bobbio (981-983), où il aurait utilisé le manuscrit dit d'*Arcerius* des *Gromatici veteres*. Gerbert, au contraire, à cette époque, n'aurait pas encore connu la *Géométrie* de Boèce.

M. Weissenborn reprend et appuie par de nouveaux arguments la thèse de Friedlein et, si l'on peut regretter que sa polémique contre Cantor prenne parfois une allure trop personnelle, il ne me paraît pas moins avoir démontré :

1° Que la soi-disant *Géométrie de Gerbert* se compose de trois parties essentiellement distinctes, dont la réunion n'est qu'accidentelle, et qui ne peuvent être attribuées à un seul auteur;

2° Que la première de ces Parties (Chap. I à XIII) seule témoigne d'un plan quelconque et peut être dite réellement composée et non seulement compilée au hasard; que l'auteur est postérieur à Gerbert et doit avoir connu la Géométrie du pseudo-Boèce, écrite seulement au XIe siècle;

3° Qu'il n'y a aucune preuve suffisante que le manuscrit d'Arcerius se soit déjà trouvé à Bobbio du temps de Gerbert ni que celui-ci y ait eu les moyens de s'y livrer à un travail de quelque importance; que, en tout cas, les emprunts faits, dans la troi-

sième Partie de sa prétendue *Géométrie,* aux écrits des agrimenseurs romains ont été tirés non pas du manuscrit d'Arcerius, mais de quelque autre collection aujourd'hui perdue;

4° Qu'enfin l'attribution à Gerbert, qui repose en fait sur la foi d'un manuscrit de la première moitié du XIIe siècle, a eu sa raison dans la croyance que le grand rénovateur des études de la fin du Xe siècle avait puisé sa science aux sources arabes, et dans cette circonstance, que la deuxième Partie de la *Géométrie* enseigne divers procédés de mesure qui n'appartiennent nullement à la tradition des agrimenseurs romains, mais dont l'origine est incontestablement arabe.

C'est un des grands mérites de M. Weissenborn d'avoir mis en lumière ce dernier point, parce que l'opinion contraire était partagée aussi bien par les adversaires que par les défenseurs de l'authenticité de la *Géométrie de Gerbert.* Je n'insisterai à cet égard que sur l'argument qui me paraît le plus décisif.

Il s'agit de l'usage, supposé connu dans cette *Géométrie,* de l'instrument d'arpentage désigné sous le nom de *carré géométrique.* Cet instrument, dont l'emploi s'est perpétué jusqu'au siècle dernier, au moins en dehors de la France, consiste essentiellement en un carré muni d'une alidade mobile autour d'un des sommets et plus longue que la diagonale, tandis que les côtés non adjacents à ce sommet sont gradués en parties égales. Il est clair qu'avec cet instrument on peut mesurer directement le sinus d'une distance angulaire inférieure à 45° ou le cosinus d'une distance angulaire supérieure à 45°.

Or cet instrument n'a jamais été connu ni des Grecs ni des Romains. Mes recherches personnelles m'ont fait, il est vrai, découvrir sa description dans un texte grec encore inédit; mais ce texte, qu'à cet égard je crois pouvoir considérer comme unique, n'est qu'une traduction, faite en Occident au XVIe siècle, d'un écrit latin composé à Montpellier peu auparavant et dont je n'ai pas encore pu retrouver l'original.

Le carré géométrique paraît, au contraire, bien certainement une invention arabe, et, dans une certaine mesure, cette invention est liée à la substitution des sinus aux cordes des arcs. Ce carré a été, dans l'origine, une addition faite à une des faces (la postérieure) de l'astrolabe planisphère, celle qui servait à prendre les

hauteurs et consistait essentiellement en un cercle divisé muni d'une alidade mobile autour du centre. Le carré géométrique fut inscrit dans un des quadrants de ce cercle pour faciliter certaines des opérations auxquelles pouvait servir l'astrolabe. Plus tard, on en fit un instrument indépendant; mais, dans les textes de la *Géométrie de Gerbert,* il apparaît nettement, au moins dans certains cas, comme toujours lié à l'astrolabe.

Or, si l'astrolabe planisphère, dont la seconde face servait à résoudre mécaniquement le problème de trouver l'heure astronomique, soit de jour, soit de nuit, à la suite d'une seule observation de hauteur, a été inventé par Hipparque; si la théorie mathématique en a été rédigée par Ptolémée; si, enfin, cet instrument est passé des Grecs aux Arabes, il n'est revenu dans l'Occident latin que par l'intermédiaire de ces derniers, comme le prouve l'addition du carré géométrique, que l'on sait pertinemment avoir été adapté au moins à une partie de leurs astrolabes, tandis qu'il n'a jamais figuré sur ceux des Grecs du moyen âge, ainsi que le prouvent les Traités de Jean Philopon, de Nicéphore Grégoras, etc.

Un des disciples de Gerbert, Hermannus Contractus, a composé sur l'astrolabe un Traité qui précède, précisément dans le manuscrit de Salzbourg, la soi-disant *Géométrie de Gerbert.* Le très grand nombre d'expressions arabes qu'il emploie ne peut laisser aucun doute sur l'origine des connaissances qu'il avait sur cet instrument; M. Weissenborn a démontré, d'autre part, que certains Chapitres de cette *Géométrie* ont été copiés sur Hermannus Contractus.

Il y a là tout un ensemble de preuves incontestables de la postériorité de cet écrit par rapport à l'illustre savant auquel on l'a attribué et dont il est d'ailleurs absolument indigne. L'influence arabe est également démontrée pour l'époque à laquelle il a été composé. Car il ne s'agit pas seulement de l'existence, dans le texte prétendu de Gerbert, d'un mot évidemment arabe, comme celui d'*alhidada* (alidade), qui aurait pu y être introduit postérieurement : il s'agit de l'emploi de procédés et d'instruments qui ont été, je le répète, absolument étrangers à l'antiquité gréco-romaine.

Si la *Géométrie* attribuée à Gerbert n'est pas de lui, on ne peut

évidemment rien en conclure sur l'origine des connaissances mathématiques de Gerbert : on ne peut savoir dans quelle mesure il les a empruntées aux Arabes. Cependant M. Weissenborn, tout en gardant à cet égard une sage réserve, montre que la négation de tout rapport entre Gerbert et les Maures espagnols constitue une thèse beaucoup trop absolue et difficile à soutenir en toute rigueur. Il revient ainsi à la question de l'origine de nos chiffres modernes et il établit qu'il ne reste qu'à les considérer comme empruntés directement aux Arabes d'Espagne.

Ajouterai-je que, d'après les travaux d'Heiberg sur les manuscrits d'Euclide contenant les scholies, il est désormais établi également que les Grecs ont aussi connu les chiffres arabes dès le XIIe siècle, et qu'eux aussi les ont tout d'abord employés sans le zéro, ainsi que le prouve le scholie du moine Néophytos que j'ai publié dans la *Revue archéologique* de 1884?

PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. GOMES TEIXEIRA A M. HERMITE;

Permettez-moi, je vous prie, de revenir sur l'identité

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right]^2 = \frac{1}{2}\int_a^b dx \int_a^b [\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)]^2\,dy$$

pour vous soumettre l'inégalité qu'on en déduit

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < \left[\int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité peut, je crois, être employée conjointement avec l'inégalité de M. Tchebichef que vous montrez dans votre cours de la Faculté des Scien-

Si les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont en même temps croissantes ou décroissantes lorsque x varie depuis a jusqu'à b, on a

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx,$$

et par conséquent l'inégalité de M. Tchebicheff fournit une limite inférieure et mon inégalité une limite supérieure de la valeur de l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$.

Ainsi, par exemple, si l'on considère l'intégrale elliptique

$$\mathrm{J} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où $x < 1$, le théorème de M. Tchebicheff donne

$$\mathrm{J} > \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

et mon inégalité donne

$$\mathrm{J} < \left(\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} \int_0^x \frac{dx}{1-k^2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De la même manière,

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > \frac{1}{x}\,\frac{x^3}{3}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \sqrt{\frac{x^5}{5}}\left(\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale

$$u = \int_1^x \frac{e^{-x}\,dx}{x}$$

donne

$$u < \left(\int_1^x e^{-2x}\,dx \int_1^x \frac{dx}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et par conséquent

$$u < \left(\frac{e^{2x}-e^2}{2e^2e^{2x}}\,\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{e\sqrt{2}}.$$

On en déduit que u est finie et déterminée quand $x=\infty$, parce que u augmente avec x et est

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} < \frac{1}{e\sqrt{2}}.$$

Si une des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ est croissante et l'autre décroissante quand x varie depuis a jusqu'à b, mon inégalité donne, comme celle de M. Tchebicheff :

$$(b-a)\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx$$

une limite supérieure de la valeur de l'intégrale $\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$. Dans ce cas l'inégalité de M. Tchebicheff est toujours plus avantageuse, parce que

$$\left[\int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} > (b-a)\int_a^b \varphi(x)\,dx \int_a^b \psi(x)\,dx$$

Porto, 28 novembre 1888.

SUR LES SYSTÈMES DE COURBES QUI DIVISENT HOMOGRAPHIQUEMENT LES GÉNÉRATRICES D'UNE SURFACE RÉGLÉE;

PAR M. CH. BIOCHE.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de courbes divise homographiquement les génératrices d'une surface réglée est que ce système satisfasse à une équation de Riccati. Il entre dans cette équation trois fonctions arbitraires de la variable indépendante; on peut donc se proposer de déterminer des systèmes de courbes jouissant de la propriété énoncée et assujettie en outre à des conditions particulières. J'ai obtenu ainsi les résultats suivants, relativement aux surfaces gauches.

Systèmes composés de trajectoires. — En dehors du système

de trajectoires orthogonales, il n'y a pas de système constitué par des trajectoires *sous un même angle,* qui divise homographiquement les génératrices. Si l'on considère des systèmes de trajectoires pour lesquels l'angle varie d'une courbe à l'autre, on trouve qu'il en existe sur certaines surfaces sur lesquelles la ligne de striction fait partie du système considéré. Ces surfaces sont applicables les unes sur l'hyperboloïde de révolution, les autres sur une surface à plan directeur, dont la ligne de striction est une hélice ayant pour projection sur le plan directeur une spirale logarithmique (hélice cylindro-conique de M. Tissot.)

Jamais le système des lignes asymptotiques ne peut constituer un système de trajectoires (sauf le cas de l'hélicoïde minimum).

Systèmes orthogonaux. — Si un système de courbes divise les génératrices en segments égaux, le système orthogonal les divise homographiquement; et ce cas est le seul dans lequel deux systèmes orthogonaux donnent simultanément des divisions homographiques.

Systèmes conjugués. — Si un système de courbes divise homographiquement les génératrices, le système conjugué les divise aussi homographiquement.

On déduit de là, au moyen d'un théorème de M. Kœnigs, que les génératrices d'une surface gauche sont divisées homographiquement par les courbes de contact des cônes circonscrits dont les sommets sont en ligne droite.

On peut ramener aux quadratures la détermination de divers couples de systèmes conjugués homographiques.

Les théorèmes sur les systèmes orthogonaux et les systèmes conjugués simplifient notablement la détermination des surfaces dont les génératrices sont divisées homographiquement par les lignes de courbure.

Systèmes composés de lignes géodésiques. — Si sur une surface il existe un système de lignes géodésiques divisant homographiquement les génératrices, la surface est applicable sur une surface du second degré. S'il existe deux systèmes de géodésiques

jouissant de la propriété énoncée, la surface est applicable sur un hyperboloïde de révolution.

Ces systèmes de géodésiques correspondent, dans le premier cas, aux géodésiques qui donnent les transformées de celui des systèmes de génératrices de la surface du second degré qui n'est pas resté rectiligne dans la déformation; dans le second cas, aux géodésiques qui donnent, outre ce système de génératrices, le système des méridiens de l'hyperboloïde de révolution.

J'ai étudié les surfaces développables en même temps que les surfaces gauches; pour ces surfaces, les problèmes se simplifient considérablement. Je ne cite pas de résultats pour ne pas allonger cette Note outre mesure.

FIN DU TOME XII DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XII; 1888. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages

BASSET (A.-B.). — A Treatise on Hydrodynamic, with numerous exemples 241-245

DARBOUX (G.). — Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal 8-17

FLAMME (J.-B.). — Recherches des expressions approchées des termes très éloignés dans les développements du mouvement elliptique des planètes 60-64

FOURIER (Œuvres de) publiées par les soins de M. G. Darboux 57-59

GILBERT (Ph.). — Cours d'Analyse infinitésimale 6-8

GOMES TEIXEIRA (F.). — Curso de Analyse infinitesimale 64-66

GREENHILL. — The trajectory for the cubic law of resistance 129-129

HALPHEN. — Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications ... 253-261

HARNACK (A.). — Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene 77-95

HORMANN (G.). — Untersuchung zwischen welchen Unduloide und Nodoide, die von zwei festen Parallelkreisflächen begrenzt sind, bei gegebenem Volumen ein Minimum der Oberfläche besitzen 192-194

HUYGENS (Œuvres complètes de Christiaan) publiées par la Société hollandaise des Sciences 181-192

KŒHLER. — Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure (questions et solutions) 158-163

LAFITTE (P. DE). — Essai d'une théorie rationnelle des Sociétés de secours mutuels 277-280

Pages.

LAGRANGE (Œuvres de). — Tome XIII, Correspondance..... 205-221
LAURENT. — Traité d'Analyse..... 129-133
LÉVY (M.). — Sur le principe de l'énergie..... 157-157
— La Statique graphique et ses applications aux constructions..... 281-283
MANSION. — Résumé du cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand..... 95-97
MARKOFF (A.). — Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$..... 194-195
MATHIEU. — Théorie de l'Électrodynamique..... 229-241
MULLER (F.). — Kalender Karten für die Jahre 1800-1999..... 192-192
PEANO (G.). — Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva..... 261-262
PEARSON (Karl). — A History of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time, by Isaac Todhunter..... 34-42
PETERSEN (J.). — Lehrbuch der Dynamik fester Körper..... 5-6
POKROWSKY. — Théorie des fonctions ultra-elliptiques de la première classe..... 164-173
SCHLESINGER (L.). — Ueber lineare homogene Differentialgleichungen vierter Ordnung zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen..... 97-100
SCHWARZ. — Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzeten Flächenstücke..... 109-112
SEYDLER (L.). — Zakladové theoretické Fysiky; díl druhy; Theorie potentialu..... 112-118
STURM (Ch.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique..... 280-281
TANNERY (P.). — Pour l'histoire de la Science hellène, de Thalès à Empédocle..... 33-33
VILLIÉ (E.). — Traité de Cinématique à l'usage des candidats à la licence et à l'agrégation..... 245-246
WEISSEMBORN (H.). — Gerbert, Beiträge zur Kenntniss der Mathematik des Mittelalters..... 283-288

MÉLANGES.

BAGNERA (J.). — Sur une propriété des séries simplement convergentes. 227-228
BIOCHE (Ch.). — Sur les systèmes de courbes que divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée..... 290-292
CESARO (E.). — Tableau des dérivations cristallographiques dans le premier système..... 270-272
DEMARTRES. — Sur le lieu d'un cercle doublement sécant à trois cercles fixes..... 176-177
GILBERT (Ph.). — Sur la convergence des intégrales à limites infinies.. 66-76
HADAMARD (J.). — Recherche des surfaces anallagmatiques par rapport à une infinité de pôles d'inversion..... 118-121
JENSEN. — Sur une généralisation d'une formule de Tchebicheff..... 134-135
KAPTEYN (W.). — Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre..... 135-143

Pages.
KAPTEYN. — Note sur les différentielles binômes..... 44-56
KŒNIGS (G.). — Un théorème concernant la surface de Steiner et l'ensemble de trois coniques qui se coupent dans l'espace..... 28-32
LELIEUVRE. — Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique..... 126-128
LERCH (M.). — Sur une formule d'Arithmétique..... 100-108
— Théorèmes d'Arithmétique..... 121-126
MÉRAY (Ch.). — Valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ déduite de la formule de Wallis..... 174-176
— Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants..... 196-204
— Sur l'impossibilité de franchir par la formule de Taylor les cercles de convergence de certaines séries entières..... 248-252
PADÉ (H.). — Sur l'irrationnalité des nombres e et π..... 144-148
PICARD (E.). — Sur la convergence des séries représentant les équations différentielles..... 148-156
PTASZYCKI. — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite..... 262-270
SAINT-GERMAIN (A. DE). — Sur une surface du troisième ordre qui admet une ligne ombilicale parabolique..... 177-180
SCHŒNFLIES. — Sur les courbes et surfaces décrites pendant le mouvement à cinq conditions..... 18-25
STIELTJES (T.-J.). — Sur l'équation d'Euler..... 222-227
TEIXEIRA (G.). — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite..... 272-276
WEYR (Ed.). — Remarque sur la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples..... 246-248
— Extrait d'une lettre à M. Hermite..... 25-28

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XII.

13747 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

13747 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, A. HARNACK, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J.-HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XII. — ANNÉE 1888.

(TOME XXII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1888

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (1).

T. II, 1883. 2e semestre.

Kronecker. — Remarques sur la multiplication des fonctions elliptiques. (717-729).

1. On met généralement le théorème d'addition de la fonction sinam sous la forme

$$\operatorname{sinam}(a+b) = \frac{\operatorname{sinam}(a)\operatorname{sin'am}(b) + \operatorname{sinam}(b)\operatorname{sin'am}(a)}{1 - k^2\operatorname{sin^2am}(a)\operatorname{sin^2am}(b)};$$

mais, en utilisant la relation

$$k\operatorname{sinam}(b)\operatorname{sinam}(b + \mathrm{K}'i) = 1,$$

on peut aussi écrire

$$k\operatorname{sinam}(a+b) = \frac{\operatorname{sinam}(a)\operatorname{sin'am}(b+\mathrm{K}'i) - \operatorname{sin'am}(a)\operatorname{sinam}(b+\mathrm{K}'i)}{\operatorname{sin^2am}(a) - \operatorname{sin^2am}(b+\mathrm{K}'i)},$$

et sous cette forme on voit que le numérateur et le dénominateur de l'expression qui donne $\operatorname{sinam}(a+b)$ en fonction de $\operatorname{sinam}(a)$, $\operatorname{sin'am}(a)$, $\operatorname{sinam}(b)$, $\operatorname{sin'am}(b)$ s'annulent pour

$$\operatorname{sinam}(a) = \operatorname{sinam}(b + \mathrm{K}'i).$$

(1) Voir *Bulletin*, XI$_2$, 234.

Posant $a = rv$, $b = sv$, on voit donc que le numérateur et le dénominateur de la fraction qui représente $\operatorname{sinam}[(r+s)v]$ en fonction de $\operatorname{sinam}(rv)$, $\operatorname{sinam}(sv)$, $\operatorname{sin'am}(rv)$, $\operatorname{sin'am}(sv)$ contiennent tous deux les facteurs

$$\operatorname{sinam}(v) - \operatorname{sinam}(v_k), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

où les quantités v_k sont définies par les équations

$$\operatorname{sinam}(rv_k) = \operatorname{sinam}(sv_k + \mathrm{K}'i).$$

Ceci posé, supposons que $r - s$ soit un nombre pair. Dans cette hypothèse, M. Kronecker montre que le facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fonction rationnelle obtenue pour

$$\operatorname{sinam}[(r+s)v],$$

en appliquant le théorème d'addition que nous venons de rappeler, n'est autre chose que le dénominateur de la fraction irréductible que l'on obtient en exprimant

$$\frac{\operatorname{sinam}[(r-s)v]}{\operatorname{sinam}(v)} \operatorname{sin'am}(v),$$

en fonction rationnelle de $\operatorname{sin'am}(v)$. Mais, pour $r - s = 0$, ce dénominateur est égal à l'unité. Si donc, pour un nombre pair quelconque donné n, nous posons $n = r + s$ et que nous prenions $r = s$, puis que nous formions

$$\operatorname{sinam}(nv) = \operatorname{sinam}[(r+s)v],$$

en fonction de $\operatorname{sinam}(rv)$, $\operatorname{sinam}(sv)$, à l'aide du théorème d'addition, comme il a été dit plus haut, nous savons que l'expression obtenue ne contiendra aucun facteur commun à son numérateur et à son dénominateur et sera, par suite, *irréductible*.

Supposons ensuite que $r - s$ soit un nombre impair. Dans cette hypothèse, M. Kronecker montre que le facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fonction rationnelle obtenue pour $\operatorname{sinam}[(r+s)v]$ en appliquant le théorème d'addition n'est autre chose que le dénominateur de la fraction irréductible que l'on obtient en exprimant

$$\frac{\operatorname{sinam}[(r-s)v]}{\operatorname{sinam}(v)},$$

en fonction rationnelle de $\operatorname{sin^2am} v$. Mais, pour $r - s = 1$, ce dénominateur est égal à l'unité. Si donc, pour un nombre impair quelconque donné n, nous posons $n = r + s$ et que nous prenions $r = s + 1$, puis que nous formions

$$\operatorname{sinam}(nv) = \operatorname{sinam}[(r+s)v],$$

en fonction de $\operatorname{sinam}(rv)$, $\operatorname{sinam}(sv)$, à l'aide du théorème d'addition, nous savons que l'expression obtenue est directement obtenue sous sa forme irréductible.

2. La démonstration de M. Kronecker suppose que l'on connaisse les racines de l'équation $\operatorname{sinam}(v) = 0$. Dans la seconde Partie de son Mémoire, M. Kronecker cherche à donner la même démonstration, *sous une forme purement*

algébrique, sans supposer connues les racines de l'équation transcendante $\operatorname{sinam}(v) = 0$. Il y parvient dans le cas où n est un nombre *pair* quelconque. Voici comment.

Soit k le module des fonctions elliptiques. Posons

$$k + \frac{1}{k} = 4\mathrm{M} - 2$$

et considérons la fonction

$$f(a) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{M}}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{M}-1}}\right)\operatorname{sinam}(a).$$

Le théorème d'addition de cette fonction peut être mis sous la forme

$$f(a+b) = \frac{\Phi}{\mathrm{F}},$$

où les fonctions Φ et F de $f(a)$ et $f(b)$ sont des quantités algébriques *entières* d'un genre formé par trois éléments indépendants M, $f(a)$, $f(b)$ et par deux autres éléments dépendant de M, $f(a)$, $f(b)$.

La fraction

$$\frac{\mathrm{F} + u\Phi}{\mathrm{F}m(\mathrm{F} + u\Phi)},$$

où u est une indéterminée, représente le diviseur commun de F et Φ. Si l'on divise F et Φ par ce diviseur commun, la fraction $\frac{\Phi}{\mathrm{F}}$ se réduit à

$$\frac{\Phi + u\mathrm{G}}{\mathrm{F} + u\Psi}$$

où G et Ψ sont des fonctions déterminées, faciles à calculer, de $f(a)$ et $f(b)$. Cette fraction

$$\frac{\Phi + u\mathrm{G}}{\mathrm{F} + u\Psi}$$

représente $f(a+b)$ *sous sa forme réduite*. En effet, des quantités quelconques Φ, G, F, Ψ n'ont aucun diviseur commun *d'un rang quelconque*, pourvu que la forme

$$\mathrm{FU} + \mathrm{GU}' + \Phi\mathrm{U}'' + \Psi\mathrm{U}''',$$

où U, U', U'', U''' sont des indéterminées, soit une forme primitive proprement dite. Or la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le système de modules

$$(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \Phi, \Psi)$$

soit équivalent à l'unité. M. Kronecker démontre que les quantités F, G, Φ, Ψ qui paraissent dans la dernière fraction forment un système de modules équivalent à l'unité, et le théorème est démontré.

De plus, si E désigne une forme primitive proprement dite

$$u'\mathrm{F} + u\mathrm{G} + \Phi + uu'\Psi,$$

on a

$$\mathrm{E}\Phi = (\Phi + u'\mathrm{F})(\Phi + u\mathrm{G}),$$
$$\mathrm{EF} = (\Phi + u'\mathrm{F})(\mathrm{F} + u\Psi),$$

ce qui donne une décomposition du numérateur et du dénominateur de la fraction représentant $f(a+b)$ dans le sens de l'équivalence absolue; donc ici dans le sens d'une équivalence de *rang quatre*, puisque le domaine du genre considéré contient trois éléments indépendants.

Dans un dernier paragraphe, M. Kronecker précise la nature du problème : « Déduire le théorème de multiplication des fonctions elliptiques du théorème d'addition de ces fonctions par un procédé *algébrique*. » Il montre comment, de ce qui vient d'être dit sur la forme réduite de $f(a+b)$, on peut déduire les formules pour la multiplication des fonctions elliptiques *sous leur forme réduite*.

Kronecker. — Suite des remarques sur la multiplication des fonctions elliptiques. (949-956).

Dans une Communication précédente qui vient d'être analysée, M. Kronecker avait décomposé le numérateur et le dénominateur de la fraction représentant $f(a+b)$ en facteurs

$$\Phi + u'\,\mathrm{F}, \quad \Phi + u\,\mathrm{G}, \quad \mathrm{F} + u\Psi.$$

Ces facteurs sont des formes algébriques entières *associées* au domaine du genre considéré. C'est à l'aide de ces formes associées que M. Kronecker avait déduit de l'expression réduite de $f(a+b)$ les théorèmes de multiplication des fonctions elliptiques sous leur forme réduite.

Dans un nouvel article, M. Kronecker montre que l'on peut arriver au même résultat, de deux manières différentes, sans passer par l'intermédiaire des formes associées. Il donne ainsi deux nouvelles méthodes permettant d'établir algébriquement les numérateurs et dénominateurs des formules de multiplication des fonctions elliptiques, et leurs degrés.

La première de ces deux méthodes a un rapport intime avec celle donnée par *Abel* dans son Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. La seconde est presque identique à celle donnée par M. *Runge* dans le t. 94 du *Journal de Crelle*, pour la multiplication de la fonction cosam. Toutes deux, et M. Kronecker le met bien en évidence, ont ceci de commun qu'elles se servent *implicitement* du théorème d'addition *sous sa forme réduite*.

Kronecker. — Sur la théorie des formes de rang supérieur. (957-960).

On donne un domaine de rationalité. Soient $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_{n+1}$ des quantités entières de ce domaine et désignons dans tout ce qui suit par les lettres U et V des quantités indéterminées.

Effectuons le produit

$$(\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1\mathrm{U} + \ldots + \mathrm{M}_m\mathrm{U}^m)(\mathrm{M}_{m+1} + \mathrm{M}_{m+2}\mathrm{U} + \ldots + \mathrm{M}_{n+1}\mathrm{U}^{n-m}) = \mathrm{M}'_0 + \mathrm{M}'_1\mathrm{U} + \ldots + \mathrm{M}'_n\mathrm{U}^n.$$

Nous définissons ainsi $(n+1)$ quantités $\mathrm{M}'_0, \mathrm{M}'_1, \ldots, \mathrm{M}'_n$ du même domaine de rationalité.

On voit bien facilement que les deux systèmes d'équations

$$\mathrm{M}_h\mathrm{M}_{m+i} = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n-m+1)$$

et

$$M'_k = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

dont le premier se compose de $m(n-m)+n+1$ équations et le second de $(n+1)$ équations, sont entièrement équivalents.

Si, au lieu de ces systèmes d'équations, on considère les systèmes de diviseurs correspondants

$$(M_h M_{m+i}) \quad \text{et} \quad (M'_k) \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, \ldots, m \\ i = 1, 2, \ldots, n-m+1 \\ k = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix},$$

il est naturel de les nommer équivalents. Mais ils ne le sont pas dans le sens que l'on donne au mot *équivalent* dans le grand Mémoire (*Festschrift*) de M. Kronecker. On est donc amené à généraliser la définition de l'équivalence donnée dans ce Mémoire. On y parvient en s'appuyant sur le théorème suivant :

Le produit des deux formes

$$M_0 U_0 + M_1 U_1 + \ldots + M_m U_m,$$

et

$$M_{m+1} U_{m+1} + \ldots + M_{n+1} U_{n+1}$$

vérifie une équation algébrique où le coefficient de la plus haute puissance est égal à l'unité et où celui d'une puissance quelconque r est une forme qui *contient,* dans le sens donné à ce mot dans la *Festschrift,* le produit des r formes

$$M'_0 V_{h0} + M'_1 V_{h1} + \ldots + M'_n V_{hn},$$

obtenues en prenant successivement pour h les nombres 1, 2, ..., r. Je rappelle que dans la *Festschrift* on dit qu'une forme A est contenue dans une forme B, ou que B contient A, lorsque les coefficients de la forme B sont des fonctions entières homogènes et linéaires des coefficients de la forme A.

Le théorème précédent une fois établi, nous donnerons au mot *contenu* un sens plus général en disant qu'un système de diviseurs $(M^0_0, M^0_1, \ldots)$ contient un système de diviseurs $(M'_0, M'_1, \ldots)$ lorsque la forme

$$M^0_0 U_0 + M^0_1 U_1 + \ldots$$

est racine d'une équation algébrique d'un degré quelconque ρ dont le coefficient de la plus haute puissance est égal à l'unité et dont le coefficient de la puissance $(\rho - r)$ est une forme contenant, dans le sens restreint rappelé à l'instant, le produit des r formes

$$M'_0 V_{h0} + M'_1 V_{h1} + \ldots,$$

obtenues en prenant successivement, pour h, r valeurs différentes.

Nous dirons de même que la forme

$$M^0_0 U_0 + M^0_1 U_1 + \ldots$$

contient alors la forme

$$M'_0 V_0 + M'_1 V_1 + \ldots.$$

Nous dirons aussi que deux systèmes de diviseurs sont *équivalents* lorsque chacun de ces deux systèmes contient l'autre dans le sens général qui vient

d'être fixé. De même, deux formes seront dites *équivalentes* lorsque chacune d'elles contient l'autre.

Enfin, si, dans un quotient de deux formes, la forme qui est au dénominateur est contenue dans le sens général dans celle qui est au numérateur, nous dirons que ce quotient est une *forme entière dans le sens de l'équivalence.*

Il résulte alors du théorème démontré que le produit de deux formes *entières* dans le sens de l'équivalence est également une forme *entière* dans le sens de l'équivalence. On ne quitte donc pas la sphère des formes entières en formant des fonctions entières à coefficients entiers de fonctions entières, toujours dans le sens de l'équivalence.

M. Kronecker fait remarquer en terminant que, lorsque deux formes sont équivalentes dans le sens général qui vient d'être fixé, il y a aussi entre elles une équivalence dans le sens plus restreint de son grand Mémoire, mais que cette dernière équivalence peut n'être qu'une équivalence relative à un certain *rang*. Ce fait résulte de la théorie générale de l'élimination.

Weingarten. — Sur l'équation différentielle des surfaces qui sont divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. (1163-1166).

Dans cette Note, M. Weingarten donne la condition qui est nécessaire et suffisante pour que le carré de l'élément linéaire d'une surface puisse être mis sous la forme

$$f(u, v)(du^2 + dv^2),$$

où u et v désignent les paramètres des lignes de courbure de cette surface.

Il déduit de cette condition que toute fonction $\varphi(x, y, z)$ qui, égalée à une constante, représente une surface répondant à la question, vérifie nécessairement une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, linéaire par rapport aux différentielles du quatrième ordre.

Il montre aussi que les lignes de courbure de chacune des surfaces répondant à la question peuvent être obtenues par des quadratures seulement.

Weierstrass. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (Troisième et dernier article). (1271-1297).

Dans son second article, M. Weierstrass avait démontré que toutes les valeurs de q qui, pour une valeur donnée de t, (les valeurs $t = 0, 1, \infty$ exceptées), vérifient l'équation

$$\left[\frac{\Theta_2(0, q)}{\Theta_3(0, q)}\right]^4 = t,$$

étaient nécessairement de la forme

$$q = e^{\frac{2\gamma\pi i + (2\delta + 1)\log\psi(t)}{(2\alpha+1)\pi i + 2\beta\log\psi(t)}\pi i},$$

où $\psi(t)$ est une des valeurs de q vérifiant cette équation, valeur représentée par une série convergente pour laquelle nous connaissons la loi de formation

des coefficients; et où α, β, γ, δ sont des entiers liés par la relation

$$(2\alpha+1)(2\delta+1)-4\beta\gamma=1.$$

Il lui restait à démontrer que, quels que soient les entiers que l'on prenne pour α, β, γ, δ, pourvu qu'ils soient liés par la dernière relation, l'équation

$$\left[\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\right]^4=t$$

est effectivement vérifiée par la valeur de q que nous venons d'écrire.

Dans son troisième Mémoire, M. Weierstrass le démontre sans faire usage des formules de transformations linéaires des fonctions ϑ. On peut d'ailleurs prendre pour le logarithme qui paraît au numérateur et au dénominateur de l'exposant de e l'une quelconque de ses valeurs.

Ceci posé, soit k une quantité quelconque donnée, les valeurs $k=0$, 1, ∞ exceptées; prenons $t=k^2$; soit alors q une quelconque des valeurs données par la formule précédente; formons à l'aide de cette quantité q les séries $\vartheta(0,q)$, $\vartheta_1(0,q)$, $\vartheta_2(0,q)$, $\vartheta_3(0,q)$, puis, u désignant une variable quelconque et x désignant pour abréger le quotient

$$\frac{u}{\vartheta_3^2(0,q)},$$

formons les séries $\vartheta(x,q)$, $\vartheta_1(x,q)$, $\vartheta_2(x,q)$, $\vartheta_3(x,q)$. Nous avons alors, pour les trois fonctions elliptiques $\operatorname{sinam}(u,k)$, $\operatorname{cosam}(u,k)$, $\Delta\operatorname{am}(u,k)$, trois fonctions *univoques* de u et de q, savoir

$$\operatorname{sinam}(u,k)=\frac{\vartheta_3(0,q)}{\vartheta_2(0,q)}\frac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)},$$

$$\operatorname{cosam}(u,k)=\frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_2(0,q)}\frac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)},$$

$$\Delta\operatorname{am}(u,k)=\frac{\vartheta(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}\frac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)}.$$

Mais si, au lieu des fonctions $\vartheta(0,q)$, $\vartheta_1(0,q)$, $\vartheta_2(0,q)$, $\vartheta_3(0,q)$, on introduit k dans les formules précédentes, il vient

$$\operatorname{sinam}(u,k)=\frac{1}{\sqrt[4]{k^2}}\frac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)},$$

$$\operatorname{cosam}(u,k)=\frac{\sqrt[4]{1-k^2}}{\sqrt[4]{k^2}}\frac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)},$$

$$\Delta\operatorname{am}(u,k)=\sqrt[4]{1-k^2}\,\frac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)}$$

M. Weierstrass montre que, dans ces formules, chacune des deux racines quatrièmes $\sqrt[4]{k^2}$ et $\sqrt[4]{1-k^2}$ doit être extraite de manière que sa partie réelle soit positive et ne soit pas plus petite en valeur absolue que sa partie imaginaire; la quantité q doit ensuite être déterminée par la formule

$$q=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\left(\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}\right)^{4n+1},$$

et enfin la racine quatrième $\sqrt[4]{q}$, qui paraît dans $\Theta(x, q)$ et dans $\Theta_1(x, q)$, doit être également extraite de manière que sa partie réelle soit positive et ne soit pas plus petite en valeur absolue que sa partie imaginaire : dans le cas particulier où k^2, et par suite aussi q, est une quantité négative, il faut que le quotient $\sqrt[4]{q} : \sqrt[4]{k^2}$ soit positif.

Enfin, M. Weierstrass montre que l'on peut mettre les équations qui définissent les trois fonctions elliptiques à l'aide des quatre fonctions Θ sous une forme où paraissent outre les racines quatrièmes $\sqrt[4]{k^2}$, $\sqrt[4]{1-k^2}$, et les entiers α, β, γ, δ, un nombre ε qui est celui des deux nombres -1, -1, congru suivant le module 4 à $2\alpha - 1$.

Le problème qui complète la théorie exposée par Jacobi dans son Mémoire sur les fonctions elliptiques dont il a été plusieurs fois fait mention peut ainsi être considéré comme entièrement résolu.

Lorsque le module de $(1-t)$ est petit, la série obtenue pour $\psi(t)$ ne converge que lentement, ce qui est désavantageux pour les calculs numériques. Mais M. Weierstrass montre que l'on peut toujours déduire de cette série d'autres expressions telles que, t ayant une valeur donnée quelconque, l'une au moins de ces expressions convienne parfaitement aux calculs numériques : la convergence est même très rapide.

Après avoir démontré que le quotient de deux quelconques de ses fonctions Θ

$$\Theta(\sqrt{\tau}),\quad \Theta(\sqrt{\tau}),\quad \Theta_1(\sqrt{\tau}),\quad \Theta_1(\sqrt{\tau})$$

ne change pas si l'on remplace ces fonctions par

$$\Theta_1\left(-\frac{\sqrt{\tau}}{\tau}-\frac{1}{\tau}\right),\quad \frac{1}{\tau}\Theta\left(-\frac{\sqrt{\tau}}{\tau}-\frac{1}{\tau}\right),\quad \Theta\left(-\frac{\sqrt{\tau}}{\tau}-\frac{1}{\tau}\right),\quad \Theta\left(-\frac{\sqrt{\tau}}{\tau}-\frac{1}{\tau}\right).$$

M. Weierstrass [illegible] pour chacune des trois [illegible] cette fonction par [illegible] ces six expressions [illegible] pour chacune des trois [illegible] rapidement les valeurs de ces [illegible] plan des imaginaires dans [illegible]

[illegible]

Q[illegible] — Sur la mesure [illegible] magnétiques à l'aide de [illegible]

G[illegible] — Sur [illegible] dans le vide. [illegible]

A[illegible] — Sur [illegible] forme que prend un corps [illegible] magnétiquement ou [illegible]

[illegible]

appliqué la théorie du magnétisme induit et le principe de la conservation de l'énergie à l'étude des déformations des liquides aimantés ou polarisés. Dans ce cas une constante spécifique relative à l'influence du changement de densité du milieu est nécessaire outre la constante magnétique ordinaire. Kirchhoff montre que, pour des solides isotropes, il faut une troisième constante, relative à l'influence d'une dilatation linéaire; il termine en annonçant la concordance de ses résultats avec ceux de M. Lorberg, publiés dans le numéro de février des *Annales de Wiedemann*, Bd. XXI, p. 300 : *Ueber Electrostriction*.

Le Mémoire de Kirchhoff est divisé en quatre paragraphes :

1. Théorie du magnétisme induit pour une masse de fer déformée d'une manière arbitraire. En appelant φ le potentiel total des forces magnétiques, l'auteur admet que l'intensité d'aimantation en un point est la résultante de trois intensités dirigées suivant les dilatations principales, et égales au produit de la composante de la force magnétisante suivant cette même direction par le coefficient $k - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)k' - \lambda_1 k''$; λ_1, λ_2, λ_3 sont les trois dilatations principales, k, k', k'' les trois coefficients d'aimantation déjà signalés. Cela lui permet de former la valeur du potentiel induit, et une certaine fonction W dont la variation est nulle pour l'état d'équilibre. Dans le § 2, Kirchhoff forme les variations de W pour un petit déplacement, soit des aimants, soit du fer doux. Au cours de cette dernière recherche s'introduisent les forces magnétiques qui agissent sur l'unité de volume de fer; Kirchhoff montre dans le § 3 comment les recherches pour les connaître sont vaines, le théorème du tétraèdre n'étant pas applicable à l'intérieur du fer doux. Enfin il termine dans le quatrième paragraphe par la théorie du condensateur sphérique à diélectrique solide.

Helmholtz. — Études sur la statique des systèmes monocycliques. Premier Mémoire. (159-180). Deuxième Mémoire. (311-318).

Kronecker. — Démonstration de la loi de réciprocité des restes quadratiques. (519-537).

Soient n un nombre impair positif quelconque et x une fraction comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$. Le signe du reste obtenu en retranchant de la quantité nx le nombre entier le plus rapproché est aussi le signe de l'expression $\operatorname{tang} nx\pi$. Mais on peut remplacer $\operatorname{tang} nx\pi$ par le produit

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tang}\left(x - \frac{k}{n}\right)\pi \operatorname{cot}\left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Or les arguments de chacune des tangentes et cotangentes qui paraissent dans ce produit sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; chacune de ces tangentes et cotangentes a, par suite, même signe que son argument. Donc *le signe du reste obtenu en retranchant de la quantité nx le nombre entier le plus rap-*

SECONDE PARTIE.

oche es. . i le signe du produit

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\alpha - \frac{k}{n}\right)\left(\alpha + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right).$$

Il est facile de transformer l'énoncé de ce théorème dans le suivant :

Le nombre des fractions

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\frac{1}{2}(n-1)}{n},$$

situées hors de l'intervalle compris entre les quantités α et $\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$, est pair ou impair suivant que le nombre entier le plus rapproché de la quantité $n\alpha$ est plus petit ou plus grand que $n\alpha$.

Dans le cas particulier où $\alpha = \frac{h}{m}$, m étant un nombre impair positif et h l'un quelconque des nombres

$$1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(m-1),$$

on déduit du théorème précédent la congruence

$$nh \equiv h' \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \qquad (\text{mod. } m),$$

où h' désigne celui des nombres $1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(m-1)$, qui est, *en valeur absolue,* congru au nombre nh suivant le module m, et où le symbole sgn veut dire *signe* du produit qui suit.

Écrivons successivement cette congruence pour $h = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(m-1)$; multiplions entre elles les $\frac{1}{2}(m-1)$ congruences ainsi obtenues; il viendra

$$n^{\frac{m-1}{2}} \prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} h \equiv \prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} h \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right), \qquad (\text{mod. } m).$$

Si m est un nombre premier, on aura donc, en désignant par $\left(\frac{n}{m}\right)$ le symbole de Legendre, l'égalité

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right).$$

Si m et n sont des nombres premiers, on déduit immédiatement de cette égalité que le produit

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right)$$

est égal à

$$(-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}.$$

Dans la démonstration précédente on n'a fait usage qu'au début des propriétés des fonctions trigonométriques pour établir un premier théorème qui, lui déjà, n'a qu'un caractère purement arithmétique. Toutes les déductions qui suivent conservent ce caractère; on n'y fait usage que de nombres rationnels.

Dès lors, M. Kronecker s'est demandé s'il ne serait pas possible d'établir aussi le premier théorème sans faire usage des fonctions trigonométriques. Il y est parvenu par un raisonnement purement arithmétique et bien simple que l'on trouvera (p. 519 et 520) au commencement de son article.

La nouvelle démonstration que M. Kronecker a ainsi donnée du théorème de réciprocité des restes quadratiques est sans doute la plus simple que l'on connaisse; c'est à coup sûr la plus naturelle, la plus dénuée d'artifices.

Dans le même article M. Kronecker compare sa nouvelle démonstration à celle qu'il avait donnée dans les *Monatsberichte* de 1876, p. 331, et qui repose aussi sur la représentation du symbole de Legendre par le signe d'un double produit. Il reprend ensuite cette démonstration de 1876 et montre comment on peut la simplifier. Il y définissait le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ en posant

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right),$$

et montrait que le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ ainsi défini est identique à celui de Legendre. Or toute la première partie de la démonstration est plus simple si l'on définit le symbole $\left(\frac{n}{m}\right)$ en posant

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{h}{m} - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{h}{m} + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right).$$

Une fois que l'on a démontré que le symbole ainsi défini est bien le symbole de Legendre, on voit facilement, en tenant compte d'une congruence analogue à celle dont il a été fait usage plus haut, que le symbole de Legendre peut aussi être représenté par le signe du produit, pour $h = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$, des restes obtenus en retranchant de la quantité $\frac{nh}{m}$ le nombre entier le plus rapproché.

M. Kronecker démontre aussi directement ce dernier théorème en suivant la même marche que M. Schering (*Acta mathematica*, t. I). Comparez aussi SCHERING, *Monatsberichte*, 1876, p. 330, et KRONECKER, *Monatsberichte*, p. 331; 1876.

Il nous reste à signaler un procédé bien élégant donné par M. Kronecker pour déterminer la valeur du symbole de Legendre dans chaque cas particulier.

SECONDE PARTIE.

[illegible] est basé sur la loi de réciprocité, comme celui que M. Kronecker [illegible] dans les *Monatsberichte* de [illegible].

Soient n_0, n_1 deux nombres impairs quelconques, positifs ou négatifs. Développons la fraction

$$-\frac{n_1}{n_0}$$

en fraction continue

$$\cfrac{-1}{g_1 - \cfrac{1}{g_2 - \cdots - \cfrac{1}{g_{l-1} - \cfrac{1}{g_l}}}},$$

dont les numérateurs soient (-1) et les dénominateurs des nombres pairs, sauf toutefois le dernier g_l qui est nécessairement impair. Nommons, par abrégé, *valeur de signe* d'un nombre impair n_k le nombre $V_k = +1$ ou bien -1 tel que l'on ait

$$V_k n_k \equiv +1, \qquad (\text{mod. } 4).$$

M. Kronecker montre que le symbole de Legendre

$$\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)$$

est positif ou négatif suivant que la somme algébrique des signes des $(l-1)$ fractions continues

$$\cfrac{-1}{g_k - \cfrac{1}{g_{k+1} - \cdots}}$$

pour $k = $ [illegible] est congrue ou incongrue suivant le module 8, à la somme algébrique de toutes valeurs de signes.

On peut aussi dire que *la condition nécessaire et suffisante pour que le symbole de Legendre*

$$\left(\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)$$

soit positif, est que le nombre entier

$$[illegible] \sum_{k=1} [illegible]$$

[illegible] *divisible* [illegible] *divisible par huit*.

On peut encore former une suite de nombres entiers impairs

$$[illegible]$$

chacun n_k se déduisant des deux précédents [illegible] en multipliant $-2n_{k-1}$ par [illegible] le nombre entier le plus

rapproché, et continuant ainsi jusqu'à $n_t = \pm 1$. Puis, former la suite

$$1, V_0, V_1, V_2, \ldots, V_t$$

des valeurs des signes des nombres n précédents. Soient alors ψ le nombre des changements de signes dans la série

$$1, n_0, n_1, \ldots, n_t,$$

et ψ' le nombre de changements de signes dans la série

$$1, V_0, V_1, \ldots, V_t.$$

La valeur du symbole de Legendre $\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)$ est donnée par l'égalité

$$\left(-\frac{n_1}{n_0}\right) = (-1)^{\frac{\psi-\psi'}{2}}.$$

Kronecker. — Démonstration d'une formule de Calcul intégral due à Jacobi. (539-540).

Il s'agit de la formule

$$\int_0^\pi f(\cos x)\cos nx\,dx = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos x)\sin^{2n}x\,dx,$$

dans laquelle n désigne un nombre entier positif quelconque et $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f. Elle a été donnée par Jacobi dans le *Journal de Crelle*, t. 15, p. 3, et est utile lorsque, ayant développé une fonction en série de Fourier, on veut calculer la valeur des coefficients de ce développement.

M. Kronecker démontre cette formule par induction, de la manière suivante.

Si l'on écrit le premier membre de la formule en prenant pour n successivement trois entiers consécutifs $(n-1)$, n, $(n+1)$, on obtient trois intégrales qui sont manifestement liées par la relation

$$\int_0^\pi f(\cos x)\cos(n+1)x\,dx + \int_0^\pi f(\cos x)\cos(n-1)x\,dx - 2\int_0^\pi \cos x f(\cos x)\cos nx\,dx = 0.$$

M. Kronecker démontre que les trois intégrales obtenues en écrivant le second membre de la formule pour $(n-1)$, n, $(n+1)$ sont liées par la *même* relation, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_0^\pi f^{(n+1)}(\cos x)\sin^{2n+2}x\,dx + (\tfrac{1}{4}n^2 - 1)\int_0^\pi f^{(n-1)}(\cos x)\sin^{2n-2}x\,dx - 2(2n+1)\int_0^\pi [\cos x f^{(n)}(\cos x) + n f^{(n-1)}(\cos x)]\sin^{2n}x\,dx = 0,$$

dans le cas où la fonction $f(\cos x)$ que l'on considère et toutes ses dérivées sont finies et continues dans l'intervalle de $\cos x = -1$ à $\cos x = +1$.

Il en résulte que, si l'on suppose la formule de Jacobi démontrée pour $(n-1)$ et n, elle est aussi démontrée pour $(n+1)$. Il suffit donc de la vérifier pour $n=1$ et pour $n=2$.

Kronecker. — Démonstration du théorème de Puiseux. (543-548).

On sait que les recherches générales concernant l'existence de développements et les développements effectifs des fonctions algébriques en séries entières sont longues et difficiles. Il semblait cependant nécessaire de supposer ces recherches entièrement effectuées pour démontrer rigoureusement, à l'aide de développements en séries entières, le théorème que Puiseux a donné pour la première fois dans le *Journal de Liouville*, t. 16, p. 221. C'est ce qui a amené M. Kronecker à chercher une nouvelle démonstration du théorème de Puiseux basée sur les mêmes principes et toutefois indépendante de ces recherches générales. Il y est parvenu à l'aide d'une transformation bien simple de la variable indépendante.

Mais M. Kronecker ne se contente pas de démontrer que, si une fonction univoque de z, $f(z)=y$ vérifie une équation

$$\Phi(y,z)=\varphi_0(z)y^n+\varphi_1(z)y^{n-1}+\ldots+\varphi_n(z)=0,$$

dont les coefficients $\varphi(z)$ sont des fonctions rationnelles entières de la variable z et dont le discriminant n'est pas nul, cette fonction $f(z)$ est nécessairement une fonction rationnelle de la variable z. Il *représente* en outre cette fonction rationnelle de z par une intégrale qui est à effectuer le long d'un cercle de rayon infiniment grand,

$$f(z)=\frac{-1}{2\pi i\,\varphi_0(z)}\int\frac{\varphi_0(\zeta)\,f(\zeta)}{z-\zeta}\left[1-\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{m+1}\right]d\zeta,$$

où m est le degré de $\Phi(y,z)$ par rapport à z. Et l'on peut vérifier sur cette formule que le second membre est une fonction rationnelle de z, précisément lorsque les deux hypothèses du théorème de Puiseux sont réalisées, l'une que $f(z)$ est une fonction univoque de la variable z, l'autre que $y=f(z)$ vérifie l'équation écrite plus haut, $\Phi(y,z)=0$.

J. M.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE (1).

Troisième série, t. III, 1886.

Appell. — Sur les fonctions périodiques de troisième espèce. (9-42).

(1) Voir *Bulletin*, X, p. 236.

L'auteur applique à divers exemples la méthode de décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce (voir *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I et II). Ces applications sont relatives à des fonctions qui, mises sous la forme du quotient de deux produits de fonctions Θ, contiennent plus de Θ au numérateur qu'au dénominateur. M. Appell s'attache principalement, la fonction étant décomposée en une somme d'éléments fractionnaires simples et une partie entière, à la détermination de la partie entière.

Soit $F(z)$ une fonction uniforme vérifiant les deux relations

$$F(z+2K)=F(z), \qquad F(z+2iK')=e^{-\frac{m\pi zi}{K}}F(z),$$

où m est un entier positif. Si l'on appelle $a, b, \ldots, l$ les pôles dans un parallélogramme des périodes, A, B, ..., L leurs résidus, $\chi_m(a,z)$ l'élément de décomposition relatif au pôle a, $G(z)$ une fonction entière, on peut écrire

$$F(z)=-A\chi_m(a,z)-B\chi_m(b,z)-\ldots-L\chi_m(l,z)+G(z).$$

M. Appell détermine $G(z)$ en appliquant une méthode qui revient à celle des coefficients indéterminés. Posant

$$\psi_m(z,\alpha)=e^{\frac{mn\pi i(z-\alpha)i}{2K}}\frac{H'(0)}{H(z-\alpha)}\frac{H(z+s-\alpha-mK)}{H(s-mK)}\prod_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{H(z-x_\nu)}{H(a-x_\nu)},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_m$ désignent des constantes arbitraires dont la somme est s, et appelant $G_1(z), G_2(z), \ldots, G_m(z)$ les résidus de ψ_m aux pôles $x=a_1$, $x=a_2$, $\ldots$, $x=a_m$, on a pour déterminer $G(z)$ la formule

$$G(z)=\lambda_1 G_1(z)+\lambda_2 G_2(z)+\lambda_m G_m(z),$$

où

$$\lambda_\nu=F(a_\nu)+A\chi_m(a,a_\nu)+\ldots+L\chi_m(l,a_\nu), \qquad (\nu=1,2,\ldots,m).$$

Une autre méthode, employée par M. Hermite pour les fonctions de première et de deuxième espèce, permet d'établir la formule de décomposition et de déterminer en même temps la partie entière sous la forme

$$G(z)=\lambda'_0 g_0^{(m)}(z)+\lambda'_1 g_1^{(m)}(z)+\ldots+\lambda'_{m-1}g_{m-1}^{(m)}(z),$$

où

$$g_\nu^{(m)}(z)=e^{\frac{\nu\pi zi}{K}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{\frac{mn\pi zi}{K}}q^{mn(n-1)+2n\nu}, \qquad (\nu=0,1,2,\ldots,m-1),$$

et

$$\lambda'_0=\frac{1}{2}(A_0+A_m), \qquad \lambda'_\nu=A_\nu, \qquad (\nu=1,2,\ldots,m-1).$$

M. Appell, d'ailleurs, indique un procédé plus élémentaire pour le calcul des coefficients.

Tannery (*J.*). — Deux leçons de Cinématique. (43-80).

Cette Note est à très peu près la reproduction des Leçons professées par M. Tannery à la Sorbonne en 1880. Les formules et les constructions qui

donnent les éléments de la courbure des trajectoires d'un point d'un solide, mobile parallèlement à un plan fixe ou autour d'un point fixe, y sont déduites des propriétés relatives à l'accélération. Cette marche, qui est la plus naturelle, met nettement en évidence la généralité de ces formules et de ces constructions; elle permet très simplement de mener parallèlement les démonstrations analytiques et géométriques, ces dernières fondées sur quelques principes de la géométrie des segments de droite dont M. Tannery reprend, d'après Möbius, l'exposé systématique.

Markoff. — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. (81-88).

Solution détaillée et généralisation d'un problème posé et résolu sans explication par M. Tchebycheff :

Une masse donnée doit être distribuée sur un segment de droite de longueur l. Soient y et a les distances à l'origine d'un point variable et d'un point fixe du segment, $f(y)$ la densité au point d'abscisse y. On demande de répartir la masse de façon que les intégrales

$$\int_0^l f(y)\,dy, \qquad \int_0^l y\,f(y)\,dy, \qquad \ldots \qquad \int_0^l y^m f(y)\,dy$$

aient des valeurs données et que la masse $\int_0^a f(y)\,dy$ du segment de longueur a soit un maximum ou un minimum.

Goursat. — Sur les fonctions d'une variable analogues aux fonctions hypergéométriques. (107-136).

Riemann a montré que les fonctions hypergéométriques sont définies par leurs points de ramification et les exposants de discontinuité, entre lesquels doit exister une certaine relation. Si l'on cherche à étendre la définition de Riemann aux intégrales d'équations linéaires d'ordre supérieur au second ou ayant plus de trois points critiques, il faut imposer à ces intégrales, outre les conditions de Riemann, d'autres conditions d'ailleurs arbitraires. Les plus simples consistent à supposer que, dans le domaine de quelques-uns des points critiques, il existe plusieurs branches linéairement indépendantes telles que le quotient de deux d'entre elles est uniforme dans ce domaine. Soit alors

$$[\psi(x)]^m \frac{d^m y}{dx^m} + [\psi(x)]^{m-1} F_{\rho-1}(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + F_{m(\rho-1)}(x) y = 0$$

l'équation linéaire à coefficients rationnels et à intégrales régulières ayant ρ points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ (∞ compris $= a_\rho$), où

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{\rho-1}),$$

et où $F_{\rho-1}(x), \ldots, F_{m(\rho-1)}(x)$ sont des polynômes d'un degré au plus égal à leur indice. Pour déterminer les coefficients inconnus de ces polynômes, les conditions imposées aux intégrales conduisent à résoudre en nombres entiers et positifs certaines équations arithmétiques. Connaissant un système de solutions, le calcul des coefficients est ramené à la résolution d'un système d'équations algébriques qui, dans un cas particulier (dans lequel rentrent d'ailleurs tous les autres), se réduisent au premier degré.

Voici en termes plus précis comment se pose dans le cas en question le problème de Riemann généralisé :

1° Chacune des intégrales y est holomorphe pour toute valeur de x, sauf dans le voisinage des points $a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}, \infty$;

2° Quand on fait décrire à la variable un chemin fermé ne passant par aucun point critique, les valeurs finales de y sont liées aux valeurs initiales par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants;

3° Dans le domaine du point singulier $a_i (i = 1, 2, \ldots, \rho)$, on a m branches indépendantes qui se partagent en λ_i groupes comprenant respectivement $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \ldots, m_\lambda^{(i)}$ fonctions. Les branches du $k^{ième}$ groupe sont de la forme

$$y = (x - a_i)^{\nu_k^{(i)}} P_k(x - a_i),$$

où $P_k(x - a_i)$ représente une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - a_i$;

4° Les nombres $m_k^{(i)}$ vérifient les équations

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} \frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)}+1)}{2} - 1 = m\left[\frac{(m-1)(\rho-2)}{2} - 1\right],$$

$$\sum_{k=1}^{k=\lambda_i} m_k^{(i)} = m, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

et entre les exposants $\nu_k^{(i)}$ on a la relation

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} \left[m_k^{(i)} \nu_k^{(i)} + \frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)}-1)}{2} \right] = \frac{m(m-1)(\rho-2)}{2}.$$

Il y a deux types de cette espèce pour le troisième ordre, six pour le quatrième.

Toutes ces équations jouissent d'une propriété importante. On peut, par des calculs algébriques, déterminer les substitutions que subit un système fondamental d'intégrales convenablement choisi quand on fait décrire à la variable un contour fermé. Les coefficients de ces substitutions sont des fonctions algébriques dans le domaine des points critiques et ne dépendent pas des points critiques eux-mêmes.

Marchand. — Sur le changement de variables. (137-188 et 343-388).

L'auteur montre que l'expression des coefficients de la série de Taylor, obtenue par Wronski en laissant indéterminée la variable indépendante, n'est autre que la formule générale du changement de variable

$$\frac{1}{m!}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} dx & 0 & \ldots & 0 & dy \\ d^2x & d^2x^2 & \ldots & 0 & d^2y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d^m x & d^m x^2 & \ldots & d^m x^{m-1} & d^m y \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\ldots 1.2\ldots m\, dx^{(1+2+\ldots+m)}}.$$

Par de nombreuses applications, il cherche à mettre en relief la valeur pratique de cette formule et d'une autre équivalente où les calculs sont développés sans termes inutiles.

Dewulf. — Étude sur les surfaces gauches. (189-200).

Soient S une surface gauche; A une de ses génératrices; μ_1, μ_2, μ_3 trois points de A; M_1, M_2, M_3 les plans tangents en ces points. Un plan P perpendiculaire à A coupe ces trois plans suivant trois droites m_1, m_2, m_3. Si dans un plan quelconque passant par A on décrit sur $\mu_1\mu_2$ un segment capable de l'angle (m_1, m_2) et sur $\mu_2\mu_3$ un segment capable de l'angle (m_2, m_3), les deux segments se couperont en un point p qui sera le centre du faisceau m_1, m_2, m_3 mis en perspective avec la division μ_1, μ_2, μ_3.

Ce point p, que M. Dewulf appelle le *centre perspectif* de A par rapport à S, et qui est identique au *point représentatif* de M. Mannheim, jouit de propriétés intéressantes. L'auteur en déduit les notions de point central, de plan central, de paramètre de distribution. Il montre comment la théorie du centre perspectif conduit aisément à celle des normalies, de la courbure des surfaces et des pinceaux de rayons.

Stieltjes. — Recherches sur quelques séries semi-convergentes. (201-256).

Le but de ces recherches est l'évaluation approchée des fonctions $F(a)$ développables en séries, telles que

$$m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \ldots + \frac{m_n}{a^n} + R_n,$$

que l'on ne pourrait continuer indéfiniment au point de vue du calcul numérique, car la série serait divergente. Il n'est permis d'utiliser ce développement qu'après une discussion, généralement fort délicate, du terme complémentaire R_n.

Pour un grand nombre de séries à termes alternés, on a prouvé que la valeur de $F(a)$ est comprise entre les sommes de n et de $n+1$ termes.

Pour les séries, beaucoup plus difficiles à étudier, où les coefficients sont de même signe, le vrai problème à résoudre est, suivant M. Stieltjes, la détermination du rang du reste R_n qui change de signe, c'est-à-dire la résolution de l'équation transcendante $R_n = 0$. Soit n le premier nombre entier supérieur à la racine; la valeur exacte de $F(a)$ est alors comprise entre deux limites dont la différence est égale au premier terme employé T_n. Si même la racine est obtenue avec une large approximation, l'erreur commise sur $F(a)$ sera seulement une fraction très faible de T_n. Dans tous les exemples traités par l'auteur se présente cette circonstance favorable que le changement de signe de R_n a lieu dans le voisinage du plus petit terme.

La plus simple des séries étudiées par M. Stieltjes est fournie par le développement du logarithme intégral

$$li(e^a) = e^a\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1.2}{a^3} + \ldots + \frac{1.2\ldots(n-1)}{a^n} + R_n\right],$$

$$R_n = \text{valeur principale} \int_0^\infty \frac{v^n e^{-av}}{1-v}\,dv.$$

Comme il s'agit d'un développement suivant les puissances décroissantes de n, on peut réduire les limites de l'intégrale ci-dessus à des quantités $1-h$, $1+k$ très voisines de l'unité, ce qui permet d'obtenir la racine N de l'équation $R_n = 0$ par la méthode du retour des suites. On trouve

$$N = a - \frac{1}{3} - \frac{8}{405a} + \frac{16}{25515a^2},$$

avec une approximation du même ordre que $e^{-a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$.

Cet exemple permet de comprendre comment M. Stieltjes traite d'autre cas plus compliqués : développement des transcendantes

$$\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}\,du, \quad \int_0 \frac{u\cos au}{1+u^4}\,du, \quad \log\Gamma(ai),$$

des intégrales de l'équation

$$\frac{d^2z}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dz}{da} + z = 0,$$

et finalement de la fonction

$$\sum^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{n}{i}} - 1},$$

déjà considérée par M. Schlömilch.

Guichard. — Applications de la théorie des cubiques gauches. (259-262).

On prend cinq points quelconques et un plan P. On considère toutes les droites qui joignent ces cinq points deux à deux, puis on marque leurs traces sur le plan P. Les dix points ainsi obtenus donnent une figure composée de deux triangles homologiques, de leur centre et de leurs axes d'homologie, dans laquelle on peut distinguer cinq quadrilatères. Par les cinq points choisis et un point arbitraire R du plan P, on fait passer une cubique, que l'on projette successivement des cinq points sur le plan. On obtient ainsi cinq coniques passant par R et circonscrits aux cinq quadrilatères.

Toutes ces coniques passent par les deux autres points d'intersection de la cubique avec le plan.

Théorème analogue quand on prend six points au lieu de cinq.

Kirchhoff (traduit par Duhem). — Sur la théorie des rayons lumineux. (303-342).

M. Kirchhoff se propose d'expliquer, par des raisonnements beaucoup plus rigoureux que ceux d'Huygens et de Fresnel, la formation des rayons lumineux, leur réflexion, leur réfraction et leur diffraction.

Le point de départ de son analyse très délicate est un lemme, déjà utilisé par M. Helmholtz dans sa théorie des tuyaux sonores, et qui se déduit de l'appli-

cation du théorème de Green aux fonctions vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi.$$

Ce lemme, qui constitue une forme plus précise et plus générale du principe d'Huygens, montre que le mouvement de l'éther à l'intérieur d'un espace limité peut être regardé comme provenant d'une couche de points lumineux distribués sur la surface terminale.

Le problème général de l'Optique se pose dans les termes suivants. Dans l'espace indéfini, rempli par l'éther homogène, se trouve un point lumineux 1. Il engendre un mouvement auquel correspond une certaine fonction φ'. Si dans l'espace on introduit un corps étranger, le mouvement est modifié; la fonction φ' se transforme en la fonction φ; le problème consiste à déterminer φ pour tout point o extérieur au corps. L'application du lemme donne alors

$$4\pi\varphi(o) = 4\pi\varphi'(o) + \int \Omega \, ds,$$

$\int \Omega \, ds$ étant une certaine intégrale qui s'étend à toute la surface du corps.

M. Kirchhoff évalue cette intégrale en supposant la longueur d'onde λ infiniment petite et le mouvement lumineux donné par la loi simple

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right).$$

Dans ces conditions, l'intégrale considérée est égale à o, si la ligne droite qui joint les points 1 et o ne rencontre pas la surface S; elle est égale à $\pm 4\pi\varphi(o)$, si cette droite rencontre la surface S à distance finie de son contour. Ces deux théorèmes contiennent toutes les lois de l'Optique géométrique.

Les phénomènes de diffraction correspondent au cas où la droite en question passe par les points du contour.

Gomes Teixeira. — Sur le théorème d'Eisenstein. (389-390).

Démonstration élémentaire d'un théorème qui comprend celui d'Eisenstein sur les séries entières qui satisfont à une équation algébrique.

Sauvage. — Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles. (391-404).

On doit, comme on sait, à M. Fuchs ce théorème fondamental :

L'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m} y,$$

où les fonctions $P(x)$ sont uniformes et continues dans le domaine du point a, admet dans ce domaine un système fondamental d'intégrales de la forme

$$\left\{ \varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \ldots + \varphi_n [\log(x-a)]^n \right\} (x-a)^\rho,$$

dont les éléments $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont réguliers, c'est-à-dire uniformes dans le domaine du point a et infinis d'ordre fini pour $x = a$.

M. Sauvage étend ce théorème aux systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(x - x_0)\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients a sont holomorphes dans le domaine du point x_0. Il montre que toutes les solutions de ce système peuvent être composées linéairement avec des solutions régulières dans le domaine de x_0. Ce système n'est d'ailleurs pas le seul qui jouisse de cette propriété.

Dewulf. — Sur une transformation géométrique générale dont un cas particulier est applicable à la Cinématique. (405-431).

L'auteur rattache la théorie des mouvements plans aux théories de la Géométrie projective. Cette marche conduit à des conséquences nouvelles, dont la plus intéressante est celle qui permet de construire, au moyen de deux cônes, le lieu des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe.

Robin. — Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts. (Supplément, 3-58).

Dans la première Partie de son travail, l'auteur établit une équation fonctionnelle à deux variables indépendantes qui régit la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés. Il applique cette équation à la recherche de la distribution électrique sur les sphéroïdes sensiblement différents de la sphère; on sait que Poisson s'était borné au cas où le sphéroïde est infiniment voisin de la sphère.

La deuxième Partie traite des conducteurs ouverts, tels que les calottes, les zones. L'auteur montre comment, sachant trouver la couche simple en équilibre sur la surface géométrique du conducteur, on peut, par une simple quadrature, répartir cette couche entre les deux faces. Il ramène ensuite le problème de la distribution électrique sur les conducteurs ouverts à contour multiple à celui de la distribution sur les conducteurs à contour simple. Comme application de cette méthode de réduction, il calcule la distribution de l'électricité sur la zone en prenant pour point de départ la solution donnée par W. Thomson pour l'équilibre électrique de la calotte sphérique.

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE (1).

Tome XI; 1884.

Janse (*L.-Bz.*). — Solution graphique de triangles sphériques et de problèmes nautiques et astronomiques correspondants. (1-27, 2 pl.).

Introduction.

Chapitre I. — De la solution graphique des problèmes et de la projection stéréographique.

1. Remarques générales. 2. Sur quelques méthodes de solutions par construction. 3. Méthode des figures auxiliaires. 4. Méthode des lieux géométriques. 5. Choix de la projection et sa représentation.

Chapitre II. — Des problèmes les plus simples de la projection stéréographique.

a. Construction d'un grand cercle (quinze problèmes). *b.* Construction d'un petit cercle (cinq problèmes). *c.* Construction de triangles sphériques (quatre problèmes). (*A suivre.*)

Van Geer (*P.*). — La méthode de Roberval. (28-45, 1 pl.).

I. Exposé historique de la méthode.

II. Coordonnées parallèles. Coordonnées polaires. Coordonnées bipolaires. Dans le dernier cas les deux composantes du mouvement dépendent l'une de l'autre.

III. Ellipse et hyperbole en coordonnées parallèles. Spirale d'Archimède et spirale hyperbolique en coordonnées polaires. Ellipse, hyperbole et lemniscate en coordonnées bipolaires.

IV. Coniques données par foyer et directrice. Cissoïde. Quadratrice. Conchoïdes. Cycloïde. Épicycloïde et hypocycloïde.

Bierens de Haan (*D.*). — Deux opuscules rares de Benedictus Spinoza. (49-84).

Réimpression de « Stelkonstige reeckening van den regenboog, dienende tot naedere samenknoping der Natuurkunde met de Wiskonsten », in 's Gravenhage, ter druckerye van Levyn van Dyck, 1687. (Calcul algébrique de l'arc-en-ciel, servant à lier plus intimement la Physique et les Mathématiques; à l'imprimerie de L. van Dyck, La Haye, 1687) (51-74, avec des figures).

Réimpression de « Reeckening van Kanssen » (Calcul de chances) (75-82).

---

(1) Voir *Bulletin*, IX$_2$, p. 57.

Solution de cinq problèmes, dont voici le premier. Deux personnes A et B jouent à deux dés, à la condition que A gagne s'il jette six et que B gagne s'il jette sept. D'abord A jettera une fois et ensuite B et A jetteront tour à tour chacun deux fois de suite, jusqu'à ce qu'un des deux gagne. Démontrer que les chances de A et B sont dans le rapport de 10355 à 12276.

Bierens de Haan (*D.*). — Un Livre extrêmement rare d'Albert Girard. (83-152, avec des figures).

Réimpression de « *Invention nouvelle en l'Algèbre* »; par Albert Girard, mathématicien, tant pour la solution des équations que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science; à Amsterdam, chez Guillaume Iansson Blaeuw, 1629.

La première Partie s'appelle *Complément mathématique*, la seconde Partie traite *des radicaux, de l'extraction des racines des multinomes radicaux, de la construction algebraïque sur les questions des équations ordonnées, des théorèmes* (*parmi lesquels se trouve le théorème connu*

Soient A premier meslé, B second, C troisiesme, D quatriesme, etc

alors en toute sorte d'équation, { A, Aq — B2, Acub — AB3 + C3, Aqq — AqB4 + AC4 + Bq2 — D4 } sera la somme des { solutions, quarez, cubes, quaré-quarez },

des postposées quantitez en l'Algèbre ». Et la troisième Partie porte le titre *De la mesure de la superfice des triangles et polygones sphériques, nouvellement inventée.* Cette partie, pleine d'observations importantes, se termine par *Le mesurer des angles solides lesquels sont circuits de superfices planes.*

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur le rapport géométrique entre les points racines d'une équation et de sa dérivée. [153-186, suite (1)].

L'auteur démontre le théorème : « Si les points racines d'une équation d'ordre n sont les sommets d'un polygone semi-régulier, les points racines de l'équation dérivée sont les projections sur le grand axe de l'ellipse circonscrite des $n-1$ points de division que l'on obtient en divisant en n parties égales la moitié de circonférence décrite sur la distance des foyers de cette ellipse comme diamètre. Ensuite il prouve qu'un même système de points racines dérivés correspond à tous les polygones semi-réguliers inscrits en des ellipses homofocales. Et enfin il s'occupe de l'équation la plus générale du quatrième ordre.

Mantel (*W.*). — Sur les combinaisons. (190).

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (191-212).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 155.

Tome XII; 1886.

Schoute (*P.-H.*). — Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes. (1-37, 2 pl.).

1. Considération élémentaire de la transformation quadratique. 2. Ce qui correspond à une courbe d'ordre *n*. 3. Les involutions quadratiques régulière et irrégulière. 4. Idée générale de la construction des courbes unicursales par points et tangentes. 5. La transformation de Maclaurin. 6. Génération de la cissoïde, de la strophoïde et de la trisectrice d'une même source, d'après M. Godefroy. La courbe d'Agnesi et le folium de Descartes. 7. Les courbes c^4 déduites d'un cercle. 8. Les courbes c^4 déduites d'une conique.

Van den Berg (*F.-J.*). — D'un certain jeu. (38-59).

Études du jeu des grenouilles (*voir* E. Lucas, ***Récréations mathématiques***, t. II, p. 141-145).

Van Geer (*P.*). — Des formules qui déterminent la valeur de la vie humaine. (60-81).

Vries (*J. de*). — Les cubiques planes. (82-93).

L'auteur élabore une idée émise par M. le Dr Émile Weyr en déduisant les propriétés principales des cubiques planes de la génération de ces courbes à l'aide de deux systèmes élémentaires symétriques du second degré.

Van Kooten (*F.-H.*). — L'erreur moyenne dans les observations qui servent à déterminer plusieurs inconnues. (94-108).

Janse (*L.-Bz.*). — Solution graphique de triangles sphériques et de problèmes nautiques et astronomiques correspondants. [113-148, 3 pl., suite (1)].

Chapitre III. — Sur la solution directe des triangles sphériques. Les triangles rectangles et obliquangles.

Chapitre IV. — Sur la solution des triangles sphériques à l'aide de figures auxiliaires. Les triangles rectangles, isoscèles et anisoscèles.

Chapitre V. — Sur la solution des problèmes à l'aide des lieux géométriques sur la sphère.

Chapitre VI. — Application de la projection stéréographique à la solution des problèmes nautiques et sphéro-astronomiques.

---

(1) *Voir* plus haut, p. 96.

Cardinaal (*J.*). — Le réseau des coniques et un système plan, qui en dérive. (149-173, 1 pl.).

Application de la méthode, d'après laquelle M. le Dr Th. Reye étudie le réseau des surfaces du second ordre (XXVIIIe Leçon sur la géométrie de position, IIe Partie) au réseau des coniques et le système plan des polaires d'un point quelconque du plan par rapport aux coniques du réseau.

Landré (*Corn.-L.*). — La valeur d'une rente viagère et le marché d'une assurance sur la vie. (174-181).

Landré (*Corn.-L.*). — Sur le risque du payement dans les assurances sur la vie. (182-187).

Schouten (*G.*). — Le déplacement fini d'un corps solide. (188-203).

Démonstration analytique du théorème connu de Chasles d'une manière plus simple que celle dont s'est servi Duhamel dans son *Cours de Mécanique*. Interprétation géométrique de toutes les formules.

Van Aller (*C.*). — Remarques par rapport à la convergence ou divergence des séries infinies. (204-215).

Moors (*B.-P.*). — Moyen simple à donner immédiatement à une balance la plus grande sensibilité dont elle est capable pour une charge quelconque. (216-218.)

Tome XIII; 1887.

Schoute (*P.-H.*). — Examen des faisceaux de cubiques planes par rapport au nombre des courbes douées d'un centre. (1-10).

Après avoir réfuté deux théorèmes de Steiner (*Crelle*, t. 47, p. 7), l'auteur démontre qu'il y a des faisceaux de cubiques, dont tous les éléments sont des cubiques à centre sans être concentriques; dans ce cas le lieu des centres est une droite, etc.

Van Geer (*P.*). — La section conique dans l'espace. (58-84.).

L'auteur développe l'équation tangentielle de la conique dans l'espace et la discute par rapport à l'espèce de la conique.

Schouten (*G.*). — Un point M, qui se meut avec une vitesse initiale donnée perpendiculaire au rayon vecteur initial OM, se trouve sous l'action de deux forces ar^{-m} et $br^{\pm n}$, qui passent

par le centre fixe O. On demande un examen complet du mouvement, quand m et n sont deux nombres entiers positifs. (11-57 et 117-184) (1).

I. Déduction des cas différents, où la solution est possible. II. La force $a + br^{-1}$. III. La force $a + br^{3}$. IV. La force $a + br$. V. La force $ar^{-3} + br^{3}$. VI. La force $ar^{-3} + br^{-1}$. VII. La force $ar^{-2} + br^{-1}$. VIII. La force $ar^{-1} + br$.

Ekama (*K.*). — Les figures de Lissajous. (184-212, 1 pl.).

Tandis que M. A. Himstedt a étudié en 1884, dans sa thèse *Ueber Lissajous'sche Curven*, le cas de deux vibrations orthogonales, l'auteur s'occupe du cas le plus général. Ensuite il indique le rapport entre les figures de Lissajous et les fonctions géométriques des multiples d'un angle.

Cardinaal (*J.*). — Remarques par rapport à quelques théorèmes de la théorie du faisceau de surfaces quadratiques. (213-222).

L'auteur démontre : 1° que la courbe de base d'un faisceau de quadriques est de la huitième classe; 2° que le lieu de la droite dont la polaire réciproque par rapport aux surfaces d'un faisceau de quadriques engendre un cône est le complexe tétraédral de M. Reye; 3° que le lieu du milieu des cordes menées par P dans un tel faisceau de surfaces est également un faisceau de quadriques.

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (85-116).

ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem et rédigées par E.-H. VON BAUMHAUER (2).

Tome XIX; 1884.

Buys-Ballot (*C.-H.-D.*). — Sur les perturbations de l'aiguille aimantée. (107-122).

L'auteur examine si les perturbations, suivant qu'elles se produisent simultanément sur toute la surface de la Terre ou qu'elles sont restreintes dans des limites étroites, peuvent être attribuées à des causes différentes.

---

(1) Sujet de prix proposé par la Société (1885, n° 5).

(2) Voir *Bulletin*, IX$_2$, 60.

Lorentz (*H.-A.*). — Le phénomène découvert par Hall et la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière. (123-152) (1).

Engelmann (*Th.-W.*). — Recherches sur les relations quantitatives entre l'absorption de la lumière et l'assimilation dans les cellules végétales. (186-206, 1 pl.).

I. Le photomètre microspectral, appareil pour l'analyse microspectrale quantitative. II. Bases expérimentales pour la détermination des rapports quantitatifs entre l'énergie assimilatrice et la grandeur de l'absorption. III. Détermination de la distribution de l'énergie dans le spectre, au moyen de la méthode des bactéries et de l'analyse microspectrale quantitative. IV. Résultats concernant les relations quantitatives entre l'absorption de la lumière et l'assimilation.

De Boer (*F.*). — Extension du théorème de Rolle. (207-240) (2).

Van Beek (*J.-C.*). — Sur la filtration des liquides à travers des membranes fibreuses. (241-271).

Giltay (*J.-W.*). — La polarisation des récepteurs téléphoniques. (272-296, 1 pl.).

L'auteur étudie l'action téléphonique du condensateur au moyen d'un élément Leclanché et un microphone, modèle Hopkins, reliés au fil primaire d'une bobine d'induction. Il donne une explication de l'action, en apparence si singulière, de la pile auxiliaire.

Donders (*F.-C.*). — Équations des couleurs spectrales simples et de leurs mélanges binaires dans les systèmes normaux (polychromatiques) et anormaux (dichromatiques). (303-346, 1 pl.).

I. Mélange de rouge ($\lambda = 0^{\mu},6705$) et de vert ($\lambda = 0^{\mu},535$). *a.* Équations avec le jaune ($\lambda = 0^{\mu},589$). *b.* Équations des mélanges de rouge et de vert avec les différentes couleurs spectrales intermédiaires. *c.* Explication de la différence des deux catégories de Rayleigh. *d.* Explication des différences individuelles dans la première catégorie, celle du sens chromatique normal. *e.* Les plus petites différences perceptibles du jaune et des couleurs contiguës, pour le sens chromatique normal et anormal. *f.* Le rapport des intensités des mélanges à la somme de leurs composantes.

---

(1) Voir *Bulletin*, IX_1, 75.
(2) Voir *Bulletin*, IX_1, 75.

Van der Stok (*J.-P.*). — **Sur le calcul des observations horaires de la force horizontale du magnétisme terrestre.** (347-371).

Stieltjes (*F.-J.*). — **Note sur le déplacement d'un système invariable dont un point est fixe.** (372-390).

L'auteur démontre que les formules de Duhamel cessent de donner la position de l'axe de rotation quand le déplacement est une rotation de 180° et il comble cette lacune.

Korteweg (*D.-J.*). — **Sur les trajectoires décrites sous l'influence d'une force centrale.** (391-434).

I. L'auteur distingue trois espèces de branches centrifuges, dont la première admet un apocentre et en même temps un axe de symétrie, tandis que la seconde s'éloigne du centre à l'infini et que la troisième, en tendant vers une distance limite qui n'est jamais atteinte, se termine en spirale à cercle asymptotique extérieur. De la même manière il distingue trois espèces de branches centripètes, celles qui mènent au centre, celles qui donnent naissance à un péricentre et un axe de symétrie et celles qui se terminent en spirale à cercle asymptotique intérieur. Ainsi, il trouve neuf espèces de mouvement central. Afin qu'il puisse déterminer dans plusieurs cas spéciaux lequel des neuf cas possibles se présentera, il divise au moyen de cercles concentriques le champ de mouvement en trois régions distinctes. Dans la première la force centrale est répulsive (région de répulsion), dans la deuxième la force centrale est attractive et le produit de la force et du cube de la distance croît avec cette distance (région de stabilité), dans la troisième la force centrale est attractive et le produit en question diminue quand la distance croît (région d'instabilité). Il donne ensuite : II. Théorèmes généraux. III. Théorèmes sur les terminaisons en spirale à cercle asymptotique. IV. Théorèmes concernant l'extension de la trajectoire jusqu'au centre et jusqu'à l'infini. V. Applications.

Stieltjes (*F.-J.*). — **Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre.** (435-460, 2 pl.).

Quand deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ vérifient les équations

$$\int_0^1 x^2 F(x)\,dx = \int_0^1 x^2 G(x)\,dx = A,$$

$$\int_0^1 x^4 F(x)\,dx = \int_0^1 x^4 G(x)\,dx = B,$$

alors la différence $F(x) - G(x)$ change au moins *deux* fois de signe entre l'intervalle de zéro à l'unité, si elle n'est pas constamment nulle. Au moyen de ce théorème, l'auteur, en se proposant que la Terre se compose de couches ellipsoïdales homogènes, dont la densité $f(x)$ est une fonction inconnue du rayon x de la sphère équivalente, détermine pour chaque valeur de x deux limites assez étroites entre lesquelles $f(x)$ doit être comprise, dans une première partie, en supposant seulement que $f(x)$ croît continuellement quand x diminue, dans

une seconde Partie en y ajoutant que la rapidité de cet accroissement de $f(x)$ diminue quand x diminue. Et dans la troisième Partie, il transmet ses résultats en nombres.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur l'équation complète du viriel. (461-478).

Examen de la portée du terme $\frac{\partial^2(mr^2)}{\partial t^2}$ dans l'équation

$$\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2(mr^2)}{\partial t^2} - \sum (Xx + Yy + Zz)^2.$$

Tome XX; 1885.

Michaëlis (*G.-J.*). — Sur la théorie de la rotation des molécules dans un corps solide. (20-35).

L'auteur s'imagine un système de molécules, dont les points exercent l'un sur l'autre des forces, fonctions diverses de leurs distances, qui sont en équilibre dans l'état naturel du système. Il étudie analytiquement la rotation que les molécules subissent lorsque des forces extérieures déterminées agissent sur le système par des hypothèses particulières concernant la structure et l'arrangement des molécules, il simplifie notablement les calculs, etc.

Schoute (*P.-H.*). — Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes. (49-94, 2 pl.) (1).

Giltay (*J.-W.*). — L'emploi de la pile auxiliaire dans les téléphones. (117-128, avec figures).

Exposé des nouvelles expériences sur le récepteur de Dolbear faites par l'auteur à l'aide d'une pile de 100 éléments de Daniell avec un microphone Ader.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur l'application aux phénomènes thermo-électriques de la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur. (129-170).

L'auteur applique, d'une manière qui diffère de celle suivie par MM. Thomson et Clausius, la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes thermo-électriques. Il s'imagine une expérience idéale, dans laquelle une quantité d'électricité passe en sens opposé à travers deux points de contact, non pas par conduction, mais par convection au moyen d'un conducteur auxiliaire. Ainsi, il obtient un cycle complètement réversible auquel il peut appli-

(1) *Voir* plus haut, p. 28.

à la manière de voir de Fresnel, qui est comprise comme un cas particulier dans la théorie proposée. L'expérience seule pourra décider laquelle des deux suppositions est conforme à la vérité.

Malheureusement les expériences qui se rapportent à cette question n'ont fourni que des résultats contradictoires.

Tandis que les observations de M. Fizeau sur la rotation que subit le plan de polarisation dans des piles de glace s'accordent avec la théorie de Fresnel, les expériences d'interférence décrites par M. Michelson (*American Journal of Science*, 3e série, t. XXII, p. 120) semblaient prouver l'égalité de vitesse de la Terre et de l'éther ambiant.

L'auteur n'entre pas en détails au sujet des expériences de M. Fizeau, qui ne peuvent être étudiées à fond à l'aide des considérations présentées, mais il cherche à démontrer que dans celles de M. Michelson l'effet auquel on aurait pu s'attendre, en admettant la théorie de Fresnel, n'est que la moitié de celui que le savant américain prévoyait. Cet effet serait par cela-même trop petit pour qu'il pût se déceler avec certitude dans les conditions où M. Michelson s'était placé en entreprenant ces expériences délicates.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur la stabilité des trajectoires planes périodiques. (203-250) (1).

Introduction. — Équation différentielle du mouvement troublé. Propriétés générales des trajectoires à perturbations conservatrices. Définition d'une trajectoire périodique; nombre des foyers des trajectoires conservativement troublées. L'équation aux différences finies. L'intégration de l'équation aux différences. Le type des trajectoires géométriquement instables (A). Le type des trajectoires stables (B). Les trajectoires altérées par perturbation non conservative du type stable (B). Influence des forces perturbatrices périodiques sur la stabilité des trajectoires du type (B). Influence des termes du second ordre et d'ordre supérieur de l'équation différentielle du mouvement troublé. Le type des trajectoires arithmétiquement instables (C). Le type (D) stable pour des perturbations conservatives, instable pour des perturbations non conservatives. Le type (E) des trajectoires stables à période de perturbation $S_0 = S$. Les trajectoires centrales. Les trajectoires centrales circulaires. Stabilité de la position dans l'orbite.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — De l'influence des conducteurs sur la distribution de l'énergie électrique. (251-282, avec figures).

L'auteur évalue le décroissement de l'énergie totale du champ électrostatique, quand un conducteur sans charge s'approche d'une charge électrique, dans les deux cas d'un conducteur isolé ou en communication avec le sol. Il s'occupe principalement du cas particulier où un point matériel électrique se trouve près d'un conducteur sphérique ou plan, isolé ou lié avec le sol, et, du cas d'un

(1) A l'exception du dernier paragraphe ajouté, ce travail est traduit des *Wiener Sitzungsberichte*, tome XCIII, mai 1886.

condensateur sphérique, c'est-à-dire des trois cas, qui admettent une étude complète de la distribution de l'énergie.

Michaëlis (*G.-J.*). — Sur l'équilibre d'un cylindre élastique dont l'axe est perpendiculaire à un plan principal d'élasticité. (387-405).

L'auteur étend la solution donnée par Clebsch dans l'Ouvrage connu *Ueber die Theorie der Elasticität fester Körper*, pour le cas de corps isotropes, au cas où la base du cylindre en question est parallèle à un plan de symétrie cristallographique. Ensuite, il y applique la théorie de M. Kirchhoff concernant l'équilibre de barreaux élastiques infiniment minces.

Van Schaik (*W.-C.-L.*). — Sur la formule de Maxwell pour la dispersion électromagnétique des plans de polarisation. (406-431).

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam (2e série). In-8 (1).

Tome XX (2e série); 1884.

Giltay (*J.-W.*). — La polarisation des récepteurs téléphoniques. (78-101, 1 pl.) (2).

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XXVI. Réimpression en fac-simile du Livre *Le mirage de la musique* de Simon Stevin (107-195). XXVII. Réimpression en fac-simile du livre *Des moulins* de Simon Stevin. (201-232).

Korteweg (*D.-J.*). — Sur les trajectoires décrites sous l'influence d'une force centrale. (247-289) (3).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Sur le pouvoir de la lunette de dix pieds construite par Huygens. (290-296, 1 pl.).

---

(1) Voir *Bulletin*, IX$_1$, p. 65.
(2) *Voir* plus haut, p. 33.
(3) *Voir* plus haut, p. 36.

Michaëlis (*G.-J.*). — De la théorie de l'action élastique secondaire. (300-374).

L'auteur examine l'hypothèse que M. W. Weber a émise par rapport à la cause des actions retardatrices. Il développe les formules qui déterminent l'action mutuelle d'un système de molécules indépendamment de l'hypothèse de l'homogénéité d'une molécule donnée par M. Warburg. Au contraire, il suppose que le corps isotrope se compose d'éléments de volume anisotropes et tient compte des résistances qui s'opposent à la rotation des molécules. Il applique ses résultats à l'allongement, la torsion et la flexion; enfin il examine l'influence des actions secondaires sur les vibrations des corps élastiques.

De Boer (*F.*). — Discussion de l'équation générale du quatrième ordre. (413-452, 2 pl.).

L'auteur applique les principes généraux, qu'il a donnés dans son étude *Extension du théorème de Rolle* (1), à l'équation générale du quatrième ordre et examine comment les courbes $\Phi = \text{const.}$ se transforment les unes dans les autres quand on attribue successivement toutes les valeurs possibles au terme constant de l'équation. Il démontre que les transitions se font au travers de courbes Φ *ramifiées*, qui passent par deux ou par tous les points racines de l'équation dérivée. Il considère d'abord le dernier cas qui se présente : 1° quand ces trois points-racines se trouvent en ligne droite et 2° quand ces points forment un triangle dans lequel $a^2 + b^2 + c^2 = 6R^2$. Dans le cas général, il appelle *courbe partageante* une courbe Φ ramifiée dont une des quatre branches ne contient pas un point-racine de l'équation dérivée et il démontre que les trois courbes partageantes divisent le plan en vingt-huit régions quand

$$a^2 + b^2 + c^2 > 6R^2,$$

et en seize régions quand

$$a^2 + b^2 + c^2 < 6R^2.$$

Ensuite il étudie le cas d'une équation dérivée à deux racines égales et enfin il résume ses résultats en les considérant dans la lumière de la théorie de Riemann à l'aide du plan à quatre feuilles.

Tome I (3e série); 1885.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur l'équation complète du viriel. (19-36) (2).

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XXVIII. Dominicus Justus Bothnia van Burmania. (224-229). Annotations.

(1) *Voir* plus haut, p. 31, et XI, 75.
(2) *Voir* plus haut, p. 33.

(230-233, 1 pl.). XXIX. Inventaire scientifique de R. Descartes. (234-244).

Compte rendu de la Commission pour la publication des œuvres et de la correspondance de Huygens, par MM. Bierens de Haan et Lorentz. (252-256). Appendices (257-267).

Stieltjes (*T.-J.*). — Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre. (272-297) (1).

Lorentz (*H.-A.*). — Sur l'application de la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes thermo-électriques. (327-358) (2).

Van Diesen (*G.*). — L'infiltration et l'évaporation du *Harlemmermeerpolder*. (359-374).

Oudemans (*A.-C.-Jr.*). — Sur la densité, le coefficient de dilatation et l'indice de réfraction de l'éthyléther. (426-468).

Tome II; 1886.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — L'influence des conducteurs sur la distribution de l'énergie électrique. (1-34, avec figures) (3).

Schols (*C.-M.*). — La série mi-convergente, qui entre dans l'évaluation de l'intégrale $\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-z^2}\,dz$. (40-55).

L'auteur fait voir que la valeur du plus petit terme de la série donnée par Laplace n'est pas négligeable et que la série elle-même ne saurait donc faire connaître la valeur de la fonction que dans le cas d'une Z très grande. Il porte remède à cet inconvénient en développant deux valeurs approximatives nouvelles du reste R_n.

Compte rendu de la Commission pour la publication des œuvres et de la correspondance de Huygens, par MM. Bierens de Haan et Lorentz. (68-72). Appendices (73-83).

---

(1) *Voir* plus haut, p. 32.
(2) *Voir* plus haut, p. 33.
(3) *Voir* plus haut, p. 36.

Stieltjes (*T.-J.*). — Sur quelques formules qui se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques. (101-104).

Schols (*Ch.-M.*). — Une projection équivalente à déviation minimum pour un terrain circulaire d'étendue restreinte. (130-145, 1 pl.) (1).

Stieltjes (*T.-J.*). — Sur quelques intégrales définies. (210-216).

Michaëlis (*N.-Th.*). — Influence des tiges de suspension sur le relèvement des volées d'un pont tournant. (217-228, avec figures).

Nieuwenhuyzen Kruseman (*J.*). — Sur le potentiel du champ électrique dans le voisinage d'une calotte sphérique chargée. (265-296, 1 pl.).

L'auteur cherche d'abord le potentiel d'une calotte sphérique chargée. Par le développement de ce potentiel suivant des fonctions sphériques, il obtient une expression plus simple que celle que M. Thomson a donnée pour la densité. En observant sa signification à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques ou de l'inversion il en donne une démonstration très simple, en partant du potentiel d'un plan circulaire chargé, etc.

Tandis que la première Partie du travail est consacrée à la détermination du potentiel, de la densité et de la capacité d'une calotte sphérique chargée, qui ne se trouve pas sous l'action de masses électriques influençantes, la seconde Partie contient l'évaluation du potentiel dans le cas d'une calotte sphérique en communication avec le sol, sous l'influence d'un point électrique.

Lorentz (*H.-A*). — Sur l'influence du mouvement de la Terre sur les phénomènes lumineux. (297-372, avec figures) (2).

Tome III; 1887.

Schoute (*P.-H.*). — Sur un rapport plus intime entre angle et cercle de Brocard. (39-62, 1 pl.).

L'auteur démontre que le cercle de Brocard est le lieu du point dont le triangle pédal a un angle de Brocard égal à l'angle de Brocard du triangle donné, que la droite de Lemoine est le lieu du point dont le triangle pédal a un angle de Brocard égal au signe près à l'angle de Brocard du triangle donné, etc.

---

(1) *Voir* plus haut, p. 34.
(2) *Voir* plus haut, p. 35.

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. XXX. Jan Jansz. Stampioen le jeune et Jacob à Waessenaer. (69-112). Annotations. (113-119).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Communication par rapport à la vérification nouvelle d'un système de poids destiné à l'étalonnage à Batavia, etc. (141-262, 1 planche).

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur l'influence de la distribution de la masse à la longueur du pendule. (328-359, avec figures).

L'auteur cherche le centre d'oscillation de plaques circulaires, munies de trous circulaires, triangulaires ou quadrangulaires, etc.

Schouten (*G.*). — Règle générale pour déterminer la forme de la trajectoire et la durée du mouvement central. (373-425).

Après avoir transformé les équations du mouvement central, l'auteur remarque que la vitesse radiaire décroît ou accroît quand la distance r du centre augmente, à mesure que l'expression $c^2 - Fr^3$ est négative ou positive. Ainsi il distingue quatre cas différents. Le premier cas s'occupe de forces répulsives. Dans les trois autres cas la force est attractive; mais dans le premier de ces trois cas Fr^3 ne varie pas, dans le second Fr^3 augmente et dans le troisième Fr^3 diminue quand r augmente. Dans tous ces cas, l'auteur étudie la trajectoire et les conditions sous lesquelles les formes différentes se présentent.

Ensuite l'auteur s'occupe du cas plus général d'un champ de force où la force change de caractère d'une partie à l'autre. Il examine si la trajectoire s'étend à l'infini ou au centre, il étudie la forme de la branche qui mène à l'infini ou au centre et décide dans quel cas le temps nécessaire à atteindre ces limites est infini. Parmi les branches qui s'étendent à l'infini, il distingue des branches hyperboliques qui possèdent une asymptote centrale ou acentrale, des branches paraboliques sans asymptote, mais à direction déterminée de la tangente et des branches spiriformes à un nombre infini de spires, etc.

Enfin l'auteur applique la théorie aux cas particuliers $F = \mu + \nu r^{-3}$, $F = \mu + \nu r^{-5}$, $F = \mu + \nu r$, $F = \mu r + \nu r^{-3}$.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (1).

Tome XIV; 1886.

Bioche. — Sur un Mémoire de Poisson. (13-18).

Suivant Poisson, il existe des surfaces où le plan tangent en un point est unique et où cependant les théorèmes d'Euler et de Monge sur la courbure des surfaces ne s'appliquent pas. En ces points singuliers la direction des lignes de courbure n'est pas indéterminée, comme aux ombilics, mais leur nombre est plus grand que deux. Telles sont les surfaces dont l'équation en coordonnées semi-polaires r, u, θ est

$$2r = u^2 \sin n\theta,$$

n étant un entier. Le rayon de courbure étant égal à $\frac{r}{\sin n\theta}$, on peut disposer de n, de manière à lui donner autant de maxima et de minima qu'on veut.

M. Bioche fait voir que, lorsque les points considérés par Poisson se rencontrent sur des surfaces algébriques, ces points ne sont pas simples, quoique les tangentes réelles puissent toutes être comprises dans un même plan. En outre, le nombre total des lignes de courbure n'est pas toujours, comme l'affirme Poisson, égal au nombre des maxima et minima du rayon de courbure : il peut arriver que le premier nombre soit supérieur au second.

Fouret. — Sur la recherche de deux courbes planes ou surfaces dont les points se correspondent chacun à chacun à la fois par homologie et par polaires réciproques. (18-20).

M. Fouret donne une solution géométrique de la question suivante, traitée analytiquement par M. d'Ocagne : Trouver dans un plan deux courbes (C) et (C') polaires réciproques par rapport à une conique (K) et telles que la droite joignant un point quelconque M de l'une d'elles au point M' de contact avec l'autre de la polaire de M par rapport à (K) passe par un point fixe.

Il étend cette question aux surfaces : Trouver deux surfaces (S) et (S') polaires réciproques par rapport à une quadrique (Q) et telles que la droite joignant un point M quelconque de la première au point M' de contact avec la seconde du plan polaire de M par rapport à (Q) passe par un point fixe.

D'Ocagne. — Sur une suite récurrente. (20-41).

Entre deux quantités données a et b en insérer un certain nombre d'autres x_1, x_2, ..., x_p, telles que, dans la suite ainsi obtenue, chaque terme soit égal à la somme des deux précédents.

Ce problème est résolu par M. d'Ocagne à l'aide des nombres de Fibonacci.

(1) Voir *Bulletin*, X, p. 133.

définis, comme on sait, par la relation

avec
$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2},$$
$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1;$$

la solution est donnée par la formule

$$\alpha_i = \frac{bu_i + a(-1)^i u_{p+1}}{u_{p+1}}.$$

L'auteur discute cette formule en supposant a et b positifs et recherche le nombre maximum de termes négatifs que peut renfermer la suite considérée. Si l'on désigne par $I\left(\frac{p}{2}\right)$ le plus grand nombre impair inférieur ou égal à la partie entière du quotient de p par 2, la suite aura son nombre maximum de termes négatifs si

$$\frac{u_{p-1\left(\frac{p}{2}\right)+1}}{u_{1\left(\frac{p}{2}\right)}} > \frac{b}{a},$$

et ce nombre sera

$$\frac{I\left(\frac{p}{2}\right)+1}{2}.$$

Ce cas se présente pour toute valeur de p si $\frac{b}{a} < 1,5$ et ne se présente jamais si $\frac{b}{a} > 6,854103\ldots$.

Opérant la sommation de la suite considérée, M. d'Ocagne trouve

$$S_p = \frac{6(u_{p+3} - 1) + a[u_p + (-1)^p]}{u_{p+1}}.$$

Il indique en terminant une propriété nouvelle des nombres de Fibonacci exprimée par la relation

$$u_p u_{p-1} = u_p^2 - u_{p-1}^2 + (-1)^p.$$

Tannery (*P.*). — Sur un problème de Fermat. (41-45).

Diophante ramène un de ses problèmes à la recherche de deux triangles rectangles en nombres (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), tels que

$$a_1 c_1 = 5 a_2 c_2.$$

Fermat en donne, sans explication, une solution particulière

$$a_1 = 4854366\,9109, \qquad b_1 = 3608377\,9309, \qquad c_1 = 3247227\,5280,$$
$$a_2 = 4263675\,2938, \qquad b_2 = 4199069\,5400, \qquad c_2 = 739420\,0038,$$

que M. Tannery propose de retrouver par des moyens rationnels, en donnant quelques indications destinées à faciliter cette recherche.

Dautheville. — Sur l'hypercycle et la théorie des cycles polaires. (45-67).

Méthode analytique permettant de retrouver d'une manière régulière les théorèmes énoncés par Laguerre dans les *Comptes rendus* de 1882.

Picquet. — Note sur le conoïde de Plücker. (68-76).

La surface réglée dont deux directrices A et B sont rectilignes, et dont la troisième C est une conique rencontrant la droite A en un point, est du troisième degré. Si l'on suppose que la droite B soit à l'infini et définisse une direction de plans horizontale, que la directrice A soit verticale, que la projection horizontale de la conique C soit un cercle, on a le *conoïde de Plücker*. Partant de cette définition, M. Picquet étudie géométriquement ce conoïde, principalement au point de vue de la construction du plan tangent et de la courbe d'ombre.

Poincaré. — Sur les déterminants d'ordre infini. (77-90).

M. Poincaré continue l'étude des systèmes d'équations linéaires d'ordre infini, commencée au *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII.

Le problème consiste, étant donnée une suite indéfinie de quantités a_1, a_2, ..., a_n, ..., à déterminer une suite indéfinie d'inconnues A_1, A_2, ..., A_n, .. de telle sorte que les séries

$$\Sigma A_n a_p^n \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty)$$

soient absolument convergentes et aient pour somme zéro.

Soit B_1, B_2, ..., B_n, ... une solution particulière. On obtient une solution assez générale en prenant

$$A_1 = h_1 B_1, \quad A_2 = h_2 B_2, \quad \ldots \quad A_n = h_n B_n,$$

où

$$h_n = \Sigma \lambda_p a_n^h \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty),$$

les indéterminées λ étant assujetties à la seule condition que la série

$$\Sigma \lambda_p \Sigma_i B_n a_p^n$$

soit absolument convergente.

En général, la résolution du système $\Sigma A_n a_p^n = 0$ est plutôt une question d'inégalité que d'égalité, en ce sens que ces équations en nombre infini peuvent être remplacées par des inégalités en nombre infini.

L'auteur examine ensuite la question des déterminants d'ordre infini. Soit

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & 1 & \ldots & a_n \\ \ldots & & \ldots & \\ a_1 & a_2 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Pour que Δ_n tende vers une limite lorsque n croît indéfiniment, il suffit que

la série

$$|a_{21}|+|a_{31}|+|a_{41}|+\ldots+|a_{m1}|+\ldots+|a_{12}|+|a_{32}|+\ldots+|a_{13}|+\ldots$$

soit convergente.

M. Poincaré s'appuie sur ces résultats pour montrer la légitimité de la méthode par laquelle M. Hill a intégré une équation différentielle qui se présente en Astronomie, en ramenant cette intégration à la résolution d'une infinité d'équations linéaires.

Pellet. — Sur l'équation du quatrième degré et les fonctions elliptiques. (90-93).

L'équation du quatrième degré à coefficients réels

$$x^4+6qx^2+4rx+s=0$$

peut se ramener à la forme bicarrée par une substitution linéaire

$$x=\alpha\frac{y+\delta}{y-\delta}+\beta,$$

où α, β, δ sont réels. Par suite, les intégrales elliptiques peuvent se ramener à la forme

$$\int\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{Ax^4+Bx^2+C}}.$$

Si la fonction rationnelle $F(x)$ est impaire, l'intégrale se ramène immédiatement à celle d'une fonction rationnelle. Dans le cas contraire, on effectuera la substitution

$$x=\sqrt[4]{\frac{C}{A}}\,\frac{y+\delta}{y-\delta},$$

qui conserve la forme paire du radical; et, si $F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}}\,\frac{y+\delta}{y-\delta}\right)$ est impair, l'intégrale se ramène à celle d'une fonction rationnelle; pour cela, il faut que l'on ait

$$F(x)=-F\left(\sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{1}{x}\right).$$

D'Ocagne. — Sur certaines suites de fractions irréductibles. (93-97).

Soit

$$(1)\qquad \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_m}{b_m},\ \ldots$$

une suite de fractions irréductibles croissantes telles que, pour toute valeur de m, on ait

$$b_m+\alpha a_m>N,$$

α étant un entier quelconque, N un entier positif. La propriété fondamentale d'une pareille suite est exprimée par la relation

$$\frac{a_m}{b_m} = \frac{a_{m-1} + a_{m+1}}{b_{m-1} + b_{m+1}},$$

démontrée par M. Halphen pour les suites de Farey. Cette relation donne, pour la loi des termes de la suite (1), les formules

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1,$$
$$b_1 = N - \alpha, \qquad b_2 = N - \alpha - 1,$$
$$a_m = \lambda a_{m-1} - a_{m-2}, \qquad \lambda = E\left(\frac{N + b_{m-2} + \alpha a_{m-2}}{b_{m-1} + \alpha a_{m-1}}\right),$$
$$b_m = \lambda b_{m-1} - b_{m-2},$$

$E(x)$ désignant la partie entière de x.

M. d'Ocagne indique diverses remarques qui simplifient notablement le calcul des termes successifs.

De Presle. — Au sujet de la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés de formes linéaires et indépendantes. (98-100).

Démonstration nouvelle de ce théorème : « Si une forme quadratique est décomposée en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, le déterminant principal du discriminant de la forme quadratique est en valeur absolue égal au carré du déterminant principal du système des coefficients des variables dans les formes linéaires composantes.

De Presle. — Détermination des nombres de Bernoulli. (100-103).

Cette détermination est ramenée au développement de $\operatorname{tang} x$ par les formules

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2\cot 2x,$$
$$\cot x = \frac{1}{x} - B_1\frac{2^2 x}{2!} + B_2\frac{2^4 x^3}{4!} - \ldots - (-1)^n B_n \frac{2^m x^{m-1}}{2n!} - \ldots.$$

Neu. — Nouvelle construction de la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution et de la tangente en un point quelconque de cette courbe. (103-106).

Lemoine. — Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des côtés d'un triangle. (107-128).

Weill. — Sur la racine carrée des nombres. (128-131).

Il s'agit de l'évaluation approchée de $\sqrt{n}$.

Soit a un nombre plus grand que $\sqrt{n}$. La substitution itérative

$$a_1 = \frac{a^2 + n}{2a}$$

donne une suite de nombres a_1, a_2, a_3, ... qui décroissent et tendent vers la limite $\sqrt{n}$. Soit α un nombre plus petit que $\sqrt{n}$. La substitution itérative

$$\alpha_1 = \frac{\alpha^3 + 3\alpha n}{3\alpha^2 + n}$$

donne une suite de nombres α_1, α_2, α_3, ... qui croissent et tendent vers $\sqrt{n}$. On obtient ainsi, si a et n sont entiers, des valeurs approchées de $\sqrt{n}$, les unes par excès, les autres par défaut, exprimées par le quotient de deux entiers.

On aura encore une suite de nombres tendant vers $\sqrt{n}$ par la substitution itérative

$$b_1 = \frac{n + ab}{a + b},$$

où a et b sont deux nombres positifs comprenant $\sqrt{n}$.

De Presle. — Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques. (131-135).

La méthode proposée par l'auteur est fondée sur les développements en séries d'exponentielles de D log sn z, D log cn z, D log dn z donnés par Jacobi.

Fouret. — Sur une généralisation du théorème de Kœnig concernant la force vive d'un système matériel. (142-146).

La somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point d'un système en mouvement par le carré de son déplacement est égale au produit de la masse totale multipliée par le carré de la projection du déplacement du centre de gravité sur une direction arbitraire, augmenté de la somme des produits obtenus en multipliant les masses des divers points par les carrés des déplacements qu'il faut leur imprimer pour les amener dans leur position finale après leur avoir fait subir, dans la direction déjà choisie, une translation commune égale à la projection du déplacement du centre de gravité.

Fouret. — Sur un mode de transformation des déterminants. (146-151).

La valeur d'un déterminant est multipliée par $-(n-2)2^{n-1}$ quand on transforme n lignes parallèles de ce déterminant en retranchant des éléments de chacune d'elles les éléments correspondants des $n-1$ autres.

Deruyts. — Sur la valeur du reste des formules d'approximation pour le calcul des intégrales définies. (151-156).

Soient $F(x)$ une fonction continue et différente de zéro entre a et b, $\varphi(x)$ une fonction régulière entre les mêmes limites et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n valeurs distinctes de x entre a et b. On connaît la formule d'interpolation

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = c_n \sum_1^n \frac{\varphi(\alpha_i)}{P_n'(\alpha_i)\,P_{n-1}(\alpha_i)} + R,$$

où c_n désigne un facteur numérique et P_n la $n^{ième}$ réduite dans le développement en fraction continue de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz.$$

L'auteur donne pour le reste R l'expression

$$R = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n!}\int_a^b f(x)\,P_n^2(x)\,dx, \qquad (a<\xi<b).$$

Dans le cas particulier $f(x)=1$, $a=-1$, $b=+1$ (formule de Gauss), on trouve

$$R = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n!}\,\frac{2}{2n+1}\left[\frac{n!}{(2n-1)\ldots}\right]^2, \qquad (-1<\xi<1),$$

résultat déjà obtenu par M. Mansion.

De Presle. — Multiplication de deux déterminants de même degré. (157-158).

Weill. — Question de probabilité. (158-159).

Probabilité pour que, sur k événements également probables, un événement désigné se produise au moins deux fois de suite dans l'ensemble de p épreuves consécutives.

Cette probabilité $\Lambda(p)$ est déterminée par la relation récurrente

$$\Lambda(p) = \frac{k-1}{k}\Lambda(p-1) + \frac{k-1}{k^2}\Lambda(p-2) + \frac{1}{k^2}.$$

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Tome I: 1887.

Picard E. — Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations. (A. 15 [illegible].

(1) Chaque Mémoire est désigné par une lettre et comporte habituellement une pagination spéciale; toutefois plusieurs Mémoires d'un même auteur peuvent être affectés d'une même lettre; la pagination se continue alors à travers les Mémoires. Dans le premier cas, nous faisons suivre la lettre qui désigne le Mémoire par le nombre qui désigne la dernière page dans le Mémoire; dans le second cas, nous plaçons les nombres de la première et de la dernière page du Mémoire.

L'auteur signale une nouvelle et bien importante analogie des équations différentielles linéaires et des équations algébriques : il étend aux premières la théorie des groupes de Galois.

Soit

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire à coefficients rationnels et à intégrales régulières. Désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales, et considérons l'expression

$$V = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + \ldots + A_{1m}y_m + A_{21}\frac{dy_1}{dx} + \cdots + A_{2m}\frac{dy_m}{dx} + \cdots + A_{mm}\frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}},$$

où les m^2 lettres A désignent des fonctions rationnelles quelconques de x; cette fonction satisfait à l'équation différentielle d'ordre m^2

$$\frac{d^{m^2}V}{dx^{m^2}} + P_1\frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}} + \cdots + P_{m^2}V = 0. \tag{2}$$

On a d'ailleurs, comme on le voit sans peine en différentiant V un nombre de fois égal à $m^2 - 1$,

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1 V + \alpha_2\frac{dV}{dx} + \cdots + \alpha_{m^2-1}\frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},\\
y_2 &= \beta_1 V + \beta_2\frac{dV}{dx} + \cdots + \beta_{m^2-1}\frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
y_m &= \lambda_1 V + \lambda_2\frac{dV}{dx} + \cdots + \lambda_{m^2-1}\frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},
\end{aligned}$$

où les α, β, ..., λ sont des fonctions rationnelles de x.

A toute intégrale V de l'équation (2) correspond ainsi un système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$; ce système sera fondamental si V ne satisfait pas à une certaine équation différentielle

$$\Phi\left(V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^k V}{dx^k}\right) = 0, \tag{3}$$

que l'on obtiendra en écrivant que le déterminant de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ est nul; k sera au plus égal à $m^2 - 1$.

Ceci posé, il existera, en désignant par f une fonction rationnelle, une équation différentielle d'ordre p

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0, \tag{4}$$

qui n'admettra aucune solution commune avec une équation différentielle d'ordre moindre, dont toutes les solutions vérifieront l'équation (2), qui, enfin, n'admettra, avec l'équation (3), aucune solution commune : alors, à chaque solution de l'équation (4) correspond un système fondamental d'intégrales pour l'équation linéaire proposée.

Soient donc $y_1, y_2, \ldots, y_m$ le système fondamental correspondant à une certaine solution V de l'équation $f = 0$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ le système correspondant à une solution quelconque V de la même équation, on aura

$$(S)\quad \begin{cases} Y_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m, \\ Y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mm}y_m; \end{cases}$$

les coefficients a dépendent seulement de p paramètres arbitraires et M. Picard établit en outre qu'on peut les considérer comme des fonctions algébriques de ces p paramètres, que l'on désignera par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Deux systèmes de valeurs des paramètres λ fournissent deux substitutions telles que (S), et le produit de ces substitutions sera nécessairement une substitution de même forme, les paramètres λ étant remplacés par un troisième système de valeurs. Les substitutions S forment donc un groupe, et, en adoptant la terminologie de M. Sophus Lie (1), elles constituent un groupe continu et algébrique de transformations; ce groupe (G) est ce que M. Picard nomme *le groupe de transformations relatif à l'équation linéaire* (1). Ce groupe ne doit évidemment pas être confondu avec ce que l'on appelle habituellement *le groupe de l'équation linéaire* : il comprend ce dernier groupe. Voici maintenant en quoi consiste la proposition, concernant ce groupe, qui correspond au théorème fondamental de Galois :

Toute fonction rationnelle de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ainsi que de leurs dérivées, qui s'exprime rationnellement en fonction de x, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les substitutions du groupe G.

Réciproquement, toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de leurs dérivées qui reste invariable par les substitutions du groupe G est une fonction uniforme de x.

Après avoir établi ces résultats, M. Picard donne d'importantes indications sur la recherche directe des groupes algébriques de transformations linéaires; cette recherche s'appuie sur les théorèmes généraux que l'on doit à M. Sophus Lie : elle est menée jusqu'au bout pour deux paramètres, et, dans un cas particulier très étendu, pour un nombre quelconque de paramètres.

Appell. — Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. (B. 5).

Considérons un fil flexible et inextensible entièrement libre, dont l'élément de longueur ds est sollicité par la force $F\,ds$, ayant pour projection sur trois axes rectangulaires

$$X\,ds, \quad Y\,ds, \quad Z\,ds,$$

et supposons qu'il y ait une fonction des forces U, telle que l'on ait

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

(1) *Theorie der Transformationsgruppen* (*Math. Ann.*, t. XVI).

la tension T sera donnée par la formule

$$T = U + h,$$

où h est une constante; soit

$$\Theta(x, y, z; \alpha, \beta, h)$$

une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2 = (U + h)^2;$$

α, β doivent être deux constantes arbitraires distinctes de h et de la constante que l'on peut toujours ajouter à Θ. Les intégrales des équations d'équilibre seront

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \alpha', \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \beta', \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial h} = s + h',$$

α', β', h' étant de nouvelles constantes et s désignant l'arc de la courbe d'équilibre comptée positivement dans un sens convenable.

Goursat. — Sur un problème relatif aux courbes à double courbure. (C. 16).

Lorsque l'on cherche à déterminer une telle courbe, en se donnant les deux rayons de courbure R, T en fonction de l'arc s, on est conduit à un système de trois équations linéaires simultanées du premier ordre

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{T},$$

pour déterminer les cosinus α, α', α'' des angles que font la tangente, la normale principale et la binormale avec un axe fixe. Ce système, si l'on pose

$$i = \sqrt{-1}, \qquad u = \alpha + \alpha'' i, \qquad V = \frac{1}{R} + \frac{i}{T},$$

et si l'on désigne en général la quantité conjuguée d'une variable imaginaire en affectant de l'indice zéro la lettre qui représente cette variable, peut être remplacé par l'équation du troisième ordre

$$(1) \qquad \frac{d^3u}{ds^3} - 3\frac{V'}{V}\frac{d^2u}{ds^2} + \left[3\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + VV_0 - \frac{V''}{V}\right]\frac{du}{ds} + \frac{VV_0' - V_0V'}{2}u = 0,$$

où V', V'' sont les dérivées première et seconde de V par rapport à s; de même V_0' est la dérivée de V_0. Si l'on suppose que α, α', α'' sont les cosinus des angles avec l'axe des x, que l'on désigne par β, β', β''; γ, γ', γ'' les quantités analogues pour les axes des y et des z, que l'on pose enfin

$$v = \beta + \beta' i, \qquad w = \gamma + \gamma' i,$$

il est clair que v, w devront vérifier l'équation (1); la relation évidente

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

montre que l'intégration de cette équation se ramène à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre sans second membre (LAGUERRE, *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 216); M. Darboux a d'ailleurs donné, au commence-

ment de ses Leçons de Géométrie, une proposition plus générale. M. Goursat montre que, en effet, l'intégration de l'équation (1) se ramène à l'intégration de l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{V'}{V}\frac{dY}{ds} - \frac{1}{4}VV_0Y.$$

Si Y, Z sont deux intégrales distinctes de cette équation,

$$u = YZ, \qquad v = \frac{1}{2}(Y^2 - Z^2), \qquad w = \frac{1}{2}(Y^2 + Z^2)$$

seront trois intégrales distinctes de l'équation (1), qui vérifient la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

M. Goursat montre comment on peut en déduire les neuf cosinus, et parvient à la règle définitive que voici :

Soit Y une intégrale particulière de l'équation (2), telle que

$$\frac{1}{V_0Y}\frac{dY_0}{ds}$$

ne se réduise pas à une constante : on posera

$$Z = -\frac{2}{V_0}\frac{dY_0}{ds},$$

et l'on multipliera les intégrales Y et Z par un facteur positif, de façon à avoir

$$YY_0 - ZZ_0 = 2.$$

Cela posé, les neuf cosinus directeurs seront donnés par les formules suivantes

$$\alpha = R\left[\frac{1}{V_0}Y\frac{dY_0}{ds}\right],$$

$$\beta = \frac{1}{2}R\left[\frac{1}{V_0}Y\frac{dY_0}{ds} - \frac{1}{V_0}Z\frac{dY_0}{ds}\right],$$

$$\gamma = \frac{1}{2}R\left[\frac{1}{V_0}Y\frac{dY_0}{ds} + \frac{1}{V_0}Z\frac{dY_0}{ds}\right],$$

$$\alpha = R\frac{YY_0 - ZZ_0}{2},$$

$$\beta = R\frac{ZY_0 - YZ_0}{2},$$

$$\gamma = R\frac{YZ_0 - ZY_0}{2},$$

$$\alpha = R\frac{\frac{1}{V_0}Y\frac{dY_0}{ds}}{\frac{1}{V_0}Y}$$

$$\beta = \frac{1}{2}R\frac{\frac{1}{V_0}Y\frac{dY_0}{ds}}{\frac{1}{V_0}Y}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}R\frac{\frac{1}{V_0}Y\frac{dY_0}{ds}}{\frac{1}{V_0}Y}$$

dans toutes ces formules, le symbole R veut dire qu'on doit prendre la partie réelle de la quantité entre crochets.

Si l'on désigne par θ une constante réelle quelconque, l'équation (2) ne change pas quand on remplace V par $Ve^{i\theta}$ et V_0 par $V_0 e^{-i\theta}$; il en résulte que l'intégration de l'équation (2) doit fournir, outre la courbe cherchée, les courbes dont la courbure et la torsion sont données par les formules suivantes

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos\theta}{R} - \frac{\sin\theta}{T}, \qquad \frac{1}{T_1} = \frac{\sin\theta}{R} + \frac{\cos\theta}{T}.$$

M. Goursat étudie les relations entre toutes ces courbes.

Remarquant ensuite que, en faisant dans l'équation (2) le changement de variable $s = \varphi(\sigma)$, où $\varphi(\sigma)$ désigne une fonction réelle de la variable réelle σ, on retombe sur une équation de même forme, l'auteur en conclut la proposition suivante : Étant donnée une courbe gauche C, pour laquelle les rayons de courbure et de torsion sont des fonctions connues de l'arc

$$R = \varpi(s), \qquad T = \varpi_1(s),$$

on peut en déduire par des quadratures une nouvelle courbe gauche C_1, telle que les rayons de courbure et de torsion s'expriment en fonction de l'arc σ de cette courbe par les formules

$$R_1 = \varpi[\varphi(\sigma)]\frac{1}{\varphi'(\sigma)}, \qquad T_1 = \varpi_1[\varphi(\sigma)]\frac{1}{\varphi'(\sigma)}.$$

L'équation (2) s'intègre quand V est de la forme

$$V = A\frac{d\varphi}{ds}e^{i\varphi(s)},$$

où A est une constante et $\varphi(s)$ une onction réelle de s; on est ainsi conduit à des courbes jouissant de propriétés géométriques intéressantes.

M. Goursat traite ensuite du problème suivant :

« Déterminer une courbe sphérique connaissant le rayon de courbure en fonction de l'arc. »

Ce problème avait déjà été étudié par M. Hoppe (*Journal de Crelle*, t. 60, p. 182).

Il termine enfin en indiquant deux autres méthodes pour ramener l'intégration de l'équation (1) à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre.

Sabatier. — Spectres d'absorption des chromates alcalins et de l'acide chromique. (D. 11).

Kœnigs (*G.*). — Sur la forme des courbes à torsion constante. (E. 8).

Les recherches de l'auteur s'appuient sur le mode suivant de transformation d'un contour C formé de courbes analytiques ou d'un nombre fini d'arcs de courbes analytiques, et sur lequel on a fixé un sens de parcours déterminé, en sorte que chaque arc infiniment petit de ce contour puisse être assimilé à un

segment rectiligne entièrement déterminé : soit O un point de l'espace; un contour Γ, dont les points correspondent aux points du contour C, de façon que chaque élément infiniment petit de Γ, considéré comme un segment rectiligne, soit équipollent au moment par rapport au point O de l'élément correspondant du contour C, sera entièrement déterminé si l'on donne le point de Γ qui doit correspondre à un point particulier.

Désignons par K le cône ayant le point O pour sommet et la courbe C pour directrice; les génératrices de K sont parallèles aux binormales de Γ; la torsion de la courbe Γ en un point μ est inversement proportionnelle au carré de la distance du point correspondant *m* de C au centre O : de là résulte sans peine la transformation inverse de la courbe Γ en la courbe C.

La transformation précédente jouit de la propriété essentielle que voici :

Pour avoir l'aire de la projection sur un plan Π du contour formé par une portion *ab* de C et des vecteurs *oa*, *ob*, il suffit de prendre la demi-projection sur une perpendiculaire à Π de la corde αβ relative à la portion correspondante du contour Γ. Si le contour C est fermé, les points *a*, *b* coïncident, mais non, en général, les points α, β : M. Kœnigs donne au segment αβ le nom d'*axe du contour* C; si ce segment est nul, la projection du contour C sur un plan quelconque aura une aire nulle. Si αβ n'est pas nul, Γ sera périodique, et se reproduira par une transformation égale à αβ. Si αβ est nul, Γ sera un contour fermé. Si C est une courbe sphérique et qu'on prenne pour centre de transformation le centre O de la sphère, il résulte d'une propriété signalée plus haut que la courbe Γ est à torsion constante; inversement, toute courbe à torsion constante dérive d'une courbe C sphérique. Il n'y a que dans le cas où l'aire de la projection d'une telle courbe C sur un plan quelconque est nulle que la courbe Γ, à torsion constante, est fermée; autrement, elle est périodique. Si donc il existe une courbe algébrique à torsion constante, elle est fermée et elle dérive d'une courbe sphérique C à axe nul. M. Kœnigs donne un exemple d'une courbe sphérique algébrique C à axe nul qui conduit à une courbe à torsion constante pour laquelle les coordonnées s'expriment par des fonctions algébrico-logarithmiques d'un paramètre : c'est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre droit ayant pour base une lemniscate située entièrement dans l'intérieur d'un grand cercle de la sphère et tangente à ce grand cercle en son sommet.

Kœnigs (*G.*). — Note sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire. (E. 9-12).

Une courbe a un axe anharmonique s'il existe une droite jouissant de la propriété suivante : les points où cette droite est rencontrée par les quatre plans osculateurs à la courbe considérée, en quatre points quelconques ont le même rapport anharmonique que les plans menés par cette droite et les quatre plans. L'auteur a considéré les courbes dans un Mémoire sur l'espace réglé inséré au tome XI de la deuxième série des *Annales scientifiques de l'École Normale*, et il a donné, dans ce Mémoire, leur équation finie. Dans la Note que nous analysons, M. Kœnigs rattache ces résultats aux recherches de M. S. Lie sur les surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série appartiennent, par leurs tangentes, à un complexe linéaire. Il montre en effet qu'une courbe Γ qui admet un axe anharmonique Ξ est une ligne asymptotique de la surface réglée Σ lieu des droites qui joignent un point M de Γ au point P où le plan oscu-

lateur en M à Γ rencontre l'axe Ξ; que si une courbe Γ admet un axe anharmonique Ξ, ses tangentes font partie d'un complexe linéaire qui contient aussi l'axe Ξ; que, réciproquement, si Γ est une courbe dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, toute droite de ce complexe est un axe anharmonique de Γ. La recherche des courbes à axe anharmonique est donc identique à la recherche des courbes qui font partie, par leurs tangentes, d'un complexe linéaire. Enfin, la recherche des surfaces, dont les lignes asymptotiques d'une série appartiennent, par leurs tangentes, chacune à un complexe linéaire, problème traité par M. Lie, comprend comme cas particulier la recherche des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série ont un même axe anharmonique.

Kœnigs (*G.*). — Sur l'emploi de certaines formes quadratiques. (E. 13-43).

Le produit de la plus courte distance de deux droites par le sinus de leur angle est ce que l'on appelle *le moment de ces deux droites*. Si l'on considère l'ensemble des droites d'un complexe, leurs coordonnées dépendent de trois paramètres u_1, u_2, u_3 et le moment de deux droites infiniment voisines, ou moment élémentaire, sera une forme quadratique $M(du)$ des différentielles du_1, du_2, du_3.

M. Klein a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que les droites du complexe soient toutes tangentes à une surface était que le discriminant Δ de cette forme fût identiquement nul; M. Kœnigs ajoute ceci d'essentiel au résultat obtenu par M. Klein : pour qu'un complexe soit formé des sécantes d'une courbe, ou des tangentes à une surface développable, il faut et il suffit que l'un, au moins, des facteurs dans lesquels le moment élémentaire est décomposable admette un facteur d'intégrabilité.

C'est l'étude, fort intéressante en elle-même, des formes quadratiques ternaires de différentielles, à discriminant nul, qui conduit M. Kœnigs à cette conclusion.

Si le discriminant Δ d'une telle forme $M(du)$ est nul, c'est que cette forme est décomposable en deux facteurs linéaires ω, ω' : l'auteur donne la classification suivante : si ω, ω' admettent tous deux des facteurs intégrants, la forme $M(du)$ peut être ramenée au type

$$(\alpha) \qquad M(du) = g\,d\xi^2,$$

ou au type

$$(\beta) \qquad M(du) = g\,d\xi\,d\eta;$$

g, ξ, η sont des fonctions convenables des u. Supposons maintenant que ω' ne soit pas intégrable par multiplication; si ω est intégrable par multiplication, on a le type réduit

$$(\gamma) \qquad M(du) = g(\zeta\,d\xi - d\tau_1)\,d\xi;$$

g est une fonction des variables indépendantes ξ, τ_1, ζ; si ω n'est pas intégrable par multiplication, on a le type réduit

$$(\delta') \qquad M(du) = g(\tau\,d\xi - d\tau_1)(\zeta\,d\xi - d\tau_1);$$

g, τ sont des fonctions convenables des variables indépendantes ξ, η, ζ; de plus, τ dépend effectivement de ζ : c'est la relation

$$F(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0,$$

laquelle contient nécessairement ζ et τ, qui joue alors un rôle essentiel. Un cas particulièrement intéressant est celui où cette relation est de la forme

$$L\tau\zeta + M(\tau + \zeta) + N = 0,$$

où L, M, N dépendent de ξ, η; M. Kœnigs dit alors que la forme est *linéo-involutive :* dans ce cas, on parvient à un type réduit plus simple, savoir

$$(\varepsilon) \qquad M(du) = g(\zeta^2 d\xi^2 - d\eta^2);$$

g est une fonction quelconque de ξ, η, ζ. Les types β et γ doivent être regardés comme des types limites des formes linéo-involutives.

Appliquant ces résultats à l'étude du moment élémentaire d'un complexe singulier, pour lequel le discriminant Δ de la forme $M(du)$, qui représente ce moment élémentaire, est identiquement nul, M. Kœnigs montre que cette forme est en général une forme linéo-involutive et que la réduction au type normal

$$g(\zeta^2 d\xi^2 - d\eta^2)$$

coïncide avec la détermination des lignes asymptotiques de la surface enveloppe des droites du complexe.

Les tangentes à ces lignes sont représentées dans le complexe par les équations

$$\eta = \text{const.}, \qquad \zeta = 0,$$

$$\xi = \text{const.}, \qquad \frac{1}{\zeta} = 0,$$

respectivement pour les deux séries. Dans le cas où la surface enveloppe des droites du complexe est développable, on a affaire au type limite

$$g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi,$$

et l'équation $\xi = \text{const.}$ représente toutes les droites situées dans l'un des plans tangents, tandis que l'équation

$$\zeta\, d\xi - d\eta = 0$$

représente le système des développables dont les arêtes sont des courbes tracées sur la surface. Comme le fait prévoir le principe de dualité, c'est au même type limite que correspond le cas où les droites du complexe sont les sécantes d'une courbe; mais, dans ce cas, l'équation $\xi = \text{const.}$ convient à toutes les droites issues d'un point situé sur la courbe; en sorte que c'est seulement l'interprétation de cette équation qui permet de distinguer les deux cas.

Enfin, si le complexe est formé des droites qui rencontrent une droite fixe, le moment élémentaire se ramène au type $g\, d\xi\, d\eta$.

Comme première application, M. Kœnigs retrouve les résultats de M. Klein concernant la détermination des lignes asymptotiques de la surface de Kummer.

En voici une autre, dont l'importance ne saurait échapper au lecteur : comme M. Kœnigs l'a montré dans son Mémoire déjà cité sur les propriétés infinité-

simales de l'espace réglé, il existe toujours un système de coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4 de la droite qui fait prendre au moment élémentaire la forme

$$G(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2).$$

Si donc on sait exprimer u_1, u_2, u_3, u_4, A, B en fonction de trois variables indépendantes ξ, η, ζ, de façon que l'on ait identiquement

$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2 = A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2,$$

la droite u_1, u_2, u_3, u_4, dont les coordonnées dépendent de trois paramètres, décrira un complexe; ce complexe sera singulier, et l'on saura, par ce qui précède, trouver les lignes asymptotiques de la surface enveloppe. L'identité précédente peut aussi bien s'écrire

$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 = d\zeta^2 + A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2,$$

en faisant $\zeta = iu_4$ et en regardant u_1, u_2, u_4 comme des coordonnées rectangulaires; sous cette forme, on voit de suite que les surfaces $\zeta = \text{const.}$, $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ constituent un système de surfaces parallèles avec leurs deux systèmes de normalies développables, en sorte qu'une double interprétation de l'identité ci-dessus conduit à la belle relation que M. S. Lie a découverte entre les lignes asymptotiques et les lignes de courbure.

La transformation de contact par laquelle M. Lie est parvenue à ce résultat suffirait à étendre aux complexes de sphères les résultats précédemment établis pour les complexes de droites. M. Kœnigs traite d'ailleurs directement des complexes de sphère. C'est alors la forme

$$F = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2,$$

où X, Y, Z sont les coordonnées du centre et H le rayon, qui joue le rôle essentiel; cette forme devient ternaire dans le cas d'un complexe de sphères.

Dans un complexe singulier de sphères tangentes à une surface quelconque ou à une courbe quelconque, la forme quadratique fondamentale appartient au type général linéo-involutif (ε). Si l'enveloppe est une surface de Monge (surface imaginaire à lignes de courbure coïncidentes), et seulement dans ce cas, la forme appartient au type linéo-involutif limite (γ); enfin, quand l'enveloppe est une sphère, et seulement dans ce cas, la forme appartient au type (β), c'est-à-dire que les deux facteurs sont intégrables par multiplication.

Nous devons signaler encore, dans le travail de M. Kœnigs, le résultat suivant dont il a eu à se servir, et qui a été laissé de côté, afin de ne pas interrompre la suite des idées.

L'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad V_1\frac{\partial\rho}{\partial u_1} + V_2\frac{\partial\rho}{\partial u_2} + \cdots + V_n\frac{\partial\rho}{\partial u_n} = A\rho^2 + B\rho + C,$$

où $V_1, \ldots, V_n$, A, B, C sont des fonctions données des n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, jouit de la propriété suivante.

Le rapport anharmonique de quatre solutions de cette équation est une solution de l'équation sans second membre

$$V_1\frac{\partial\rho}{\partial u_1} + V_2\frac{\partial\rho}{\partial u_2} + \cdots + V_n\frac{\partial\rho}{\partial u_n} = 0.$$

C'est une généralisation d'un théorème bien connu, relatif à l'équation de Riccati, et qui fait connaître sous quelle forme la fonction arbitraire figure dans la solution générale de l'équation (1).

Garbe. — Recherches expérimentales sur le rayonnement. (F. 91).

Sabatier. — Partage d'une base entre deux sels. (G. 40).

Andoyer. — Contribution à la théorie des orbites intermédiaires. (M. 72).

Brillouin (*M.*). — Questions d'Hydrodynamique. (1-80) (1).

Cet important travail, à la fois théorique, critique et bibliographique, contiendra l'exposition des principaux progrès accomplis dans l'étude de mouvement des liquides, à partir des recherches de M. von Helmholtz. Les travaux de Kirchhoff, de MM. Rayleigh, J. Thomson et de sir W. Thomson y sont analysés. Ce qui a paru comprend deux Chapitres; nous énumérons rapidement les matières traitées :

CHAP. I. — *Tourbillons dans les fluides parfaits.* Propriétés analytiques. Équations de Green, de Stokes. Transformation de Stokes-Helmholtz, de Clebsch. Lignes tourbillons; tubes tourbillons. Surfaces de discontinuité. Cas de l'espace infini. Cas d'un espace limité simple. Examen de diverses hypothèses relatives aux parois. Équations du mouvement d'un corps continu. Théorème d'Helmholtz sur les anneaux tourbillons. Tubes tourbillons qui aboutissent à une surface de discontinuité. Exceptions dues aux forces extérieures. Problèmes particuliers. Vibrations des tourbillons. Choc de deux anneaux. Anneaux noués. Production expérimentale des tourbillons. Expériences diverses relatives aux gaz et aux liquides. Hypothèse des atomes-tourbillons (sir W. Thomson). Théorie cinétique des gaz.

CHAP. II. — *Écoulement des liquides. Jets.* — Difficultés relatives à l'hypothèse de l'absence de tout frottement. Cas où la solution analytique ne peut correspondre à la réalité. Expériences. Exposition et critique des exemples de mouvements permanents plans donnés par M. Kirchhoff. Instabilité des jets; flammes sensibles; flammes chantantes. Discussion de l'hypothèse d'Helmholtz. Nécessité de tenir compte du frottement. Les équations différentielles du mouvement d'un liquide parfait suffisent à rendre compte des mouvements qui se produisent pendant un temps fini dans un liquide à frottement très faible; mais elles sont absolument insuffisantes pour rendre compte du passage d'un état initial quelconque, et en particulier du repos, à un état permanent, quelque faible que soit le frottement.

---

(1) Les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* comportent des travaux de bibliographie : la pagination est spéciale.

Bibliographie. — Liste d'environ deux cents Mémoires sur l'Hydrodynamique, parus entre 1858 et 1885. J. T.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CII; 1886 (1).

Laguerre. — Sur le potentiel de deux ellipsoïdes. (17-22).

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre du second ellipsoïde par rapport à des axes rectangulaires passant par le centre du premier. Les équations des deux surfaces étant

$$\psi(x, y, z) = 1,$$
$$\psi_0(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = 1,$$

désignons par $f(\lambda^2)$ et $f_0(\lambda^2)$ les densités des couches dont les surfaces extérieures ont pour équations

$$\psi(x, y, z) = \lambda^2,$$
$$\psi_0(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = \lambda^2,$$

et posons

$$\int_{t^2}^{1} f(\lambda)\, d\lambda = F(t),$$

$$\int_{t_0^2}^{1} f_0(\lambda)\, d\lambda = F_0(t_0).$$

Soient Ω et Ω_0 les discriminants des deux formes quadratiques $\psi(x, y, z)$ et $\psi_0(x, y, z)$, Δ et Δ_0 les valeurs que prennent les formes adjointes quand on y remplace respectivement les variables par

$$\frac{t\cos\varphi}{\sqrt{\Omega}}, \quad \frac{t\sin\varphi}{\sqrt{\Omega}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Omega}}$$

et par

$$\frac{t\cos\varphi}{\sqrt{\Omega_0}}, \quad \frac{t\sin\varphi}{\sqrt{\Omega_0}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Omega_0}}.$$

Le potentiel P des deux ellipsoïdes s'exprime alors par la formule

$$P = \frac{9VV_0}{32\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{F(t)\,F_0(t_0)\,dt\,dt_0\,d\varphi}{t\xi\cos\varphi + t\eta\sin\varphi + \zeta - t\sqrt{\Delta} - t_0\sqrt{\Delta_0}},$$

où V et V_0 sont les volumes des deux corps.

La méthode par laquelle M. Laguerre parvient à ce résultat consiste essen-

(1) Voir *Bulletin*, t. XI$_2$, p. 199.

tiellement à décomposer les ellipsoïdes en tranches comprises entre des plans infiniment voisins et parallèles au plan imaginaire

$$ix\cos\varphi + iy\sin\varphi + z = 0.$$

Sylvester. — Note sur les invariants différentiels. (31-34).

Dans une Lettre à M. Hermite insérée en partie dans les *Comptes rendus*, M. Sylvester avait dit que les invariants différentiels de M. Halphen étaient identiques à ses réciprocants purs. Il limite actuellement cette assertion et montre que ces invariants sont identiques avec la classe particulière des *réciprocants purs projectifs*.

M. Sylvester fait suivre sa propre démonstration de celle que lui a communiquée M. Halphen.

Si l'on fait le changement de variables

$$X = \frac{1}{x}, \qquad Y = \frac{y}{x},$$

et que l'on pose

$$\frac{d^n Y}{dX^n} = n!\,A_n, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = n!\,a_n,$$

on a

$$A_n = (-1)^n x^{2n-1}\left[a_n + (n-2)\frac{a_{n-1}}{x} + \lambda\frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots\right].$$

Soit maintenant une fonction $f(A_0, A_1, \dots, A_n)$ dont tous les termes soient de même poids p et de même degré δ; en supposant $\frac{1}{x}$ infiniment petit, on aura

$$f(A_0, A_1, \dots, A_n) = (-1)^p x^{2p-\delta}\left\{f(a_0, a_1, \dots, a_n) + \frac{1}{x}\left[-a_0\frac{\partial f}{\partial a_1} + a_2\frac{\partial f}{\partial a_3} + \dots + (n-2)a_{n-1}\frac{\partial f}{\partial a_n}\right] + \dots\right\}.$$

Pour que f soit invariant pour la substitution considérée, il faut que

$$a_2\frac{\partial f}{\partial a_3} + 2a_3\frac{\partial f}{\partial a_4} + \dots + (n-2)a_{n-1}\frac{\partial f}{\partial a_n} = a_0\frac{\partial f}{\partial a_1}.$$

En particulier, si f ne contient pas a_1, ce qui est le cas des réciprocants purs, on aura

$$a_2\frac{\partial f}{\partial a_3} + 2a_3\frac{\partial f}{\partial a_4} + \dots + (n-2)a_{n-1}\frac{\partial f}{\partial a_n} = 0,$$

équation qui définit les réciprocants projectifs.

Poincaré. — Sur la transformation des fonctions fuchsiennes et la réduction des intégrales abéliennes. (41-44).

Soient x et y deux variables liées par une relation algébrique de genre p: si l'on pose

$$x = f(x', y'), \qquad y = f_1(x', y').$$

f et f_1 étant rationnels, on obtiendra entre x' et y' une relation algébrique dont le genre q sera généralement supérieur à p. Les fonctions abéliennes de rang q engendrées par la courbe en x', y' peuvent donc se réduire à des fonctions de rang p, en même temps que se réduit le genre de la courbe.

En général, x', y' sont des fonctions non uniformes de x, y; mais ces fonctions peuvent être inramifiées, c'est-à-dire que, x et y décrivant des contours fermés infiniment petits, x' et y' reprennent la même valeur. Dans ce cas, si $p = 1$, on doit avoir aussi $q = 1$, en sorte que la réduction au genre 1 par des fonctions inramifiées est impossible.

Pour p quelconque, M. Poincaré a montré antérieurement que, quand il y a réduction, on peut, par une transformation d'ordre k, changer la fonction Θ à réduire en un produit de fonctions Θ d'un nombre moindre de variables. L'entier k est alors le nombre caractéristique de la réduction.

Ce théorème fournit une classification très simple des cas de réduction, mais qui ne permet pas de distinguer des autres les cas où la réduction des fonctions abéliennes est accompagnée de celle du genre de la courbe. On évite cet inconvénient en prenant pour point de départ d'une classification des cas de réduction la théorie de la transformation des fonctions fuchsiennes. Étant donné un groupe fuchsien, on peut chercher les sous-groupes fuchsiens qui y sont contenus : cette recherche est l'analogue de la transformation des fonctions elliptiques. M. Poincaré en donne divers exemples.

Sylvester. — Sur les réciprocants purs irréductibles du quatrième ordre. (152-153).

Poincaré. — Sur les résidus des intégrales doubles. (202-204).

Soit

$$F(\xi, \eta) = P + iQ$$

une fonction de deux variables complexes

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it.$$

Le contour d'intégration de $F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ étant défini par les quatre équations

$$x = \varphi_1(u, v),$$
$$y = \varphi_2(u, v),$$
$$z = \varphi_3(u, v),$$
$$t = \varphi_4(u, v),$$

où u et v sont réels, on considère trois fonctions entières de x, y, z, t qu'on prend pour coordonnées d'un point M de l'espace, et l'on fait varier u et v; si, quelles que soient ces fonctions entières, le point M décrit une surface fermée, on dira que le contour d'intégration est fermé.

M. Poincaré étudie le cas où $F(\xi, \eta)$ est une fonction rationnelle mise sous la forme

$$F(\xi, \eta) = \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\psi(\xi, \eta)\, \theta(\xi, \eta)},$$

et cherche les périodes de l'intégrale double

$$\iint F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int\int \Big[(P+iQ)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + (iP-Q)\frac{\partial(x,t)}{\partial(u,v)} + (iP-Q)\frac{\partial(u,z)}{\partial(u,v)} - (P+iQ)\frac{\partial(y,t)}{\partial(u,v)}\Big]\,du\,dv,$$

c'est-à-dire les valeurs obtenues en intégrant le long d'un contour fermé. Ces périodes sont de trois sortes :

1° Les périodes de la première sorte sont égales à $2\pi i H$, H étant une période de première espèce de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\psi(\xi,\eta)\dfrac{d\theta}{d\eta}}\,d\xi,$$

relative à la courbe $\theta(\xi,\eta)=0$; de même pour la courbe $\psi(\xi,\eta)=0$.

2° Les périodes de la seconde sorte, relatives aux points d'intersection (ξ,η) des deux courbes ψ et θ; elles ont pour valeur

$$\pm 4\pi^2 \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\dfrac{d\psi}{d\xi}\dfrac{d\theta}{d\eta} - \dfrac{d\psi}{d\eta}\dfrac{d\theta}{d\xi}}.$$

3° Les périodes de la troisième sorte, relatives aux points doubles (ξ,η) de la courbe θ; elles ont pour valeur

$$\pm 4\pi^2 \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\psi(\xi,\eta)\sqrt{\left(\dfrac{d^2\theta}{d\xi\,d\eta}\right)^2 - \dfrac{d^2\theta}{d\xi^2}\dfrac{d^2\theta}{d\eta^2}}}.$$

Goursat. — Sur la théorie des équations linéaires. (204-207).

L'auteur se propose de former toute équation linéaire ayant toutes ses intégrales régulières et possédant p points singuliers connus. Il ramène ce problème à la résolution de certaines équations en nombres entiers. Connaissant un système de solutions de ces équations, la détermination de l'équation linéaire correspondante n'exige que des calculs algébriques. Ces calculs, fort compliqués en général, se simplifient lorsque les racines de chaque groupe de l'équation déterminante fondamentale relative à chacun des points singuliers forment une progression arithmétique; tous les autres cas, d'ailleurs, pourraient se ramener à celui-là. Il existe deux types de cette espèce pour les équations du troisième ordre, six pour les équations du quatrième ordre.

Toutes ces équations jouissent d'une propriété importante : on peut, en général, par des calculs algébriques, déterminer les substitutions que subit un système fondamental d'intégrales convenablement choisi, quand on fait décrire à la variable un contour fermé quelconque; les coefficients de ces substitutions sont des fonctions algébriques des multiplicateurs des intégrales dans le domaine des points critiques et ne dépendant pas de ces points critiques.

Resal. — Sur la vrille et le pieu à vis. (233-237).

La forme d'une vrille est celle d'un conoïde droit dont la directrice rectiligne est l'axe de la tige et dont la directrice curviligne est tracée sur un cône de révolution autour de cet axe. M. Resal envisage le cas où la directrice curviligne est une loxodromie.

Soient O le sommet des deux cônes qui limitent le filet; γ_0, γ_1, ($\gamma_0 < \gamma_1$) les demi-angles au sommet; i l'angle constant que fait la directrice curviligne du filet tracé sur le cône intérieur avec la génératrice de ce cône; z', z'' les limites de z pour une portion déterminée de l'aire du conoïde; Q l'effort longitudinal exercé suivant l'axe Oz; M le moment du couple normal à l'axe qui doit s'opposer au glissement; f le coefficient de frottement de la matière pénétrée. La condition d'équilibre de la vrille est

$$\frac{M}{Q} = \frac{2}{9}\,\frac{3\cot i \sin\gamma_0(\operatorname{tang}\gamma_1+\operatorname{tang}\gamma_0)-2f(\operatorname{tang}^2\gamma_1+\operatorname{tang}\gamma_1\operatorname{tang}\gamma_0+\operatorname{tang}^2\gamma_0)}{\operatorname{tang}\gamma_1+\operatorname{tang}\gamma_0+2f\cot i\sin\gamma_0}\,\frac{z''^3+z''z'+z'^3}{z''+z'}.$$

Pour que la vrille ne puisse pas s'enfoncer sous la charge Q, sans effort extérieur rotatif, il faut que $M < 0$ ou que

$$f > \frac{3}{2}\cot i \sin\gamma_0\,\frac{\operatorname{tang}\gamma_1+\operatorname{tang}\gamma_0}{\operatorname{tang}^2\gamma_1+\operatorname{tang}\gamma_1\operatorname{tang}\gamma_0+\operatorname{tang}^2\gamma_0}.$$

Picard. — Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. (250-253).

Étant donnée une surface, reconnaître si elle possède des intégrales de seconde espèce autres que des fonctions rationnelles (cas général); trouver le nombre minimum de ces intégrales pour lesquelles aucune combinaison linéaire ne soit égale à une fonction rationnelle des coordonnées.

Pour exposer plus commodément la solution qu'il donne de ce problème, M. Picard prend l'équation de la surface sous la forme particulière

$$z^2 = f(x, y).$$

Il montre que toute intégrale de différentielle totale de seconde espèce peut, après soustraction d'une fonction rationnelle convenable, se mettre sous la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où

$$P = a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2},$$
$$Q = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1},$$

les a et b étant des fonctions rationnelles de y. La condition d'intégrabilité

$$P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x} = 2f(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

fournit $2m-1$ relations qui permettent d'exprimer $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ à l'aide des a et de leurs dérivées premières, et $a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}$ au moyen de a_0 et de ses dérivées. Quant à a_0, il satisfera à une équation linéaire d'ordre $m-1$ dont les coefficients seront des polynômes en y. Si l'on trouve r intégrales ra-

tionnelles, on en déduit des valeurs correspondantes pour a et b, et l'on a alors r intégrales *distinctes* de seconde espèce.

En terminant, l'auteur présente quelques remarques sur les périodes des intégrales doubles de la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z(x, y, z)},$$

où Q est un polynôme de degré $m - 4$ tel que la surface $Q(x, y, z) = 0$ passe par les courbes doubles de $f(x, y, z) = 0$. Cette intégrale ne présente pas de ces périodes polaires étudiées récemment par M. Poincaré; les périodes de ces intégrales sont cycliques, c'est-à-dire dépendent des valeurs initiales x_0, y_0, z_0 au début du cycle.

Mannheim. — Théorie géométrique de l'hyperboloïde articulé. (253-256).

Soient Ox, Oy, Oz les axes d'un parallélépipède rectangle et, sur les faces de ce prisme parallèles à Oz, les diagonales P, Q, R, S qui forment un quadrilatère gauche.

Si l'on construit ce quadrilatère au moyen de tiges articulées, on peut le déformer de manière que les côtés opposés P, R rencontrent constamment Oy à angle droit et restent à des distances égales de O.

Ce quadrilatère gauche détermine l'hyperboloïde H à une nappe qui a pour sommets les milieux de ces côtés et dont l'axe non transverse est égal à la hauteur du prisme.

L'étude de ce quadrilatère conduit M. Mannheim à une théorie très simple de l'hyperboloïde H dont les génératrices, supposées construites au moyen de tiges articulées à leurs points de rencontre, permettent la déformation.

Entre autres résultats, l'auteur retrouve le théorème de M. Greenhill : l'hyperboloïde H peut se déformer en conservant son centre et ses axes (en direction); il se transforme successivement en hyperboloïdes homofocaux; ses points décrivent des trajectoires orthogonales à tous ces hyperboloïdes.

Et il obtient cette proposition nouvelle : les plans principaux de H déterminent sur une génératrice arbitraire de cette surface des segments qui restent de grandeur invariable pendant la déformation.

Brioschi. — Sur quelques formules hyperelliptiques. (239-242 et 297-298).

Soient y, z, w trois fonctions hyperelliptiques à deux variables u_1, u_2, toutes trois paires, ou deux impaires et la troisième paire; y_1, z_1, w_1 leurs dérivées par rapport à u_1; y_2, z_2, w_2 leurs dérivées par rapport à u_2. Entre ces six dérivées, M. Brioschi trouve six relations remarquables :

$$\begin{aligned}
wz_1 - zw_1 &= a_1 y_1 + a_2 y_2, & wz_2 - zw_2 &= -a_0 y_1 - a_1 y_2,\\
yw_1 - wy_1 &= b_1 z_1 + b_2 z_2, & yw_2 - wy_2 &= -b_0 z_1 - b_1 z_2,\\
zy_1 - yz_1 &= c_1 w_1 + c_2 w_2, & zy_2 - yz_2 &= -c_0 w_1 - c_1 w_2,
\end{aligned}$$

où les constantes a, b, c sont des fonctions des modules assujetties aux con-

ditions

$$a_1^2 - a_0 a_2 = b_1^2 - b_0 b_2 = c_1^2 - c_0 c_2 = 1.$$

Au moyen de ces relations, il obtient des expressions très simples pour les carrés des dérivées y_1, y_3, ..., pour leurs produits deux à deux, pour leurs dérivées secondes, et par suite pour toutes les dérivées d'ordre pair. Les carrés et les produits deux à deux des dérivées premières des trois fonctions hyperelliptiques s'expriment par des polynômes du quatrième degré par rapport à ces fonctions, et les dérivées partielles d'ordre $2n$ sont exprimables par des polynômes de degré $2n+1$.

Guyou. — Note sur un nouveau système de projection de la sphère. (308-310).

L'équateur, le premier méridien et le méridien de longitude 90° étant tracés sur la sphère, on prend sur le dernier quatre points F, F', F_1, F_1' à égales distances des pôles. Par un point quelconque M on fait passer les deux ellipses sphériques qui ont respectivement pour foyers F, F', et F, F_1; l'une est le parallèle elliptique, l'autre le méridien elliptique du point M. La latitude est la distance à l'équateur du point où le parallèle coupe le premier méridien; la longitude elliptique est la distance au premier méridien du point où le méridien elliptique coupe l'équateur.

En projection, le premier méridien et l'équateur seront représentés par deux droites rectangulaires; les méridiens et les parallèles elliptiques par des droites respectivement parallèles aux précédentes. Ce mode de projection est le seul qui permette la représentation conforme de la sphère sur une portion finie du plan sans déchirure ni duplicature : la figure présente, il est vrai, quatre points critiques. Si les deux foyers se réunissent au pôle correspondant, on est ramené à la projection de Mercator.

La Carte de M. Guyou se prête aisément à l'étude des fonctions doublement périodiques d'une variable complexe. Si l'on appelle φ l'affixe d'un point de cette Carte et u celle d'un point de la Carte de Mercator, on a la relation $\varphi = \operatorname{am} u$ qui permet de constater immédiatement les propriétés des fonctions elliptiques.

Mannheim. — Sur le théorème d'Ivory et sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces homofocales du second ordre. (311-313).

Autonne. — Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact. (313-316).

L'auteur envisage les substitutions birationnelles de contact où figurent deux séries de trois variables homogènes, x_i (coordonnées d'un point x du plan) et u_i (coordonnées d'une droite u du plan).

Soit

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_i & \xi_i(x^r, u^s) \\ u_i & v_i(x^r, u^s) \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

une pareille substitution, où ξ_i est un polynôme de dimension p en x_i et q en u_i, v_i un polynôme de dimension r en x_i et s en u_i. Cette substitution est linéaire si aucun des quatre entiers p, q, r, s ne dépasse l'unité. La substitution σ', σ, produit de σ' par σ, sera, par définition,

$$\sigma'\sigma = \begin{vmatrix} x_i & \xi'_i(\xi, v) \\ u_i & v'_i(\xi, v) \end{vmatrix}.$$

M. Autonne fait la théorie complète des substitutions linéaires de contact. Une telle substitution a l'une des deux formes

$$\begin{vmatrix} x_i & \sum_j a_{ij}x_j \\ u_i & \sum_j b_{ij}u_j \end{vmatrix} \text{ (forme monistique)}, \qquad \begin{vmatrix} x_i & \sum_j c_{ij}u_j \\ u_i & \sum_j d_{ij}x_j \end{vmatrix} \text{ (forme dualistique)}.$$

Picard. — Sur les périodes des intégrales doubles. (349-350).

Dans une Note antérieure, M. Picard a indiqué une première manière de définir les périodes des intégrales doubles des fonctions algébriques. Se plaçant à un autre point de vue, il envisage actuellement une surface algébrique dont il suppose, pour simplifier, les coordonnées exprimées par des fonctions hyperfuchsiennes de deux paramètres u et v.

Soit δ le domaine fondamental du groupe; ce domaine à quatre dimensions est limité par certains espaces à trois dimensions dont les points se correspondent deux à deux par les substitutions fondamentales du groupe et devront dans la suite être considérés comme confondus. C'est ainsi qu'un espace S à deux dimensions, contenu dans δ, est dit *fermé* quand les points où cet espace rencontre la limite de δ se correspondent deux à deux par une substitution du groupe.

Cela posé, l'intégrale double de première espèce

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{f_z}\, dx\, dy$$

devient

$$\iint G(u, v)\, du\, dv,$$

où $G(u, v)$ est uniforme et continu dans toute l'hypersphère à l'intérieur de laquelle sont définis x, y, z. Cette dernière intégrale, étendue à l'espace S, peut être appelée période de l'intégrale double.

Perrin. — Sur la théorie des réciprocants. (351-353).

L'auteur fait connaître quelques théorèmes généraux qui simplifient l'étude des formes que M. Sylvester appelle *réciprocants*. Un réciprocant d'ordre λ est défini par la relation identique

$$F(t, a, b, c, \ldots) = \pm t^{\lambda} F\left(\frac{1}{t}, \frac{-a}{t^2}, \frac{2a^2 - tb}{t^3}, \frac{-5a^3 + 5tab - t^2c}{t^4}, \ldots\right),$$

où

$$t, \quad 2a, \quad 2.3.b, \quad 2.3.4.c, \quad \ldots$$

désignent les dérivées

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \ldots,$$

et

$$\frac{1}{l},\quad \frac{-a}{l^2},\quad \frac{2a^2-lb}{l^3},\quad \ldots$$

les quantités qui leur correspondent quand on regarde x comme fonction de y.

Si R et R′ sont deux réciprocants quelconques (purs ou mixtes) de classes λ et λ', $\lambda' R\frac{dR}{dx}-\lambda R'\frac{dR'}{dx}$ sera un réciprocant de classe $\lambda+\lambda'+1$, et de caractère pair ou impair suivant que R et R′ sont ou non de même caractère. Ce théorème permet de déduire des réciprocants d'ordre j ceux d'ordre $j+1$, et notamment d'obtenir de proche en proche, en partant des deux protomorphes les plus simples

$$A_0=a,\qquad A_1=4ac-5b^2,$$

les protomorphes des divers ordres.

Après avoir énoncé d'autres théorèmes permettant de déduire de réciprocants donnés d'autres réciprocants, M. Perrin indique certaines propriétés des réciprocants complètement identiques à celles des sous-invariants et qui, par conséquent, appartiennent aux invariants différentiels :

1° Les dérivées successives d'un réciprocant prises par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé qui y figure sont encore des réciprocants de caractère alternativement pair ou impair;

2° Si, dans plusieurs réciprocants de même ordre, on remplace la dérivée de l'ordre le plus élevé par le rapport $\frac{\xi}{\eta}$ de deux variables homogènes et qu'on les considère comme des formes binaires indépendantes aux variables ξ, η, tout covariant, invariant ou sous-invariant de ce système de formes sera encore un réciprocant;

3° Tout réciprocant pur est déterminé et calculable quand on connaît son résidu, c'est-à-dire la partie du réciprocant qui ne contient pas la variable de l'ordre le plus élevé.

Mannheim. — Sur la polhodie et l'herpolhodie. (353-356).

Picard. — Sur le calcul des périodes des intégrales doubles. (410-412).

Dans l'intégrale

$$\iint\frac{Q(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

supposée de première espèce, on laisse d'abord x constant, et l'on prend, le long d'un cycle relatif à la relation algébrique entre y et z, $f(x,y,z)=0$, l'intégrale

$$\int\frac{Q(x,y,z)\,dy}{f'_z}=P(x).$$

Alors, dans le plan de la variable x, on prendra l'intégrale $\int P(x)\,dx$ le

long d'un contour fermé qui soit un *cycle* pour la période représentée par la fonction multiforme $P(x)$. L'intégrale ainsi obtenue est une période de l'intégrale double.

La fonction $P(x)$ satisfait à une équation différentielle linéaire dont les points singuliers correspondent aux valeurs de x pour lesquelles l'équation résultant de l'élimination de z entre $f = 0$ et $f'_z = 0$ a deux ou plusieurs racines égales : on voit dès lors comment les périodes des intégrales doubles peuvent être ramenées à des intégrales simples.

M. Picard effectue les calculs dans le cas où les coordonnées x, y, z d'un point de la surface s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres aux quatre couples de périodes

$$\begin{matrix} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4, \\ \omega'_1, & \omega'_2, & \omega'_3, & \omega'_4. \end{matrix}$$

Les périodes de l'intégrale double sont les six quantités

$$\omega_i \omega'_k - \omega_k \omega'_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ces six périodes se réduisent d'ailleurs à cinq.

Mansion. — Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss. (413-415).

Soient $f(x)$ la fonction à interpoler; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines du polynôme X_n de Legendre; $G(x)$ le polynôme entier de degré $n-1$ qui, pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ prend les mêmes valeurs que $f(x)$. On aura

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{+1} G(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2 \frac{f^{2n}(\xi)}{1.2.3\ldots 2n},$$

ξ étant compris entre -1 et $+1$.

Fouret. — Sur une interprétation de l'équation différentielle $L\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) - M\frac{dy}{dx} + N = 0$, dans laquelle L, M, N désignent des fonctions homogènes, algébriques, entières et d'un même degré, de x et y. (415-418).

L'auteur a montré antérieurement que, si L, M, N sont du degré ν, il existe, outre l'origine O qui compte au degré de multiplicité ν, $\nu+1$ points $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est indéterminé. Les tangentes aux courbes du faisceau, aux divers points d'une droite quelconque OH passant par O, concourent en un même point I dont la position dépend uniquement de la direction de la droite.

Dans la présente Note, M. Fouret fait connaître une construction élégante du point I, qui consiste en ce que ce point est le centre harmonique par rapport à OH des points A_i affectés de coefficients convenables m_i.

La forme que M. Fouret donne à l'équation différentielle met en évidence

deux cas d'intégrabilité : celui où les coefficients m_i sont des nombres entiers, et celui où les points A_i sont sur une même droite.

Gros. — Sur le coefficient de contraction des solides élastiques. (418-421).

Clebsch est parvenu, pour le coefficient de contraction transversale des corps isotropes, à la limite supérieure $\frac{1}{2}$, en admettant que l'extension d'un prisme élastique est toujours accompagnée d'une augmentation de volume. On obtient la même limite en partant de ce fait que, sous des pressions normales aux bases, les arêtes d'un parallélépipède rectangle diminuent de longueur.

Léauté. — Calcul des régulateurs. Marche rationnelle à suivre en pratique pour l'établissement d'un appareil de régulation à action directe. (498-501).

Mannheim. — Sur l'hyperboloïde articulé et l'application de ses propriétés à la démonstration du théorème de M. de Sparre. (501-504).

Callandreau. — Simplifications qui se présentent dans le calcul numérique des perturbations pour certaines valeurs de l'argument. (598-601).

Au premier ordre d'approximation, le calcul des perturbations se réduit à des quadratures. On pose habituellement

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + \sigma,$$

Δ désignant la distance du corps troublant au corps troublé et Δ_0 la partie principale Δ. Les intégrales qu'on aurait à considérer si l'on ne développait pas $\frac{1}{\Delta_0^5}$ en série trigonométrique d'argument variable avec le temps, savoir

$$\int \frac{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\xi \, d\xi}{\Delta_0^5}$$

(où $\Delta_0^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\xi$ et où n est un nombre incommensurable) peuvent s'obtenir, comme le remarque M. Callandreau, d'une manière relativement facile lorsque les limites sont 0 et $2q\pi$ ou 0 et $(2q-1)\pi$.

De là résulte qu'on aura les valeurs des éléments de l'orbite troublée pour une série de valeurs de l'argument en progression arithmétique; on aura en même temps les valeurs des constantes introduites par les intégrations, ce qui permettra de calculer les éléments moyens de l'orbite.

Lipschitz. — Sur la théorie des diversités. (602-604).

Soit une diversité de m variables dont chacune est comprise entre des limites

fixes égales et de signes contraires. Le domaine de la diversité définie du $m^{ième}$ ordre est limité par un ensemble de diversités d'ordres inférieurs. Si l'on désigne par ε_i le nombre des diversités de l'ordre i, on a les deux formules

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{m-1} = 3^m$$

et

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \ldots + (-1)^{m-1}\varepsilon_{m-1} = 0 \quad \text{ou} \quad 2,$$

suivant que m est pair ou impair.

Pour les valeurs $m = 1, 2, 3$, ces deux formules ont des interprétations géométriques très simples. Ainsi, pour $m = 3$, la diversité est représentée par un parallélépipède où $\varepsilon_0 = 8$ est le nombre des angles, $\varepsilon_1 = 12$ celui des arêtes, $\varepsilon_2 = 6$ celui des faces; et la seconde formule, qui se réduit à

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2,$$

est l'expression du théorème d'Euler.

Godefroy. — Construction des tangentes aux courbes planes et détermination du point où une droite mobile touche son enveloppe. (604-606).

Un segment variable se meut dans le plan, de façon que ses extrémités A et B décrivent des courbes fixes a et b. Il varie en grandeur et direction comme les rayons vecteurs d'une certaine courbe R. Les tangentes en A et B se coupent en un point O par lequel on mène une parallèle à la tangente correspondante à la courbe R. Cette parallèle est coupée par le segment mobile en un point N.

Or ce point N et le point de contact du segment avec son enveloppe sont équidistants du milieu du segment AB.

Ce théorème, qu'on démontre en partant de la formule de Newton, se prête à la construction des tangentes et à la détermination du point où une droite touche son enveloppe.

Resal. — Sur la flexion des prismes. (658-664 et 719-722).

Painlevé. — Sur le développement en séries de polynômes d'une fonction holomorphe dans une aire quelconque. (672-675).

Soit $F(x)$ une fonction holomorphe dans une aire S limitée par un contour convexe S; on a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{F(z)}{z-x}\,dz.$$

Si a est le centre d'un cercle tangent au contour en s et comprenant S, on a

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots,$$

par suite

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_S \frac{F(z)(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x);$$

c'est-à-dire qu'une fonction holomorphe dans l'aire S peut se développer dans cette aire en une série de polynômes.

On montre de même qu'une fonction $V(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, régulière dans un volume convexe et continue sur la surface, ainsi que ses dérivées premières, est développable en série de polynômes $P_n(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta P_n = 0$.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques ternaires indéfinies. (735-737).

Une forme quadratique ternaire indéfinie peut s'écrire

$$F(x, y, z) = Y^2 - XZ,$$

où

$$X = ax + by + cz, \qquad Y = a'x + b'y + c'z, \qquad Z = a''x + b''y + c''z,$$

a, b, c étant réels. Si l'on désigne par α, β, γ, δ quatre nombres réels de déterminant 1 et que l'on pose

$$\begin{aligned} X' &= \alpha^2 X + 2\alpha\gamma Y + \gamma^2 Z = ax' + by' + cz', \\ Y' &= \alpha\beta X + (\alpha\delta + \beta\gamma) Y + \gamma\delta Z = a'x' + b'y' + c'z', \\ Z' &= \beta^2 X + 2\beta\delta Y + \delta^2 Z = a''x' + b''y' + c''z', \end{aligned}$$

on aura

$$Y'^2 - X'Z' = Y^2 - XZ;$$

la substitution linéaire S qui change x, y, z en x', y', z' n'altère pas la forme F.

Si les coefficients de F sont entiers, les substitutions semblables (à coefficients entiers) forment un groupe discontinu G. Si à la substitution S on fait correspondre la substitution

$$\left| z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right|,$$

au groupe G correspondra un groupe g qui sera un groupe fuchsien, et l'on pourra appliquer à l'étude de G les connaissances acquises sur les groupes fuchsiens. Par exemple, dans un cycle formé par les sommets du polygone générateur, la somme des angles sera nécessairement égale à 2π (s'il n'y en a qu'un), ou bien à π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ ou 0 suivant que F peut être transformée par une substitution de déterminant convenable (1, 2 ou 3) en l'une des formes

$$\begin{aligned} &a''z^2 + ax^2 + 2b''xy + a'y^2, \\ &a''z^2 + ax^2 + a'yz, \\ &a''z^2 + 2b''(xy - x^2 - y^2), \end{aligned}$$

ou que F peut représenter 0.

M. Poincaré cherche les fonctions fuchsiennes $f(z)$ telles qu'il existe une relation algébrique entre $f(z)$ et $f(z, T)$, T désignant une substitution linéaire qui n'appartient pas au groupe g de $f(z)$ (propriété analogue à celle de l'addition des fonctions elliptiques). Cette propriété appartient, entre autres, aux

fonctions fuchsiennes engendrées par un groupe g correspondant au groupe G des substitutions semblables d'une forme F.

Petot. — Sur une extension du théorème de Pascal aux surfaces du troisième ordre. (737-740).

Propriété de trois droites non concourantes A, B, C et de huit points D, E, 1, 2, ..., 5, 6 appartenant à une même surface du troisième ordre :

Si, prenant deux points P et Q sur les intersections du plan CE avec les plans AE et BE, puis menant par le point D deux droites quelconques α et β, on fait correspondre à tout point M de l'espace la droite ω intersection de deux plans menés respectivement par les points fixes P et Q, par les traces des droites fixes DQ, PQ sur les plans BM, AM et par celles des droites fixes α et β sur le plan CM, les six droites correspondant aux derniers points de la surface appartiennent à un même complexe du premier ordre.

Pratiquement, ce théorème a, pour la construction des surfaces du troisième ordre, les mêmes conséquences que celui de Pascal pour la construction des coniques.

De Sparre. — Sur la détermination du genre d'une fonction holomorphe dans quelques cas particuliers. (741-743).

Une fonction holomorphe dont les zéros ont pour modules a_1, a_2, ... est dite de genre ω lorsque la série

$$\frac{1}{a_1^{\omega+1}} + \frac{1}{a_2^{\omega+1}} + \dots$$

est convergente (Laguerre).

Cette condition sera remplie si

$$\lim a_n^{\omega-1}(a_{n-1} - a_n)$$

est un nombre fini différent de zéro.

Si, joignant les zéros voisins, on peut former un réseau de triangles recouvrant tout le plan et que, pour n suffisamment grand, les triangles compris entre les cercles de rayons a_n et a_{n+p} puissent être regardés comme ayant des surfaces égales ($S_n = S_{n+p}$), si $\lim a_n^{\omega-2} S_n$ est finie et différente de zéro, alors la fonction est du genre zéro.

Bordiga. — La surface du sixième ordre avec six droites. (743-745).

L'espace fondamental étant l'espace R_6 à six dimensions, soient trois formes du deuxième degré rapportées collinéairement les unes aux autres, sans être perspectives. Trois espaces correspondants à quatre dimensions quelconques se coupant en général en un point, les points d'intersection des espaces correspondants forment une double infinité, c'est-à-dire une surface F_2^6 à deux dimensions de l'espace fondamental.

La surface F_2^6 est du sixième ordre, c'est-à-dire qu'un espace à cinq dimen-

sions la coupe généralement suivant une courbe du sixième ordre, et une surface à quatre dimensions suivant six points.

Entre autres propriétés de la surface F_2^6, l'auteur établit celle-ci : elle contient six droites, toutes situées dans l'espace à cinq dimensions déterminé par les rayons principaux.

Léauté. — Sur le pieu à vis. (746-749).

Équation d'équilibre du pieu lorsque la vis est formée d'un conoïde droit à pas constant, c'est-à-dire d'une surface hélicoïdale.

Boussinesq. — Observations relatives à une Note de M. Resal sur la flexion des prismes. (797-799).

Resal. — Réponse à M. Boussinesq. (799).

Stieltjes. — Sur le nombre des pôles à la surface d'un corps magnétique. (805).

Lorsque la surface du corps magnétique est $2k+1$ fois connexe, le nombre des pôles neutres diminué du nombre des autres pôles est égal à $2k-2$; d'où résulte que le nombre des pôles neutres est au moins égal à $2k$.

Petot. — Construction de la courbe gauche du sixième ordre et du premier genre. Transformation de la surface du troisième ordre sur un plan. (805-808).

Mathiessen. — Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. (857-858).

Réclamation de priorité à propos des recherches récentes de M. Poincaré.

Hugoniot. — Sur un théorème général relatif à la propagation du mouvement. (858-860).

Poincaré. — Sur la réduction des intégrales abéliennes. (915-916).

Simplification nouvelle du Tableau des périodes des intégrales abéliennes réductibles à un genre inférieur, dans le cas le plus général.

D'Ocagne. — Théorème sur les formes binaires. (916-917).

Si dans l'expression de la $p^{ième}$ dérivée du logarithme d'une fonction quelconque a d'une variable indépendante, on remplace les accents de dérivation par des indices correspondants, de façon que

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ \ldots$$

soient remplacés par

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

l'expression ainsi formée pour toutes les valeurs de p, depuis 2 jusqu'à n, est un sous-invariant de la forme binaire

$$a_0x^n + \frac{n}{1}a_1x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}y^2 + \ldots.$$

Poincaré. — Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. (970-972).

Réponse à la réclamation de priorité de M. Mathiessen.

Hess. — Sur l'herpolhodie. (1304-1305 et 1366-1368).

On sait que l'herpolhodie de Poinsot ne peut avoir de points d'inflexion (ni de rebroussement). Cette proposition, énoncée par M. de Sparre en 1884, a été publiée dès 1880 par M. Hess, qui avait traité la question des points d'inflexion pour toutes les quadriques.

Sylvester. — Sur une extension du théorème relatif au nombre d'invariants asyzygétiques d'un type donné à une classe de formes analogues. (1430-1435).

Appell. — Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions vérifiant l'équation du potentiel $DF = 0$. (1439-1442).

L'auteur donne sans démonstration les développements trigonométriques de certaines fonctions périodiques de trois variables réelles admettant une infinité de pôles distribués régulièrement dans l'espace.

Voici le plus simple de ses résultats. Si l'on pose

$$r_m = \sqrt{(x - 2m\alpha)^2 + y^2 + r^2}, \qquad \rho_m = \sqrt{4m^2\alpha^2},$$

la fonction définie par la série

$$\sum_{-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{\rho_m}\right) + \frac{1}{r_0} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{r_m} - \frac{1}{\rho_m}\right)$$

a pour expression en tous les points de l'espace non situés sur l'axe des x

$$\frac{1}{\alpha}\log\frac{4\alpha}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{C}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\cos\frac{\nu\pi x}{\alpha}\varphi\left(\frac{\nu\pi\sqrt{y^2+z^2}}{\alpha}\right),$$

C désignant la constante d'Euler et $\varphi(\varepsilon)$ l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\frac{dt}{t}.$$

Bordiga. — Nouveaux groupes de surfaces à deux dimensions dans les espaces à n dimensions. (1442-1446).

L'espace fondamental étant l'espace R_{2m+1} à $2m+1$ dimensions, soient d'abord m formes du deuxième degré $S^{(\lambda)}_{2m-2}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, m)$ et une autre forme du même degré σ_{m-2}. Si l'on fait correspondre projectivement chaque espace Σ_{2m-1} des premières formes à un espace K_{2m}, les éléments correspondants des formes se rencontrent en un point; par suite, le point d'intersection des éléments correspondants engendre une surface F_2 à deux dimensions située dans R_{m+1}. Cette surface est unicursale, de l'ordre $\frac{m(m+3)}{2}$, et contient $\frac{m(m+1)}{2}+1$ droites.

L'auteur indique la génération et les propriétés d'un second groupe de surfaces ordinaires situées dans R_{2m+1} et retrouve comme cas particulier $(m=2)$ la surface du septième ordre de M. Cremona qui contient neuf droites et trente-six coniques.

Un troisième groupe de surfaces ordinaires est situé dans l'espace à $2m$ dimensions. Les formes du deuxième degré qui engendrent ces surfaces sont σ^1_{2m-3}, σ^2_{2m-3} et $S^{(\lambda)}_{2m-3}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, m-1)$. Les éléments des premières formes seront les espaces K_{2m-1} et ceux des autres formes seront les espaces Σ_{2m-2}. Les surfaces de ce groupe seront de l'ordre $\frac{m(m+3)}{2}-1$ et contiendront $\frac{m(m+1)}{2}+2$ droites.

Darboux. — Sur la théorie des surfaces minima. (1513-1519).

Déterminer toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique donnée. Ce problème, grâce aux travaux de M. Lie, peut être résolu quand la développable est un cône et aussi dans le cas où, cette développable étant quelconque, on connaît déjà une surface minima inscrite. M. Darboux a traité la question dans toute sa généralité et en fait connaître deux solutions.

La première est purement analytique; la discussion d'un cas où elle semble en défaut conduit au théorème de M. Henneberg sur les cylindres circonscrits aux surfaces minima algébriques.

M. Darboux remarque ensuite que le problème sera résolu si l'on trouve deux courbes algébriques (C), (C_0), l'une (C) tracée sur la développable donnée (Δ), l'autre (C_0) située dans l'espace, satisfaisant aux conditions suivantes : les éléments correspondants des deux courbes seront à la fois égaux et perpendiculaires; de plus, si M et M_0 sont les points correspondants de ces deux courbes, le plan tangent en M à la développable (Δ) devra être parallèle à la tangente en M_0 à (C_0). Ce principe conduit à l'expression des coordonnées des deux courbes (C), (C_0) et à une construction géométrique simple de ces

courbes. De cette construction générale on peut déduire toutes celles qui sont relatives à des cas particuliers et qui ont été indiquées par M. Lie. L'auteur conclut de ses formules cette élégante proposition :

Étant donnée une courbe algébrique (R) d'arc s et de torsion τ, si l'on porte sur les tangentes à cette courbe à partir du point de contact une longueur égale à $\tau \frac{d\tau}{ds}$, on obtiendra une courbe suivant laquelle une surface minima algébrique sera circonscrite à la développable formée par les tangentes de (R).

Sylvester. — Sur une extension du théorème de Clebsch relatif aux courbes du quatrième degré. (1532-1534).

Clebsch a montré que le premier membre de l'équation d'une courbe du quatrième degré n'est pas en général exprimable par la somme des quatrièmes puissances de cinq fonctions linéaires des variables. M. Sylvester établit une proposition générale dont le théorème de Clebsch n'est qu'un cas particulier. Il en déduit, entre autres conséquences, que le premier membre de l'équation d'une surface du quatrième ordre, qui ne contient que trente-cinq constantes, ne peut en général être exprimé par la somme des quatrièmes puissances de neuf fonctions linéaires des variables, quoique cette somme contienne trente-six constantes disponibles.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (1).

2e semestre, 1884.

Kronecker. — Sur la troisième démonstration, donnée par Gauss, de la loi de réciprocité des restes quadratiques. (645-647).

Soient a une quantité réelle quelconque et n un nombre impair quelconque. Désignons par

$$[a]$$

le nombre *entier* immédiatement inférieur ou égal à la quantité a; par

$$\mathrm{R}(a)$$

le reste obtenu en retranchant de la quantité a le nombre entier le plus proche (inférieur ou supérieur à la quantité a); enfin par le symbole *sgn* placé devant une quantité quelconque, le *signe* de cette quantité.

On aura alors

$$\operatorname{sgn}\mathrm{R}(a) = (-1)^{[a]} = (-1)^{[n-a]},$$

et cette formule, qu'il est facile de vérifier, correspond entièrement aux remarques III, IV et V de l'article 4 du Mémoire de Gauss : *Theorematis arithmetici demonstratio nova* (*Œuvres*, t. II, p. 5).

Ceci posé, soit α_0 une quantité réelle quelconque comprise entre o et $\frac{1}{2}$. Suivant que $2\alpha_0$ sera plus petit ou plus grand que $\frac{1}{2}$, nous poserons $\alpha = 2\alpha_0$ ou $\alpha = 1 - 2\alpha_0$, de sorte que α sera toujours compris entre o et $\frac{1}{2}$. On voit alors que

$$(-1)^{[n\alpha]} = \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{k}{n} - \alpha\right).$$

D'ailleurs, la première égalité donne pour $\alpha = n\alpha_0$,

$$\operatorname{sgn} R(n\alpha_0) = (-1)^{[n\alpha]}.$$

On a donc la relation

$$\operatorname{sgn} R(n\alpha_0) = \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{k}{n} - \alpha\right),$$

de laquelle on peut déduire bien facilement, comme le montre M. Kronecker, que le symbole de Legendre $\left(\frac{m}{n}\right)$, où m désigne un nombre premier impair, est égal au signe du double produit

$$\prod_{h=1}^{\frac{m-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{k}{n} - \frac{h}{m}\right),$$

d'où résulte immédiatement la loi de réciprocité.

La démonstration de M. Kronecker, tout en conservant le caractère de la troisième démonstration de Gauss, remplace ainsi avantageusement, en les simplifiant, les développements contenus dans les nos 6 à 9 de l'article 4, ainsi que dans les articles 5 à 7 du Mémoire de Gauss.

Lipschitz. — Remarque concernant le Mémoire : « Recherches sur la détermination de surfaces dont l'élément linéaire est donné ». (649-650).

Dans le Mémoire cité, M. Lipschitz avait, entre autres théorèmes, énoncé le suivant :

Si deux systèmes de variables réelles

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n$$

et

$$\xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \ldots, \quad \xi'_n$$

vérifient les équations

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1,$$
$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \ldots + \xi_n'^2 = 1,$$
$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \ldots + d\xi_n^2 = d\xi_1'^2 + d\xi_2'^2 + \ldots + d\xi_n'^2,$$

les variables $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ *sont nécessairement des fonctions linéaires et homogènes, à coefficients constants, des variables* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

M. Lipschitz explique ici comment on peut ramener la démonstration de ce théorème à celle de cet autre théorème qui lui se trouve démontré dans son Mémoire et qui, dans le cas particulier où $n = 3$, a été donné pour la première fois par Liouville (*Journal de Liouville*, t. 15, p. 103) :

Lorsqu'un système de fonctions réelles $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ des variables indépendantes réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifie l'équation différentielle

$$dx'^2_1 + dx'^2_2 + \ldots + dx'^2_n = dx^2_1 + dx^2_2 + \ldots + dx^2_n,$$

on a nécessairement, en désignant, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, par a_k et $c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kn}$ des constantes, les n relations

$$a_k + x'_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \ldots + c_{kn}x_n,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Clausius. — Sur les équations de la Mécanique servant à éclaircir le second théorème fondamental de la théorie mécanique de la chaleur. (663-670).

Ce Mémoire sera analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

Fuchs. — Sur les équations différentielles dont les intégrales ont des points de ramification fixes. (699-710).

Soit

$$F(z, y, y') = 0$$

une équation différentielle du premier ordre; F désigne une fonction rationnelle entière de la variable y et de sa première dérivée $y' = \frac{dy}{dz}$, dont les coefficients sont des fonctions quelconques de la variable indépendante z; on suppose que l'on ne puisse décomposer F en facteurs qui soient fonctions rationnelles entières de y et y' de degrés inférieurs à celui de F par rapport à y'. En ordonnant F par rapport aux puissances de y', nous écrirons la même équation différentielle de la manière suivante :

$$y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \ldots + \psi_m = 0.$$

Nommons points de ramification d'une intégrale de cette équation différentielle les valeurs de la variable z pour lesquelles cette intégrale se ramifie.

Si l'on donne à la variable z une valeur quelconque z_0, si l'on choisit arbitrairement une quantité y_0 et si l'on fixe celle des valeurs de y', $y' = y'_0$ que l'on veut parmi les racines de l'équation $F(z_0, y_0, y') = 0$, il n'y a, d'après un théorème connu de Cauchy, qu'*une* seule intégrale de l'équation différentielle $F(z, y, y') = 0$ prenant pour $z = z_0$ la valeur $y = y_0$. C'est pourquoi, par analogie avec la Mécanique, nous nommerons les valeurs z_0, y_0, y'_0 *valeurs initiales* de l'intégrale y de l'équation différentielle $F(z, y, y') = 0$.

On sait que les points de ramification des intégrales des équations différen-

tielles *linéaires* sont *fixes*, c'est-à-dire ne varient pas d'une façon continue lorsque les valeurs initiales de ces intégrales varient d'une façon continue. Il y a, au contraire, un grand nombre d'équations différentielles, du premier ordre déjà, pour lesquelles un certain nombre de points de ramification de leurs intégrales varient d'une façon continue lorsque les valeurs initiales de ces intégrales varient d'une façon continue. Dès lors on peut se proposer de caractériser celles des équations différentielles du premier ordre qui, comme les équations différentielles linéaires, ont tous les points de ramification de leurs intégrales fixes.

M. Fuchs démontre que, pour qu'une équation différentielle du premier ordre appartienne au groupe que nous voulons caractériser, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ sont des fonctions rationnelles entières de y (dont les coefficients sont fonctions de z), telles que le degré de ψ_k par rapport à y ne dépasse pas $2k$.

2. Soit $\mathfrak{D}(z, y) = 0$ l'équation résultant de l'élimination de y' entre les deux équations $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$.

Si $y = \eta$ est une racine de l'équation $\mathfrak{D}(z, y) = 0$ pour laquelle la fonction algébrique y' définie par l'équation $F = 0$ se ramifie, η est une intégrale de l'équation différentielle $F = 0$. Dans la surface de Riemann représentant y' comme fonction algébrique de y, en tout point de ramification situé sur $y = \eta$, la valeur de y' est $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$.

3. A chaque groupe de α feuilles se ramifiant au point $y = \eta$, $y' = \zeta$ correspondent au moins $(\alpha - 1)$ racines $y = \eta$ de l'équation $F(z, y, \zeta) = 0$, où y est considérée comme l'inconnue.

M. Fuchs considère ensuite deux cas particuliers, celui où la fonction algébrique y' définie par l'équation $F = 0$ appartient à la classe (notation de Riemann) $p = 0$ et celui où elle appartient à la classe $p = 1$.

Ces cas particuliers se présentent, par exemple, lorsque l'on peut décomposer la fonction $\mathfrak{D}(z, y)$ en deux facteurs dont l'un $f(y)$ soit une fonction rationnelle de y à coefficients indépendants de z, et qu'alors l'équation $f(y) = 0$ donne seule des points de ramification $y = \eta$ de la fonction algébrique y' de y, tandis que le second facteur de $\mathfrak{D}(z, y)$ n'en donne pas, ou, pour parler plus exactement, ne donne que des points de ramification se compensant les uns les autres.

Le cas le plus simple est celui où tous les coefficients $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ sont déjà indépendants de z. Ce cas a été, comme l'on sait, examiné par Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahier XXXVIe, p. 212).

Dans ce Mémoire M. Fuchs s'est borné au cas des équations différentielles du premier ordre. Mais on voit que la marche suivie s'applique dans ses parties essentielles aux équations d'un ordre quelconque.

Helmholtz. — Sur la Statique des systèmes monocycliques. (Troisième Mémoire). (755-759).

Kundt. — Sur la rotation électromagnétique du plan de polarisation de la lumière par le fer, le cobalt et le nickel. (761-782).

Kohlrausch. — Conductibilité électrique de l'eau distillée dans le vide. (961-964).

Siemens. — Sur la théorie du magnétisme. (965-983).

Kronecker. — Sur les systèmes de périodes des fonctions de variables réelles. (1071-1080).

Soient

$$a_{1k},\quad a_{2k},\quad \ldots,\quad a_{pk} \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

un système de quantités réelles quelconques et n le plus grand nombre, tel que l'un au moins des déterminants d'ordre n formé avec les éléments de ce système soit différent de zéro, de sorte que l'on ait, par exemple,

$$|a_{ik}| \gtrless 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit alors

$$a'_{1k},\quad a'_{2k},\quad \ldots,\quad a'_{nk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

le système de quantités que M. Kronecker a nommé *réciproque* (¹) du système

$$a_{1k},\quad a_{2k},\quad \ldots,\quad a_{nk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

et posons, pour $g = 1, 2, \ldots, n$ et pour $h = 1, 2, \ldots, q$,

$$b_{gh} = a'_{g1}a_{1h} + a'_{g2}a_{2h} + \ldots + a'_{gn}a_{nh}.$$

Ceci posé, supposons qu'une fonction

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

des variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ soit univoque, uniformément convergente et que l'on ait, pour $k = 1, 2, \ldots, q$, les relations

$$(I) \qquad F(x_1 + a_{1k}, x_2 + a_{2k}, \ldots, x_p + a_{pk}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

et proposons-nous de déduire les conséquences de cette hypothèse.

A cet effet, introduisons p nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ liées aux p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ par les relations linéaires

$$\begin{aligned} x_g &= a_{g1}y_1 + a_{g2}y_2 + \ldots + a_{gn}y_n, \\ x_i &= y_i + a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n, \\ &(g = 1, 2, \ldots, n;\ i = n+1, n+2, \ldots, p). \end{aligned}$$

La fonction $F(x_1, \ldots, x_p)$ se transforme alors en une fonction

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_p),$$

(¹) Comparez *Bulletin*, 1887, 2ᵉ Partie, p. 102.

univoque et uniformément continue, des p variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et c'est elle que nous allons étudier.

On voit d'abord facilement que la fonction $\mathcal{G}(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ est périodique par rapport aux n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et l'on peut calculer les périodes. Il vient en effet, en désignant par

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_q$$

des nombres entiers quelconques,

$$(\text{II}) \quad \mathcal{G}\left(y_1+\sum_{k=1}^{q} w_k b_{1k}, \ldots, y_n+\sum_{k=1}^{q} w_k b_{nk}, y_{n+1}, \ldots, y_p\right) = \mathcal{G}(y_1, y_2, \ldots, y_p).$$

En prenant, par exemple, $w_{n+1}, w_{n+2}, \ldots, w_{q-1}$ égaux à zéro et en laissant le nombre entier w_q arbitraire de même que $w_1, w_2, \ldots, w_n$, on a ainsi la relation

$$(\text{III}) \quad \mathcal{G}(y_1+w_1+b_{1q}w_q, \ldots, y_n+w_n+b_{nq}w_q, y_{n+1}, \ldots, y_p) = \mathcal{G}(y_1, y_2, \ldots, y_p),$$

de laquelle nous ferons d'abord usage dans ce qui va suivre.

Supposons que, parmi les quantités $b_{1q}, b_{2q}, \ldots, b_{nq}$, il y en ait m

$$b_{1q}, \quad b_{2q}, \quad \ldots, \quad b_{mq},$$

qui puissent être représentées par des fonctions linéaires à coefficients rationnels des $(n-m)$ autres

$$b_{m+1,q}, \quad b_{m+2,q}, \quad \ldots, \quad b_{nq},$$

mais qu'il n'y ait aucune relation linéaire à coefficients rationnels entre ces dernières quantités. Nous restons dans le plus grand degré de généralité possible en supposant que le nombre m puisse prendre l'une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$. Si m est plus petit que n, soit, pour $h = 1, 2, \ldots, m$,

$$b_{hq} = r_{h0} + r_{h,m+1} b_{m+1,q} + \ldots + r_{hn} b_{nq},$$

les quantités r étant des nombres rationnels.

Introduisons maintenant m nouvelles variables $z_1, z_2, \ldots, z_m$ liées aux m variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par les relations linéaires

$$y_h = z_h + r_{h,m+1} y_{m+1} + \ldots + r_{h,n} y_n.$$

La fonction $\mathcal{G}(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ se transforme alors en une fonction univoque et continue, des variables $z_1, z_2, \ldots, z_m; y_{m+1}, \ldots, y_p$ que nous désignerons par

$$\mathrm{H}(z_1, \ldots, z_m; y_{m+1}, \ldots, y_p).$$

Cette fonction est périodique par rapport aux variables $z_1, \ldots, z_m; y_{m+1}, \ldots, y_n$; par rapport à la variable z_h $(h = 1, 2, \ldots, m)$ la période est le nombre rationnel

$$w_h + r_{h0} w_q - \sum_{k=m+1}^{n} r_{hk} w_k.$$

M. Kronecker démontre que cette fonction H ne change pas de valeur si l'on ajoute aux variables

$$y_{m+1},\ y_{m+2},\ \ldots,\ y_n$$

certaines quantités qui dépendent d'une façon simple de

$$b_{m+1,q},\ b_{m+2,q},\ \ldots,\ b_{nq},$$

sans rien ajouter ou retrancher aux autres variables

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m,\ y_{n+1},\ y_{n+2},\ \ldots,\ y_p.$$

Il en résulte que l'on peut substituer aux variables $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{n-1}$ d'autres variables $y'_{m+1}, y'_{m+2}, y'_{n-1}$ fonctions linéaires des précédentes et de y_n et telles que la fonction

$$\mathrm{H}'(z_1, z_2, \ldots, z_m; y'_{m+1}, \ldots, y'_{n-1}; y_n, \ldots, y_p),$$

dans laquelle se transforme alors H, *ne dépende plus de* y_n.

En continuant le même raisonnement, on montre que, par une suite de substitutions linéaires ne concernant que les variables y dont l'indice est plus grand que m et plus petit que n, on peut transformer la fonction H' en une fonction K ne dépendant plus que des variables

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m;\ y_{n+1},\ y_{n+2}\ \ldots,\ y_p.$$

Cette fonction K est d'ailleurs, comme la fonction H dont elle est la transformée, périodique par rapport aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_m$, et ses périodes sont les mêmes nombres rationnels que nous avons écrits plus haut, car, par rapport aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_m$, K est la même fonction que H.

Dans les nombres rationnels écrits plus haut qui forment un système de périodes, paraissent des nombres entiers arbitraires w. Mais un nombre quelconque de ces systèmes de périodes peut toujours être réduit à m systèmes de périodes. Et par une transformation linéaire, à coefficients rationnels, des variables $z_1, z_2, \ldots, z_m$, on peut ensuite remplacer ces m systèmes de périodes par les m systèmes

$$\omega_{1k},\ \omega_{2k},\ \ldots,\ \omega_{mk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

où

$$\omega_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \gtrless k \\ 1 \text{ pour } i = k \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

On parvient ainsi au résultat suivant :

Par une transformation linéaire, à coefficients rationnels, des variables

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

on peut amener la fonction

$$\mathrm{G}(y_1, y_2, \ldots, y_p)$$

à ne plus dépendre de $(n - m)$ *des nouvelles variables, tout en ne changeant pas de valeur si l'on augmente ou diminue chacune des m autres variables*

d'un nombre entier qui peut être choisi arbitrairement pour chacune de ces variables.

La relation (III), de laquelle nous avons déduit ce résultat, provenait de la relation (II) en prenant les nombres entiers $w_{n+1}, \ldots, w_{q-1}$ égaux à zéro et en laissant arbitraire le nombre entier w_q. Si nous laissons maintenant arbitraire tout autre des nombres entiers de la suite

$$w_{n+1}, \quad w_{n+2}, \quad \ldots, \quad w_q,$$

en égalant les autres à zéro, la relation (II) nous donne d'autres relations, analogues à la relation (III), où les quantités $b_{k,n+1}$ ou $b_{k,n+2}$, ... ou $b_{k,q-1}$, remplacent les quantités b_{kq} ($k = 1, 2, \ldots, n$). Ces relations, analogues à la relation (III), peuvent permettre de réduire de nouveau, par des transformations linéaires, le nombre des variables; cela dépend des nombres entiers qui, pour les quantités $b_{k,n+1}, \ldots, b_{k,q-1}$, remplacent le nombre m correspondant aux quantités b_{kq}.

M. Kronecker termine sa Communication en montrant que tous les développements se simplifient si, au lieu de tirer les conséquences de l'équation donnée et bien déterminée (I), on se borne à vouloir démontrer le théorème général suivant, concernant le nombre de systèmes de périodes que peut avoir une fonction univoque et uniformément continue F de plusieurs variables (ici réelles ou imaginaires) :

On peut toujours, par une transformation linéaire des variables, transformer F en une fonction telle que le nombre de ses systèmes de périodes, à l'aide desquels il est possible d'exprimer linéairement, avec des coefficients entiers, tous ses systèmes de périodes, soit précisément égal à n.

Il convient d'observer que le nombre n, que nous avons défini plus haut, est le *rang* (¹) du système de quantités formé par toutes les périodes, ou encore le *rang* du *système de diviseurs* formé par q fonctions linéaires de p variables $t_1, t_2, \ldots, t_p$,

$$\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i1} t_i, \quad \sum_{i=1}^{p} a_{i2} t_i, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{p} a_{iq} t_i \right).$$

Kirchhoff. — Sur quelques applications de la théorie du changement de forme que subit un corps lorsqu'il est polarisé magnétiquement ou diélectriquement. (1155-1170).

Helmholtz. — Généralisation des théorèmes concernant la statique des systèmes monocycliques. (1197-1201).

König et *Richarz.* — Nouvelle méthode pour déterminer la constante de la gravitation. (1203-1205).

(¹) Pour le sens général donné, dans cette Communication et dans les suivantes de M. Kronecker, sur la résolution approximative en nombres entiers des systèmes d'équations linéaires, aux mots *rang, système de diviseurs, domaine de rationalité* [R = 1], *équivalent, équivalent dans un domaine de rationalité donné*, etc., comparez *Acta mathematica*, t. VI, p. 1 à 166.

***Fuchs.* — Sur une forme sous laquelle on peut mettre l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, lorsque cette intégrale est algébrique. (1171-1177).**

Soit

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z, A, B, \ldots\right)$$

une fonction rationnelle entière de $\frac{dy}{dz}$, y, z et d'un nombre fini de fonctions données de la variable z, dont les dérivées soient également fonctions rationnelles de z, A, B, ... et qui ne soient, en outre, pas liées entre elles et avec z par une équation algébrique. On suppose que la fonction f, de degré m en $\frac{dy}{dz}$, soit *irréductible*, en ce sens qu'elle ne puisse être décomposée en facteurs ayant mêmes propriétés que f, et étant de degrés plus petits que m par rapport à $\frac{dy}{dz}$.

M. Fuchs démontre que, lorsque l'intégrale générale de l'équation différentielle du premier ordre

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z, A, B, \ldots\right) = 0$$

est une fonction *algébrique* de z, A, B, ..., on peut toujours la mettre sous la forme

$$\Gamma = R(\Delta, y, z, A, B, \ldots),$$

où Γ est une constante arbitraire, Δ une fonction algébrique des variables y, z vérifiant l'équation irréductible

$$f(\Delta, y, z, A, B, \ldots) = 0,$$

et où R désigne une fonction rationnelle de Δ, y, z, A, B, ...

Pour démontrer ce théorème, M. Fuchs s'appuie sur les deux lemmes suivants :

Lemme I. — Si l'intégrale générale y de l'équation différentielle $f = 0$ est une fonction algébrique de z, A, B, ..., elle vérifie une équation algébrique

$$\varphi(c, y, z) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles entières de z, A, B, ... et d'une constante arbitraire c.

$G(c, y, z)$ un facteur irréductible par rapport à c, du premier membre de cette équation algébrique, tel qu'en donnant à c une valeur constante, toutes les racines y de l'équation

$$G(c, y, z) = 0$$

tion différentielle $f = 0$. Désignons alors par Δ la

fonction rationnelle de c, y, z, A, B, ..., définie par la relation

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\Delta = 0$$

et par

$$h(\Delta, y, z) = 0$$

l'équation résultante de l'élimination de la constante arbitraire c entre les deux équations

$$\zeta(c, y, z) = 0$$

et

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\Delta = 0$$

Lemme II. — A un facteur près indépendant de Δ, la fonction $h(\Delta, y, z)$ est une puissance de la fonction $f(\Delta, y, z)$.

Le résultat obtenu par M. Fuchs est complété par l'exposé d'une méthode qui permet de reconnaître, sur toute équation différentielle du premier ordre donnée, si son intégrale générale est algébrique ou non, et, dans le premier cas, de calculer cette intégrale.

Kronecker. — Sur la résolution approximative, en nombres entiers, des systèmes d'équations linéaires. Premier Mémoire. (1179-1193). Deuxième Mémoire. (1271-1299).

Dans les *Comptes rendus* de 1883 et 1884, M. Kronecker a publié plusieurs articles concernant la résolution approximative des systèmes d'équations linéaires et *homogènes*. Il considère maintenant des systèmes d'équations linéaires quelconques.

Il s'agit de reconnaître sous quelles conditions un système d'équations linéaires

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \ldots + a_{iq}w_q = \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où les quantités réelles a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{iq}, ξ_i sont données, peut être vérifié par des *nombres entiers* w_1, w_2, ..., w_q, avec une approximation aussi grande que l'on veut. Il s'agit aussi, lorsque ces conditions sont vérifiées, de trouver les nombres entiers w_1, w_2, ..., w_q qui répondent à la question.

Résoudre en nombres entiers, avec une approximation aussi grande que l'on veut, le système précédent d'équations linéaires, c'est trouver des nombres entiers w_1, w_2, ..., w_q vérifiant le système d'équations linéaires

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \ldots + a_{iq}w_q = \xi_i - \varepsilon_i,$$

où la valeur absolue de chacune des quantités ε_1, ε_2, ..., ε_p est plus petite qu'un nombre ε choisi aussi petit que l'on veut.

Pour arriver à ce résultat, M. Kronecker considère le système formé par les coefficients

$$a_{i1}, \quad a_{i2}, \quad \ldots, \quad a_{iq} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

des équations données. Ce système a un *rang* et un *rang de rationalité*, c'est-à-dire un rang relatif au domaine de rationalité $[R = 1]$. Soit r son rang et ρ son rang de rationalité.

On peut alors transformer ce système, par des transformations linéaires de ses lignes, en un système *équivalent* n'ayant que r lignes dont tous les éléments ne soient pas nuls et n'ayant que ρ lignes dont tous les éléments ne soient pas des nombres entiers; et l'on ne peut le transformer, par des transformations linéaires de ses lignes, en un système équivalent ayant moins de r lignes dont tous les éléments ne soient pas nuls ou ayant moins de ρ lignes dont tous les éléments ne soient pas des nombres entiers.

Nous supposerons que ce sont les r premières lignes qui sont linéairement indépendantes et que ce sont les ρ premières lignes qui sont linéairement indépendantes par rapport au domaine de rationalité $[R = 1]$. Il y aura alors nécessairement, pour $k = 1, 2, \ldots, q$, des quantités $c_{h1}, \ldots, c_{hr}$ telles que l'on ait, entre les quantités $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{rk}$, $(r - \rho)$ relations linéairement indépendantes

$$c_{h1}a_{1k} + c_{h2}a_{2k} + \ldots + c_{hr}a_{rk} = \alpha_{hk} \qquad (h = \rho + 1, \rho + 2, \ldots, r),$$

où les α_{hk} sont des *nombres entiers*.

Ceci posé, on démontre (théorème I) que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse résoudre en nombres entiers w le système d'équations linéaires

$$\sum_{(k)} a_{ik} w_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, r, s \\ i = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

où s est l'un quelconque des nombres $r + 1, r + 2, \ldots, q$, est que le rang de rationalité ρ du système formé par les coefficients a_{ik} de ces équations soit nul.

On démontre ensuite (théorème II) que *le système d'équations linéaires*

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \ldots + a_{iq}w_q = \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

où le nombre d'équations est, comme l'on voit, égal au rang de rationalité du système des coefficients, *peut être résolu en nombres entiers* $w_1, w_2, \ldots, w_q$ *avec une approximation aussi grande que l'on veut.*

A cet effet, M. Kronecker considère, dans son premier Mémoire, le cas particulier où $\rho = 1$, c'est-à-dire où l'on a une seule équation linéaire dont les coefficients forment un système de rang de rationalité *un* et aussi, afin de bien suivre la marche générale de la démonstration dans un cas simple, le cas où $\rho = 2$, c'est-à-dire où l'on a deux équations linéaires dont les coefficients forment un système de rang de rationalité *deux*. Puis, dans son second Mémoire (§ 9), supposant le théorème vrai pour $(\rho - 1)$ équations linéaires dont les coefficients forment un système de rang de rationalité $(\rho - 1)$, il le démontre pour ρ équations linéaires dont les coefficients forment un système de rang de rationalité ρ, et montre comment on peut trouver, pour une approximation donnée, les nombres entiers répondant à la question.

On voit de même que *le système d'équations linéaires*

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \ldots + a_{iq}w_q = \xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

peut être résolu en nombres entiers $w_1, w_2, \ldots, w_q$ *avec une approximation* ***aussi grande que l'on veut, lorsque les quantités*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ *vérifient les*

relations

$$c_{h1}\xi_1 + c_{h2}\xi_2 + \ldots + c_{hr}\xi_r = 0 \qquad (h = \rho+1,\ \rho+2,\ \ldots,\ r),$$

où les c sont les quantités définies plus haut.

On le démontre d'abord pour $\rho = 1$, puis, supposant le théorème vrai lorsque le rang de rationalité du système des coefficients est $(\rho - 1)$, on le démontre lorsque le rang de rationalité du système des coefficients est ρ.

Tous les résultats précédents ont été obtenus par des transformations de lignes du système de coefficients donnés. Mais on peut aussi chercher à transformer les colonnes de ce système.

On démontre (théorème III) que tout système de rang r et de rang de rationalité ρ peut être transformé, par une transformation de colonnes, en un système équivalent tel qu'en laissant de côté $(r - \rho)$ colonnes déterminées de ce système on obtienne un système dont le rang r soit égal au rang de rationalité ρ.

En particulier, pour $\rho = 0$, on voit donc (théorème IV) que tout système de rang r et de rang de rationalité nul peut être transformé, par une transformation de colonnes, en un système équivalent ne contenant que juste r colonnes.

Ce théorème, duquel on peut aussi inversement déduire le précédent, est identique à l'un de ceux que M. Kronecker avait déjà établis dans son Mémoire sur les systèmes de périodes des fonctions de variables réelles dont il a été rendu compte plus haut.

On déduit de ces théorèmes les conditions nécessaires et suffisantes pour la résolution en nombres entiers, avec une approximation aussi grande que l'on veut, du système d'équations linéaires données, en ramenant, *sous certaines conditions déterminées concernant les quantités* ξ, cette résolution à celle d'un autre système de ρ équations dont les coefficients forment un système qui lui se trouve être de rang de rationalité ρ, en vertu de la réduction précédente donnée par le théorème III. Or on a déjà montré plus haut (théorème II) qu'un tel système peut être résolu en nombres entiers avec une approximation aussi grande que l'on veut. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la résolution en nombres entiers, avec une approximation aussi grande que l'on veut, du système d'équations linéaires données, sont donc les conditions déterminées concernant les quantités ξ dont nous venons de parler.

Voici d'ailleurs ces conditions, transformées de manière à bien mettre en évidence dans quelles limites on peut choisir *arbitrairement* les quantités ξ pour avoir des systèmes d'équations résolubles en nombres entiers avec une approximation aussi grande que l'on veut.

Il faut et il suffit que les quantités

$$\begin{aligned} &a'_{\rho+1,1}\xi_1 + a'_{\rho+1,2}\xi_2 + \ldots + a'_{\rho+1,\rho}\xi_\rho, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a'_{r1}\xi_1 + a'_{r2}\xi_2 + \ldots + a'_{r\rho}\xi_\rho \end{aligned}$$

soient des nombres entiers, d'ailleurs quelconques, et que les quantités

$$\begin{aligned} &a'_{r+1,1}\xi_1 + a'_{r+1,2}\xi_2 + \ldots + a'_{r+1,\rho}\xi_\rho, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a'_{\rho 1}\xi_1 + a'_{\rho 2}\xi_2 + \ldots + a'_{\rho\rho}\xi_\rho \end{aligned}$$

soient nulles.

Les $p(p-\rho)$ quantités

$$a'_{hi} \qquad \begin{pmatrix} h = \rho+1, \ldots, p \\ i = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

qui paraissent comme coefficients dans ces fonctions linéaires de $\xi_1, \ldots, \xi_p$, sont déterminées à l'aide des relations qui existent nécessairement entre les coefficients a_{ik} des équations linéaires données, formant un système de rang r et de rang de rationalité ρ. C'est le théorème IV que l'on applique pour déduire du système de nombres entiers formé par les seconds membres de ces relations un système équivalent dont le conjugué permet de calculer facilement les $p(p-\rho)$ quantités a'.

J. M.

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI; in-4°; 4e série (1).

Rendiconti, t. II, 1886.

Tacchini (*P.*). — Sur les observations solaires faites à l'observatoire royal du Collège Romain. (4-5).

Millosevich (*E.*). — Observations de comètes faites avec l'équatorial à 25^{cm} d'ouverture à l'observatoire du Collège Romain. (5).

Millosevich (*E.*). — Sur les petites planètes Naja (68) et Henriette (225). (5-6).

Riccò (*A.*). — Résumé des observations des crépuscules rouges. (6-8).

Zona (*T.*). — Le courant d'Andromède et l'atmosphère terrestre. (8-10).

Abetti (*A.*). — Essai pour les déterminations de latitude, fait avec l'instrument des passages de Bamberg à l'observatoire de Padoue, en octobre 1885. (10-15).

Frattini (*G.*). — Sur la génération des groupes d'opérations et sur un théorème d'arithmétique. (16-19).

---

(1) Voir *Bulletin*, XI$_2$, p. 176.

Le système des n congruences linéaires à n inconnues

$$\begin{aligned} &a_1x + a_2y + a_3z + \ldots + a_nw \equiv k_1 \bmod.\alpha,\\ &b_1x + b_2y + b_3z + \ldots + b_nw \equiv k_2 \bmod.\beta,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &m_1x + m_2y + m_3z + \ldots + m_nw \equiv k_n \bmod.\mu \end{aligned}$$

est toujours résoluble lorsque les nombres a_1, b_2, c_3, ..., m_n sont respectivement premiers avec les modules α, β, ..., μ; tous les autres nombres a renferment tous les facteurs premiers inégaux de α, tous les autres b ceux de β, ... tous les autres m ceux de μ.

Bianchi (*L.*). — Sur les systèmes triples de surfaces orthogonales renfermant un système de surfaces pseudosphériques. (1922).

L'auteur suppose que la courbure $-\frac{1}{R^2}$ varie (avec continuité) d'une surface à l'autre du système.

L'élément linéaire est donné par

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 + R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

θ étant une fonction de u, v, w satisfaisant aux équations à dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{R^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\sin\theta}{R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w},$$

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}.$$

Réciproquement, à chaque couple θ, R de fonctions satisfaisant à ces équations correspond un système unique. En connaissant un de ces systèmes, on peut en déduire par la transformation de Bäcklund une double infinité.

Enfin l'auteur fait l'application de ce qui précède au cas des hélicoïdes de M. Dini.

Tacchini (*P.*). — Sur les photographies d'étoiles faites à l'observatoire de Paris. (82).

Tacchini (*P.*). — Sur les grandes protubérances observées en 1885 et 1884. (82-84).

Tacchini (*P.*). — Sur la distribution en latitude des protubérances solaires observées en 1885. (84-85).

Jung (*G.*). — Sur les surfaces engendrées par trois systèmes que

l'on peut déduire l'un de l'autre par des transformations birationnelles. (85-89).

Ces recherches se rattachent à celles du même auteur publiées aussi dans ces *Rendiconti*, dont nous avons parlé plus haut, et à sa Note : ***Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda specie*** (***Rendiconti dell' Istituto Lombardo***, 4 février 1886).

Frattini (*G.*). — Extension et inversion d'un théorème d'arithmétique. (132-135).

Il s'agit du théorème que nous avons rapporté plus haut.

Padova (*E.*). — Propriétés du mouvement d'un corps de révolution soumis à l'action de forces ayant la fonction potentielle H $\cos^2\theta$. Note I (135-140), Note II (168-174).

Brioschi (*F.*). — Les nouveaux modules pour les fonctions hyperelliptiques à deux variables. (159-164).

Soient

$$\vartheta(v_1, v_2),\quad \vartheta_0(v_1, v_2),\quad \vartheta_{12}(v_1, v_2),\quad \vartheta_{34}(v_1, v_2)$$

quatre fonctions théta liées par une équation de Göpel, et soit

$$1 + y^4 + z^4 + w^4 + 2a(y^2 + z^2 w^2) + 2b(z^2 + w^2 y^2) + 2c(w^2 + y^2 z^2) + 4kyzw = 0,$$

cette équation, où

$$y = \frac{\vartheta_0}{\vartheta},\qquad z = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta},\qquad w = \frac{\vartheta_{34}}{\vartheta},$$

et

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1.$$

Les quantités

$$\lambda = a + \sqrt{a^2 - 1},\qquad \mu = b + \sqrt{b^2 - 1},\qquad \nu = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

sont ce que l'auteur appelle les *nouveaux modules*. Il en donne une application à la recherche des équations différentielles partielles qui doivent être satisfaites par le numérateur et par le dénominateur des formules pour la transformation et de celles pour la multiplication.

Tacchini (*P.*). — Sur la distribution en latitude des facules, taches et éruptions solaires, observées en 1885. (164-166).

Millosevich (*E.*). — Les trois comètes Brooks, Barnard et Fabry. (166-167).

Millosevich (*E.*). — Quelques récentes observations de petites planètes entre Mars et Jupiter. (167-168).

Chistoni (*C.*). — Compte rendu des travaux de magnétisme terrestre faits en 1885. (179-182).

Brioschi (*F.*). — Sur l'expression par séries des fonctions hyperelliptiques à deux variables. Note I (199-203), Note II (215-221).

L'auteur établit pour ces fonctions des relations analogues à celles de Jacobi pour les fonctions elliptiques

$$\mathrm{dn}^2 u = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}} + \frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2}.$$

Dans la seconde Note, il examine les équations différentielles partielles satisfaites par la fonction $\Theta(u)$ à deux arguments.

Riccò (*A.*). — Sur la fréquence des inversions de la *raie coronale* et des *b*, et leur relation avec la fréquence des taches solaires. (247-249).

Brioschi (*F.*). — Sur les propriétés d'une classe de formes binaires. (302-305).

Tacchini (*P.*). — Observations solaires et spectres de comètes. (324-325).

Segre (*C.*). — Sur les espaces fondamentaux d'une homographie. (325-327).

L'auteur démontre un théorème qui permet de donner une définition géométrique de la correspondance entre les espaces fondamentaux de points (constitués par les points unis) et les espaces fondamentaux des plans (constitués par les plans unis) d'une homographie à *n* dimensions, et de construire pour chacun de ces espaces de points l'espace *conjugué* de plans et réciproquement. Voici le théorème :

« Dans une homographie quelconque, non dégénérée, de l'espace à *n* dimensions, représentons par S_r et Σ_r deux espaces fondamentaux conjugués de points et de plans respectivement. Le lieu des centres de perspective des couples de S_{r+1} correspondants passant par S_r est l'espace S_{n-r-1} soutien de Σ_r. La correspondance entre les S_{r+1} passant par S_r et leurs centres de perspective avec les S_{r+1} correspondants est une homographie. »

Et corrélativement.

Pieri (*M.*). — Sur les normales doubles d'une courbe gauche algébrique. (327-329).

Au moyen du principe de correspondance algébrique entre les points d'un

plan, dû à Salmon, l'auteur trouve la formule qui donne le nombre des normales doubles d'une courbe de l'ordre n, de la classe m et du rang r, ayant h points doubles apparents et θ génératrices stationnaires de la développable osculatrice

$$T = h + \frac{1}{2}r(r-1) + n(r-1) - \frac{1}{2}(n+m+\theta).$$

Millosevich **(*E.*). — Observations de comètes faites avec l'équatorial à 25^{cm} d'ouverture de l'observatoire royal du Collège Romain. (329-330).**

Giacomelli **(*F.*). — Observations des comètes Fabry et Barnard. (330).**

Millosevich **(*E.*). — Observations de la nouvelle comète Broocks II, 1886, et de la nouvelle planète (258). (428).**

Respighi **(*L.*). — Sur les changements de réfrangibilité des rayons spectraux de la chromosphère et des protubérances solaires. (444-448).**

Cerruti **(*V.*). — Sur la déformation d'une sphère homogène isotrope. Note I (461-469), Note II (586-592).**

L'auteur vient compléter les résultats obtenus par lui dans une Note communiquée au Congrès de l'Association française à Grenoble, et analyse le cas que les points de la surface soient soumis à des forces extérieures données, tandis que dans la Note de Grenoble il avait supposé donnés les déplacements à la surface. Les forces données forment un système en équilibre et leurs composantes pour l'unité de surface ont les expressions

$$2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{d}{dr}\frac{1}{R}, \quad 2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{d}{dr}\frac{1}{R}, \quad 2\rho\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1}\frac{d}{dr}\frac{1}{R};$$

(x_1, y_1, z_1) est un point fixe quelconque interne à la sphère, r et R sont les distances d'un point variable (xyz) au centre et au point (x_1, y_1, z_1) respectivement. L'auteur suppose que les déplacements que pourrait subir la sphère supposée rigide soient empêchés.

Dans la seconde Note, M. Cerruti analyse le cas général où les forces à la surface sont quelconques, pourvu qu'elles constituent un système en équilibre.

La méthode qu'il suit est celle qu'il a tracée dans son Mémoire : *Ricerche intorno all' equilibrio de' corpi elastici isotropi* (*Atti della R. Accademia dei Lincei*, 3ª série, Memorie, t. XIII, p. 81-123).

·*hini* (*P.*). — Sur les phénomènes de la chromosphère so-
·bservés à l'observatoire royal du Collège Romain dans
tre de 1886. (469-470).

Chizzoni (*F.*). — Sur une certaine famille de surfaces que l'on rencontre dans une transformation involutive du troisième degré dans l'espace. (470-476).

Ces surfaces Θ renferment un nombre infini de couples de points conjugués par rapport à une quadrique donnée, et correspondent à elles-mêmes dans une certaine transformation involutive de l'espace. L'auteur arrive à une nouvelle construction de la courbe du quatrième ordre passant par huit points donnés et de la quadrique passant par neuf points donnés.

Chizzoni (*F.*). — Sur une certaine famille de surfaces renfermant une nouvelle famille de cyclides. (476-482).

Cette Note est une continuation de la précédente. L'auteur s'occupe de quelques espèces particulières de surfaces Θ. Ces surfaces, par une transformation homographique convenable, donnent une nouvelle espèce de cyclides. Une de ces surfaces Θ est représentable point par point sur un plan, et l'auteur établit analytiquement les éléments de cette représentation et en donne les circonstances caractéristiques.

Cassani (*P.*). — Un théorème général sur les lignes normales des espaces impairs. (482-484).

Ce théorème est une généralisation de celui de Chasles sur les plans osculateurs d'une cubique gauche. Le voici :

« Dans un espace impair (d'un nombre impair de dimensions) R_n, le point commun à n espaces R_{n-1} osculateurs à une ligne normale C_n est sur l'espace R_{n-1} passant par les n points de contact. »

Dans les espaces pairs, le théorème n'a pas lieu.

Millosevich (*E.*). — Statistique des oppositions utilisées des 258 petites planètes entre Mars et Jupiter jusqu'au mois de juin 1886. (485-487).

Millosevich (*E.*). — Sur la nouvelle comète Broocks (3), 1886 et sur la nouvelle planète (258). (487-488).

Chistoni (*C.*). — Sur le coefficient de réduction de l'unité arbitraire de force magnétique de Humboldt en unité absolue.

Chistoni (*C.*). — Valeurs absolues de la déclinaison magnétique et de l'inclinaison, déterminées en quelques points de la Pouille et de la Terre d'Otrante en 1886, 3. (498-499).

Chistoni (*C.*). — Sur la variation séculaire de l'inclinaison et de l'intensité de la force magnétique à Florence. (499-502).

Besso (*D.*). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires du deuxième ordre et sur l'équation du cinquième degré. (593-597).

L'équation

$$L^2(x)y'' + L(x)M(x)y' + N(x)y = 0,$$

où $L(x)$, $M(x)$, $N(x)$ sont des fonctions entières de degrés m, $m-1$, $2m-2$ respectivement, et la première a ses racines différentes, peut être réduite par des substitutions convenables à une équation hypergéométrique. On peut faire dépendre la résolution de l'équation

$$y^5 + y^2 - x = 0$$

de l'intégration d'une équation de l'espèce mentionnée.

Pizzetti (*P.*). — Un théorème relatif à l'erreur moyenne d'une fonction de quantités déterminées par l'expérience. (597-601).

Soient m_x, m_y, m_z, ... les erreurs moyennes des quantités x, y, z, ... déterminées avec un système quelconque d'observations indirectes. La valeur numérique de l'erreur moyenne de la fonction

$$F = L_0 + L_1 x + L_2 y + L_3 z + \ldots$$

est toujours inférieure à la quantité

$$M_f = l_1 m_x + l_2 m_y + l_3 m_z + \ldots,$$

l_1, l_2, l_3, ... étant les valeurs absolues de L_1, L_2, L_3, ... respectivement et m_x, m_y, m_z, ... étant pris positivement.

Tome II; 1886, 2° semestre.

Cesàro (*E.*). — Sur certains groupes d'opérations. (35-39).

Pieri (*M.*). — Sur les normales doubles d'une surface algébrique. (40-42).

T étant le nombre des normales doubles, l'auteur trouve

$$T = \frac{1}{2} n(n^5 - 2n^4 + 3n^3 - 15n^2 + 26n - 13),$$

où n est l'ordre de la surface, qui est supposée générale.

Cesàro (*E.*). — Formes algébriques à liens arithmétiques. (56-61).

Lazzeri (*G.*). — Sur les réciprocités birationnelles dans le plan. Note I. (61-67).

L'auteur appelle *réciprocité birationnelle d'ordre n* la correspondance que l'on obtient entre deux plans Π, Π′ lorsqu'on fait correspondre les points de Π aux points d'un troisième plan Π″ par une transformation Cremona et les points de Π″ aux droites de Π′ par une réciprocité ordinaire. Il suppose ces deux plans Π, Π′ superposés et donne plusieurs propriétés de la courbe G_{n+1} de l'ordre $n+1$, lieu des points qui sont dans leurs droites correspondantes et de la courbe Γ_{n+1} de la classe $n+1$, enveloppée par les droites qui renferment leurs points correspondants. Il démontre aussi que les réciprocités polaires (par lesquelles un point correspond à sa droite polaire par rapport à une courbe) ne peuvent être que des réciprocités ordinaires ou des réciprocités quadratiques, et que les réciprocités où chaque droite passe par le point correspondant ne peuvent être que des réciprocités quadratiques.

Lazzeri (*G.*). — Sur les réciprocités birationnelles dans l'espace. Note II. (73-79).

L'auteur établit la théorie des réciprocités (μ, ν), c'est-à-dire telles qu'aux points d'un plan correspondent dans l'autre espace les plans d'une surface dans la classe ν, et aux plans par un point dans ce dernier espace correspondent les points d'une surface de l'ordre μ dans le premier. Il examine particulièrement les courbes et développables fondamentales et les surfaces G_{n+1}, Γ_{n+1}, lieu des points qui sont dans les points correspondants, et enveloppe des plans qui passent par les points correspondants. Il démontre ensuite que pour $\mu > 3$ il n'y a de réciprocités polaires que la réciprocité polaire ordinaire. Pour $\mu = 2$ on a la réciprocité polaire

$$u'_1 \equiv x_4(x_2 + x_3),$$
$$u'_2 \equiv x_4(x_3 + x_1),$$
$$u'_3 \equiv x_4(x_1 + x_2),$$
$$u'_4 \equiv x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2,$$

et pour $\mu = 3$ l'autre

$$u'_1 \equiv x_2x_3x_4,$$
$$u'_2 \equiv x_3x_4x_1,$$
$$u'_3 \equiv x_4x_1x_2,$$
$$u'_4 \equiv x_1x_2x_3.$$

Après, il s'occupe des réciprocités où chaque plan passe par le point correspondant. Il démontre d'abord qu'elles doivent être de la forme (ν, ν) et puis que, excepté les *Nullsysteme*, les réciprocités de cette espèce ne peuvent être que des (3, 3).

Visalli (*P.*). — Sur une série de surfaces représentables point par point sur un plan. Note I (80-84), Note II (84-87).

Dans la première Note, l'auteur étudie les surfaces engendrées par les intersections des rayons d'une congruence crémonienne $\Sigma \equiv (\sigma, \sigma')$, et des plans d'une gerbe Q qui est en correspondance crémonienne avec le plan σ.

Dans la seconde, il étudie les surfaces engendrées par les intersections de

trois plans correspondants en trois gerbes qui sont entre elles en correspondance crémonienne.

Morghen (*A.*). — Sur l'influence que produit la densité non uniforme des corps sur les mesures relatives à la composante longitudinale du magnétisme terrestre et à la gravité. (87-92).

Brioschi (*F.*). — Sur une formule de transformation d'intégrales multiples. (111-117).

Ricci (*G.*). — Sur les systèmes d'intégrales indépendantes d'une équation linéaire homogène à dérivées partielles du premier ordre. Note I (119-122), Note II (190-194).

L'auteur traite une généralisation du problème des surfaces orthogonales. Soient

$$ds^2 = \Sigma_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

le carré de l'élément linéaire d'un espace à n dimensions, et

$$\Sigma_r \gamma_r \frac{d\varphi}{dx_r} = 0$$

une équation à dérivées partielles linéaire et homogène, il s'agit de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette équation admette $n-1$ intégrales $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ orthogonales entre elles deux à deux, c'est-à-dire telles qu'il soit

$$\Sigma_{rs} c_{rs} \frac{d\rho_h}{dx_r} \frac{d\rho_k}{dx_s} = 0, \qquad (h < k,\ h, k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où

$$c_{rs} = \frac{1}{a} \frac{da}{da_{rs}},$$

a étant le discriminant de ds^2.

Tacchini (*P.*). — Sur l'éclipse totale de Soleil observée à Grenade le matin du 29 août dernier. (185-187).

Ricco (*A.*). — Résumé des observations des crépuscules rouges. (187-190).

Bertini (*E.*). — Sur les faisceaux de quadriques dans un espace de n dimensions. (208-211).

Volterra (*V.*). — Sur une propriété d'une classe de fonctions transcendantes. (211-214).

Pincherle (*S.*). — Quelques observations sur les polynômes de M. le professeur Appell. (214-217).

Bianchi (*L.*). — Sur les solutions communes à deux équations à dérivées partielles du deuxième ordre à deux variables. Note I (218-223), Note II (237-241), Note III (307-310).

L'auteur traite dans toute sa généralité la question de voir si deux équations données du deuxième ordre ont des solutions communes et de trouver ces solutions.

Jung (*E.*). — Sur les transformations planes multiples. (302-306).

Exposé sommaire de quelques propriétés des transformations réciproques multiples, c'est-à-dire telles qu'à un point de σ' corresponde une droite de σ, et à une droite de σ un groupe de k points en σ'.

Respighi (*L.*). — Sur le spectroscope objectif. (315-321).

Tacchini (*P.*). — Sur les phénomènes de la chromosphère solaire observés à l'observatoire royal du Collège Romain dans le deuxième et le troisième trimestre de 1886. (333-334).

Tacchini (*P.*). — Observations de taches et facules solaires. (334-335).

De Paolis (*R.*). — Sur les involutions projectives. (335-337).

L'auteur démontre deux propriétés des involutions projectives. Il a employé ces propriétés, comme il le dit dans une note, dans la résolution du problème d'établir la théorie des courbes et des surfaces en tenant compte des éléments imaginaires et sans considérations algébriques. Il n'a pas encore publié ces recherches, car il attend la publication d'un Mémoire de M. Kötter sur ce sujet.

Millosevich (*E.*). — Observations de la comète Finlay, faites à l'équatorial de $0^m,25$ d'ouverture de l'observatoire du Collège Romain. (337-338).

Millosevich (*E.*). — Observations de la planète Irma (177), et sur les nouvelles planètes entre Mars et Jupiter. (338-339).

Jung (*G.*). — Sur deux transformations multiples associées à toute transformation birationnelle (339-344).

L'auteur suppose que les deux plans crémoniens σ_1, σ_2 coïncident en un plan

Σ. Alors il s'agit de la transformation multiple réciproque qui fait correspondre à chaque point L de σ_1 la droite l de Σ qui le joint à son correspondant de σ_2, et à chaque droite l de Σ les n points de σ_1 situés sur l et qui ont sur cette même droite leurs points correspondants de σ_2. L'autre transformation multiple résulte de l'échange des deux plans σ_1, σ_2.

S. R.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE, puis par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ (¹). — 3ᵉ série.

Tome VI; 1ᵉʳ semestre 1887.

Biehler (*Ch.*). — Sur l'équation de degré $2n$ qui donne $\operatorname{tang}\frac{a}{m}$ lorsqu'on connaît $\operatorname{tang} a$. (5-9).

M. Biehler met cette équation sous forme entière $V_m = 0$, et fait application des théorèmes de Sturm et de Rolle à cette équation et à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait le polynôme V_m.

Biehler (*Ch.*). — Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. (9-18).

Posant $y = (1 - 2\alpha x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{Q_n(x, \alpha)}{(1 - 2\alpha x + x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

L'auteur étudie les propriétés du polynôme $Q_n(x, \alpha)$ qui est de degré n en x comme en α. Il démontre que $Q_n = 0$, si $-1 < x < +1$, a toutes les racines α réelles, et termine par l'examen de la liaison curieuse qui existe entre les polynômes Q_n et les fonctions X_n de Legendre.

Laurent (*H.*). — Sur les conditions d'intégrabilité d'une expression différentielle. (19-24).

L'auteur se propose de démontrer que les conditions que l'on énonce ordinairement peuvent être remplacées par d'autres moins générales. Cela lui a permis de simplifier certaines théories relatives aux dérivées partielles; et il montre comment on peut arriver ainsi très simplement à l'intégration de l'équation type aux dérivées partielles du premier ordre.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 278. La substitution, comme rédacteur, de M. Rouché à M. Gerono, a eu lieu à partir du numéro de juin 1887.

Genty. — Note sur la courbure des sections normales d'une surface. (24-29).

Détermination géométrique fort élégante du centre de courbure d'une section normale. De là plusieurs propriétés intéressantes et fécondes, dont l'auteur indique plusieurs applications.

Cesàro (*E.*). — Sur quelques fractions continues. (29-36).

Valeur de la fraction continue $X = \left(1, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$, qu'on trouve égale à $\frac{\pi}{2}$, et plus généralement de $X(\mu, \nu) = \left(1, \frac{\mu}{1+\nu}, \frac{\mu}{2+\nu}, \frac{\mu}{3+\nu}, \cdots\right)$, qu'on obtient sous la forme d'un rapport de deux intégrales. L'origine de cet article se trouve dans les *Unsolved questions* de M. Sylvester, publiées par l'*Educational Times.*

Cesàro (*E.*). — Sur une distribution de zéros. (36-43).

$c_1, c_2, \ldots$ étant les zéros de la fonction u, M. Cesaro étudie la distribution des zéros de la fonction $u'^2 - uu''$. Il arrive ainsi à plusieurs propositions fort curieuses, dans l'énoncé desquelles interviennent d'une façon particulièrement heureuse des termes empruntés à la Mécanique. Généralisation et applications à certains exemples.

Gomes Teixeira (*F.*). — Exemples de fonctions à espaces lacunaires. (43-44).

L'auteur montre un premier exemple où l'espace lacunaire est un cercle; puis un autre où les espaces lacunaires sont des cercles de rayons égaux. Enfin il est possible d'avoir une fonction, avec un nombre infini d'espaces lacunaires.

Balitrand. — Sur l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$. (45-47).

Application de la méthode donnée par M. V. de Strekalof (*Nouvelles Annales*, t. V$_3$, p. 533).

Bibliographie. — *A. Rémond :* Exercices élémentaires de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions, Ire Partie, in-8°, 1887; compte rendu par M. *Maurice d'Ocagne.* — *P. Duhem :* Le potentiel thermodynamique et les applications à la Mécanique chimique et à l'étude des phénomènes électriques; gr. in-8°, 1886. — *E. Lebon :* Bulletin scientifique de l'enseignement secondaire spécial; in-8°, mensuel, 1886. (47-51).

Publications récentes. — (51-56).

Resal (*H.*). — Note sur la courbure des lignes géodésiques d'une surface de révolution. (57-60).

Établissement d'une formule nouvelle, dont l'auteur fait application aux surfaces de révolution du second degré, ce qui le conduit à des conséquences aussi simples que remarquables.

Biehler (*Ch.*). — Sur la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ quand m augmente indéfiniment. (60-67).

Démonstration rigoureuse, qui permet d'étendre les résultats à toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable x.

Biehler (*Ch.*). — Sur l'élimination par la méthode d'Euler. (67-75).

Démonstration simple du théorème d'Euler, fondée sur les analogies entre la divisibilité algébrique et la divisibilité arithmétique. Établissement de plusieurs propositions concernant cette théorie. Condition pour que deux polynômes homogènes à deux variables aient un facteur commun.

Biehler (*Ch.*). — Sur le théorème de Rolle. (75-79).

Démonstration nouvelle, reposant sur la substitution des deux plus petites (ou des deux plus grandes) racines réelles de l'équation dérivée.

Biehler (*Ch.*). — Sur la forme adjointe. (79-82).

Démonstration simple de quelques propriétés de la fonction adjointe d'une forme quadratique donnée. La forme choisie est du second degré à trois variables.

Weill. — Sur un théorème de Chasles (82-83).

Sur les points de contact des tangentes à une courbe algébrique, parallèles à une même direction.

Weill. — Sur la division des polynômes. (83-85).

Coefficients du quotient dans la division $\frac{1}{1-\alpha x-\beta x^2-\ldots-\lambda x^n}$. Applications à deux exemples et conséquences arithmétiques fort curieuses.

Weill. — Sur quelques formes quadratiques. (85-87).

Théorème général, conduisant à de nombreuses conséquences, parmi lesquelles nous citerons la solution, générale, mais non complète, de la question suivante : trouver les formes des entiers A, B, C telles que le nombre

$$Ax^2+By^2+Cz^2$$

soit une somme de trois carrés.

Pirondini (*G.*). — Sur les hélicoïdes. (87-101).

Étude de la surface engendrée par une droite assujettie à un mouvement hélicoïdal autour d'une droite fixe. Démonstration d'une série de théorèmes relatifs à ces sortes de surfaces, aux loxodromies et aux trajectoires orthogonales.

Bibliographie. — *G. Halphen* : Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications; Ire Partie, gr. in-8°, 1886; extrait de la préface. (101-104).

Rouché (*E.*). — Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux. (105-173).

Cette magistrale étude sur la vie et l'œuvre de Laguerre est extraite du *Journal de l'École Polytechnique* (LVIe Cahier). Nous ne pouvons en indiquer ici que la substance même, c'est-à-dire rappeler sommairement l'œuvre de Laguerre, qui s'étend de 1865 à 1886, et qui comprend cent quarante Notes ou Mémoires, classés par M. Rouché dans les grandes divisions suivantes :

Emploi des imaginaires en Géométrie; applications du Calcul intégral et de la théorie des formes à la Géométrie; Géométrie infinitésimale; Géométrie de direction; méthodes d'approximation pour certaines fonctions analytiques; résolution numérique des équations; équations différentielles; fonctions elliptiques.

Après un examen approfondi des travaux essentiels de Laguerre (et la liste qui précède en dit assez l'étendue et la variété), M. Rouché ajoute :

« L'homme que la Science vient de perdre n'était pas seulement un géomètre distingué, habile à trouver d'heureux développements et des solutions élégantes; c'était un inventeur, aux idées neuves et fécondes, dont les écrits sur l'emploi des imaginaires, sur la théorie des équations, sur les cycles, etc., rendront le nom impérissable. »

C'est là un jugement que l'histoire ratifiera.

Niewenglowski (*B.*). — Application d'un théorème de Stewart. (173-175).

Si A, B, C sont trois points en ligne droite et O un point quelconque, on a

$$\overline{OA}^2.BC + \overline{OB}^2.CA + \overline{OC}^2.AB + AB.BC.CA = 0,$$

en tenant compte des signes. Tel est le théorème de Stewart, fort ancien déjà, mais peut-être trop oublié, dont M. Niewenglowski indique une application simple.

Aubry (*A.*). — Solution d'une question d'Algèbre. (175-190).

Trouver les substitutions rationnelles qui reproduisent l'équation complète du troisième degré. C'est cette question qui fait l'objet de l'article de M. Aubry, comprenant une discussion claire et des calculs bien présentés, complétés par plusieurs exemples.

Biehler (*Ch.*). — Sur une application du théorème de Rolle. (190-204).

Propriétés des dérivées de l'expression $(x^2+y^2-r^2)^m$. Double généralisation, obtenue : 1° en remplaçant 2 par $2m$; 2° en prenant trois variables x, y, z au lieu de deux seulement.

Weill. — Sur une équation différentielle. (204-205).

Si

$$V_p = x^p + \frac{k^p}{x^p},$$

on a

$$V_p = V_1 V_{p-1} - k V_{p-2};$$

formation d'une équation différentielle du second ordre, à laquelle satisfait la fonction V.

Weill. — Sur les courbes unicursales. (205-207).

Intéressante proposition sur la génération de la courbe unicursale la plus générale de l'ordre p.

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1886. — Énoncés des compositions : Mathématiques, Lavis, Géométrie descriptive, Trigonométrie. (207-208).

Question proposée. — 1563. (208).

Il nous sera permis, à cette occasion, de regretter que les énoncés des questions deviennent si rares. La dernière question proposée (1562) remonte au mois de juin 1886, et celle-ci figure dans le numéro d'avril 1887. Les *Nouvelles Annales*, si elles veulent rester fidèles à leur tradition, qui leur valut jadis tant de succès, ne doivent pas être uniquement un Recueil de Mémoires. En faisant cette observation, nous nous faisons l'interprète de la grande majorité des lecteurs les plus fidèles de cette intéressante publication.

Gerono. — A Messieurs les abonnés des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. (209).

Annonce de sa retraite comme rédacteur, et de son remplacement par M. Rouché. « J'ai vécu assez longtemps en communauté d'esprit avec mes nombreux lecteurs, écrit en terminant M. Gerono, pour me permettre de leur dire adieu comme à d'anciens et bienveillants amis; c'est ce que je fais de tout mon cœur. »

Stieltjes (*T.-J.*). — Note sur la multiplication de deux séries. (210-215).

L'auteur suppose l'une des séries absolument convergente et l'autre simplement convergente, et il fixe l'ordre des termes d'une manière très ingénieuse, au moyen d'une figuration géométrique. Deux applications terminent l'article.

Cesaro (*E.*). — Remarques sur la Géométrie du triangle. (215-242).

Étude intéressante et originale sur la nouvelle géométrie du triangle. Nous en indiquons ci-après les divisions principales. Coordonnées d'inertie; cercle circonscrit; ellipse de Steiner; points de Steiner et de Tarry; relations entre les coordonnées d'inertie et les coordonnées barycentriques; point de Lemoine; droites de Simson; digression sur la théorie des antiparallèles; coniques circonscrites, contenant le barycentre; hyperbole de Kiepert; autres points remarquables; cercle et points de Brocard; triangle de Brocard; transformations.

Biehler (*Ch.*). — Sur les séries. (243-251).

Examen des conditions de convergence ou de divergence; applications à un certain nombre d'exemples intéressants.

Biehler (*Ch.*). — Sur l'abaissement des équations réciproques. (251-256).

Étude des substitutions $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ qui jouissent de la même propriété que $y = \frac{1-x}{1+x}$. L'auteur montre qu'elles rentrent dans le type général $\frac{G\left(x+\frac{1}{x}\right)}{H\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

Cesaro (*E.*). — Sur la droite de Simson. (257-266).

Une Note fait remarquer que cet article aurait dû précéder celui intitulé : *Remarques sur la géométrie du triangle* (*voir* plus haut). L'auteur fait usage de ses *coordonnées d'inertie* pour étudier la droite de Simson et plusieurs de ses propriétés.

Collin (*J.*). — Sur le théorème de Rolle. (266-268).

Démonstration de deux théorèmes pouvant simplifier souvent l'application du théorème de Rolle.

Weill. — Théorèmes de Géométrie. (269-272).

Étude d'un système de deux courbes planes, et, notamment, correspondance des points où les tangentes sont parallèles.

Weill. — Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles. (272-274).

La courbe est considérée comme enveloppe d'une conique passant par deux points fixes et par les trois sommets d'un triangle variable inscrit et circonscrit à deux coniques fixes.

Laurent (*H.*). — **Remarques sur les conditions d'intégrabilité.** (274-279).

Continuation d'un travail sur le même sujet publié antérieurement (voir plus haut). Ici, l'auteur s'attache à montrer comment la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre conduit à celle de Cauchy. Une suite est annoncée à ce premier article.

Concours général de 1886. — Mathématiques spéciales, Mathématiques élémentaires, Philosophie : énoncés des compositions. (279-281).

École normale supérieure (Concours de 1886). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Physique. (281-282).

École forestière (Concours de 1886). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Trigonométrie et calcul logarithmique. (283-284).

École navale (Concours de 1886). — Énoncés des compositions : Arithmétique et Algèbre, Calcul trigonométrique, Géométrie descriptive, Géométrie, Composition française. (284-287).

Concours d'admission a l'École centrale en 1886. — Énoncés des compositions; Ire Session (juillet 1886) et seconde Session (octobre 1886) : Géométrie analytique, Calcul trigonométrique, Physique, Chimie, Géométrie descriptive. (287-293).

École spéciale militaire (Concours de 1886). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Calcul trigonométrique, Géométrie descriptive. (293-294).

Concours pour les bourses de licence (Paris, 1886). — Énoncé de la composition de Mathématiques. (295).

Agrégation de l'enseignement secondaire spécial (Concours de 1886). — Énoncés des compositions : Algèbre et Trigonométrie, Géométrie descriptive, Mécanique. (295-297).

Correspondance. — Extrait d'une Lettre du professeur *Genese :* Sur un théorème de M. d'Ocagne, relatif aux courbes algébriques. Voir *Nouvelles Annales,* p. 295; 1886. (297-298).

BIBLIOGRAPHIE. — *A. de Saint-Germain :* Résumé de la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; in-8°, 1887. — *René Descartes :* La Géométrie; nouvelle édition, petit in-4° carré, 1886. — *C. Possé :* Sur quelques applications des fractions continues algébriques; gr. in-8°, 1886. — *A. Thévenet :* Étude analytique du déplacement infiniment petit d'un corps solide; in-4°, 1886. — *Despeyrous :* Mémoire sur les équations résolubles algébriquement; gr. in-8°, 1887. — *C.-A. Laisant :* Théorie et applications des équipollences; in-8°, 1887. (298-300).

PUBLICATIONS RÉCENTES. — (300-304). A. L.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CIII; 1886 (1).

De Jonquières. — Sur le mouvement d'un solide homogène, pesant, fixé par un point de son axe de figure. (17-21).

Callandreau. — Sur le développement en série du potentiel d'un corps homogène de révolution. (33-35 et 195-198).

Il s'agit de savoir si les séries qui représentent le potentiel extérieur V_e et le potentiel intérieur V_i d'un sphéroïde sont applicables, ainsi que l'admettaient Legendre et Laplace, aux points situés à la surface du corps. L'auteur s'en tient aux sphéroïdes de révolution. Tout revient à constater : 1° que les fonctions V_e et V_i, $\frac{\partial V_e}{\partial r}$ et $\frac{\partial V_i}{\partial r}$, $\frac{\partial V_e}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial V_i}{\partial \theta}$ prennent les mêmes valeurs à la surface; 2° qu'elles sont continues dans tout l'espace.

L'accord des valeurs de V_e et V_i, ainsi que de $\frac{\partial V_e}{\partial r}$ et $\frac{\partial V_i}{\partial r}$, à la surface, résulte des travaux de Poisson, complétés par Todhunter. Pour comparer $\frac{\partial V_e}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial V_i}{\partial \theta}$, l'auteur admet que les séries considérées sont absolument convergentes. Il conclut :

Les formules pour le potentiel seront valables du moment que les séries V_e, V_i seront absolument convergentes et qu'on pourra établir la continuité des séries.

(1) Voir *Bulletin*, même volume, p. 59.

Halphen. — Sur le problème de Gauss concernant l'attraction d'un anneau elliptique. (363-367).

Ce problème consiste à déterminer l'attraction qu'exerce sur un point quelconque un anneau elliptique infiniment mince, où chaque arc élémentaire a une masse proportionnelle à l'aire du secteur dont il forme la base et dont le sommet est un foyer. M. Halphen a repris ce problème pour en donner une solution explicite qui n'exige pas la résolution préalable d'une équation du troisième degré.

Il considère à cet effet une forme quadratique $\Phi(x, y, z)$ analogue à un potentiel : Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du foyer, et α, β, γ celles du point attiré, après avoir calculé les dérivées partielles $\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$, il suffit d'y remplacer x, y, z par $x_0 - \alpha$, $y_0 - \beta$, $z_0 - \gamma$ pour avoir les composantes de l'attraction. La forme Φ est une combinaison linéaire de trois autres formes quadratiques, et ce sont les invariants du système composé par ces trois formes qui figurent seuls dans la solution résumée par M. Halphen.

Sylvester. — Sur l'équation différentielle d'une courbe d'ordre quelconque. (408-411).

Procédé symbolique, direct et général, pour trouver l'équation différentielle de toutes les courbes d'un ordre quelconque.

M. Halphen, dans un Mémoire publié en 1876, a donné des formules qui conduisent aux mêmes résultats.

Tisserand. — Sur un cas remarquable du problème des perturbations. (446-451).

Liouville (*R.*). — Sur quelques équations différentielles non linéaires. — Sur une classe d'équations différentielles non linéaires. (457-460 et 476-479).

L'équation différentielle

$$y'' + y'^2 \frac{\partial \log\beta}{\partial y} - y' \frac{\partial \log\alpha}{\partial x} = 0$$

peut toujours être intégrée, si les fonctions α, β vérifient le système

$$3\alpha + \frac{\partial^2 \log(\alpha^2\beta)}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad 3\beta + \frac{\partial^2 \log(\alpha\beta^2)}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

dont la solution générale est

$$\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \log(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3),$$
$$\beta = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \log(L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3);$$

les lettres X désignent des fonctions arbitraires de x, les lettres Y des fonctions

arbitraires de y, et l'on a posé

$$L_1 = X_2X'_3 - X_3X'_2, \qquad M_1 = Y_2Y'_3 - Y_3Y'_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[D_x^{-\frac{1}{3}}\frac{C_1L_1 + C_2L_2 + C_3L_3}{(\alpha\beta')^{-\frac{1}{3}}}\right] = 0,$$

C_1, C_2, C_3 représentant trois constantes arbitraires.

Ce résultat se rattache à une proposition plus générale qui fait l'objet d'une seconde Communication :

Pour qu'une équation différentielle du second ordre admette une intégrale générale où les constantes arbitraires entrent linéairement, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$y'' + a_1y'^3 + 3a_2y'^2 + 3a_3y' + a_4 = 0,$$

les a étant des fonctions de x et y qui vérifient un certain système de deux équations aux dérivées partielles.

Kœnigs. — Sur les intégrales algébriques des problèmes de Dynamique. (460-463).

Tous les auteurs qui se sont occupés de ce sujet ont admis que l'intégrale algébrique considérée : 1° est algébrique par rapport aux composantes des vitesses; 2° qu'elle est rationnelle par rapport à ces vitesses.

M. Kœnigs, en se bornant aux problèmes qu'on peut traiter par la méthode de Jacobi, montre que, sous une condition simple et générale imposée à l'équation de Jacobi, le cas d'une intégrale algébrique irrationnelle rentre dans le cas de la rationnalité, en vertu de ce théorème :

S'il existe une intégrale Φ algébrique et irrationnelle par rapport à l'une des quantités q_i et p_i, on pourra toujours exprimer Φ à l'aide d'un nombre limité d'intégrales non seulement algébriques, mais encore rationnelles par rapport à cette quantité.

Il suit de là, entre autres conséquences, qu'au point de vue algébrique les recherches de Bour et de M. Maurice Lévy sur les géodésiques à intégrales rationnelles offrent toute la généralité voulue.

Picard. — Sur la transformation des surfaces algébriques en elles-mêmes. (517-520).

On sait que les courbes du genre zéro et du genre un sont les seules qui puissent être transformées en elles-mêmes par une substitution birationnelle renfermant un paramètre arbitraire. Ce théorème, dû à M. Schwartz, est établi par M. Picard à l'aide d'une analyse nouvelle qui s'étend aux surfaces et donne alors cette proposition :

Les surfaces algébriques susceptibles de se transformer en elles-mêmes par une substitution birationnelle renfermant deux paramètres arbitraires sont du genre zéro ou un, le genre étant ici le nombre des coefficients arbitraires dans le polynôme d'ordre $m - 4$ adjoint à la surface, supposée de degré m.

Picard. — Sur la transformation des surfaces algébriques en elles-mêmes et sur un nombre fondamental dans la théorie des surfaces. (549-552).

Les surfaces susceptibles d'être transformées en elles-mêmes par une substitution rationnelle renfermant un seul paramètre arbitraire peuvent être d'un genre quelconque. On obtient toutes celles dont le genre est $p > 1$ en prenant pour x, y, z trois fonctions rationnelles de quatre paramètres λ, μ, λ', μ', les deux premiers liés par une relation algébrique de genre un, les deux derniers par une relation de genre p, sous la condition qu'à un point arbitraire de la surface ne correspondent qu'un seul système de valeurs (λ, μ) et un seul système de valeurs (λ', μ').

Quant aux substitutions birationnelles qui pourraient transformer en elle-même une surface de genre supérieur à un, elles sont en nombre limité.

Le nombre fondamental introduit par M. Picard et qui joue, concurremment avec p, un rôle important dans la théorie des surfaces, est le degré D de la relation

$$\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0,$$

qui exprime que la surface adjointe d'ordre $m - 4$

$$A_1 Q_1(x, y, z) + A_2 Q_2(x, y, z) + \ldots + A_p Q_p(x, y, z) =$$

est tangente à la proposée en un point situé en dehors des lignes ou points singuliers de cette surface. Toutes les surfaces admettant le même nombre D ne forment qu'un nombre limité de classes, en appelant classe l'ensemble des surfaces qui se correspondent point par point.

Guccia. — Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes. (594-596).

L'auteur énonce une propriété générale des courbes algébriques et en déduit ce théorème :

Le nombre des conditions simples auxquelles équivaut, pour une courbe algébrique, la condition de posséder en un point donné une singularité donnée, est égal au nombre des intersections réunies en ce point de deux courbes quelconques douées de la singularité donnée, diminué du nombre exprimant l'abaissement du genre produit par la singularité dans toute courbe algébrique.

De Jonquières. — Note sur un principe de Mécanique rationnelle et une démonstration dont Daniel Bernoulli s'est servi en 1757. (617-620).

Picard. — Sur la transformation des surfaces et sur une classe d'équations différentielles. (635-638).

Clebsch a démontré qu'une courbe plane algébrique de genre p peut toujours être transformée par une substitution birationnelle en une courbe de degré $p + 1$. M. Picard énonce le théorème analogue relatif aux surfaces :

Une surface d'ordre m dont les adjointes d'ordre $m-4$ dépendent de $p-1$ paramètres arbitraires et qui a p_2 points communs avec deux de ces adjointes (en dehors des lignes et des points singuliers), peut être transformée par une substitution rationnelle en une surface de degré p_2-p+4, en supposant $p>4$.

Il passe ensuite aux équations différentielles de la forme

$$f(y, y', y'') = 0,$$

f étant un polynôme, y' et y'' désignant les dérivées de y par rapport à x, pour traiter le cas où l'intégrale générale est une fonction uniforme de x sans autre point singulier essentiel que le point $x=\infty$. Si le genre de la surface $f(y, z, t) = 0$ est supérieur à un, l'équation se ramène à une équation $\varphi(y, y') = 0$ intégrable par les fonctions elliptiques. Quand l'équation $f = 0$ est du genre un, on peut, par un procédé que l'auteur indique, reconnaître si elle est intégrable à l'aide des fonctions abéliennes de deux variables, dont l'une est prise pour constante arbitraire.

Haton de la Goupillière. — Écoulement varié des gaz. (661-665, 709-712 et 785-788).

Dans trois Notes consécutives, l'auteur présente une solution complète du problème du remplissage progressif des récipients aux dépens d'un réservoir maintenu à une tension constante p_1.

En désignant par V le volume du récipient, originairement à la pression atmosphérique, par Ω la section de l'orifice, par m le coefficient de contraction, par p la pression, par v le volume de l'unité de poids et par t le temps, on trouve

$$t = \frac{V}{m\Omega\sqrt{2g}} \int_{v}^{v_0} \frac{dv}{v\sqrt{\int_{v}^{v_1} \frac{dp}{dv}\, dv}}.$$

Les calculs indiqués dans cette formule s'achèvent dans les deux hypothèses importantes de l'écoulement isotherme et de l'écoulement adiabatique.

Quand, au lieu de se remplir, un récipient, primitivement à la pression p_1, se vide librement dans l'atmosphère, le poids spécifique conserve une valeur fixe ϖ_0, et l'on obtient

$$t = \frac{V}{\varpi_0 m\Omega\sqrt{2g}} \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v^2\sqrt{\int v\frac{dp}{dv}\, dv}}.$$

Avec cette nouvelle formule, le problème de l'écoulement isotherme ne peut pas être résolu en termes finis, non plus que celui de l'écoulement adiabatique. Toutefois on obtient pour celui-ci une solution très suffisamment approchée en adoptant pour le rapport des deux chaleurs spécifiques la valeur 1,40 ou $\frac{7}{5}$; on peut alors obtenir le temps en fonction explicite de p.

Après ces calculs, l'auteur indique les réserves qu'il convient de faire,

d'après les données de l'expérience, sur l'hypothèse admise, suivant laquelle m serait constant.

Blutel. — Sur les surfaces enveloppes des cônes du second degré, dans le cas où chaque cône touche son enveloppe suivant un cercle. (687-689).

Un cône du second degré, conclut l'auteur, ne peut toucher son enveloppe suivant un cercle de plan réel que quand il est de révolution (la surface enveloppée est alors une enveloppe de sphères) ou quand le plan du cercle de contact est parallèle à un plan fixe.

Picard. — Sur les surfaces algébriques susceptibles d'une double infinité de transformations birationnelles. (730-732).

On obtient toutes ces surfaces en prenant pour les coordonnées x, y, z d'un quelconque de leurs points des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres ou des dégénérescences de pareilles fonctions.

Ce théorème permet de faire l'étude complète de l'équation différentielle du second ordre

$$f(y, y', y'') = 0$$

quand son intégrale générale est uniforme. Dans le cas où y, y', y'' s'expriment par des fonctions uniformes ayant effectivement quatre groupes de périodes, l'intégrale générale y est de la forme

$$y = \varphi(ax + C, a'x + C'),$$

a et a' étant deux constantes, C et C' étant arbitraires, et $\varphi(u, v)$ représentant une fonction quadruplement périodique de u et v.

Poincaré. — Sur les transformations des surfaces en elles-mêmes. (732-734).

L'auteur donne du théorème de M. Picard (*voir* t. CIII, p. 730) une démonstration fondée sur les propriétés des groupes continus. Ce mode de raisonnement est applicable à d'autres questions. Ainsi, pour qu'une équation différentielle du premier ordre n'ait qu'un nombre fini de points singuliers, il faut qu'elle soit réductible aux équations linéaires, ou intégrable, soit algébriquement, soit par quadratures (Fuchs, Poincaré). D'après l'analyse exposée dans la présente Note, il en est encore de même pour les équations d'ordre supérieur.

Nœther. — Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques. (734-737).

Avant d'entrer en matière, l'auteur donne une relation qui lie les deux nombres p et p_3 relatifs à une surface (*voir* t. CIII, p. 635) et le nombre appelé D par M. Picard (*voir* t. CIII, p. 549); en désignant par μ_i l'ordre de multiplicité d'un point multiple isolé de la surface, on a

$$D = \Sigma \mu_i = 4(3p + p_3 + 3).$$

M. Nœther fait connaître ensuite son extension du théorème de Riemann-Roch. Soit C une courbe de genre π située sur une surface f de genres p et p_1; elle fait partie d'un système linéaire Σ de courbes du même ordre situées sur f; soit $q+1$ le nombre des constantes arbitraires d'une fonction rationnelle de x, y, z qui devient infinie en C; soit s le nombre des points d'intersection mobiles de C avec une courbe Σ quelconque; soit enfin ρ le nombre des surfaces d'ordre $m-4$ adjointes à f et linéairement indépendantes qui passent par C; on a, en général,

$$q = p + s - \pi - \rho + 1.$$

Exceptionnellement, q peut être supérieur au second membre de cette relation.

Poincaré. — Sur une classe étendue de transcendantes uniformes. (862-864).

Soient

$$x_1 = \varphi_1(u), \quad x_2 = \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(u)$$

n fonctions uniformes d'une variable u; soit m un nombre de module plus grand que 1 et soient

$$x'_1 = \varphi_1(mu), \quad x'_2 = \varphi_2(mu), \quad \ldots, \quad x'_n = \varphi_n(mu).$$

M. Poincaré dit que les fonctions φ admettent un théorème de multiplication si $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ sont fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il se propose de former toutes les fonctions qui jouissent de cette propriété.

On reconnaît sans peine que les x' peuvent toujours se mettre sous la forme

$$x_i = \lambda_i x_i + \Theta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les Θ étant des fonctions des x dont le développement commence par des termes du deuxième degré.

Il faut alors qu'un des λ soit égal à m. Deux cas sont à distinguer :

1° Tous les λ sont égaux à m. M. Poincaré démontre alors qu'il existe des séries

$$x_i = \alpha_i u + \beta_i u^2 + \gamma_i u^3 + \ldots,$$

convergentes et uniformes dans tout le plan, qui répondent à la question. On peut choisir arbitrairement les n coefficients α.

2° Si λ, par exemple, est égal à m, les autres λ étant différents de m, il existe encore une infinité de séries qui résolvent le problème; α_1 est arbitraire, les $n-1$ autres α doivent être nuls.

On reconnaît sans peine que la fonction la plus générale qui admet un théorème de multiplication est le quotient de deux fonctions entières jouissant de la même propriété. Ces transcendantes contiennent comme cas particulier les fonctions elliptiques, les fonctions Θ et les transcendantes obtenues en égalant à 0 toutes les variables, sauf une, dans une fonction abélienne.

Callandreau. — Sur la série de Maclaurin dans le cas d'une

variable réelle. Application au développement en série du potentiel d'un corps homogène. (864-867).

L'auteur, supposant que les coefficients de la série de Maclaurin sont tous positifs, qu'ils ne croissent pas à partir d'un certain rang, qu'on ait établi la légitimité du développement de $f(x)$ pour les valeurs positives de x inférieures ou égales à un nombre donné plus petit que 1, montre qu'on peut prolonger la représentation de la fonction par la série tant qu'on ne sera pas arrêté par une discontinuité des dérivées $f^{n}(x)$ ou par la limite de convergence de la série.

Humbert. — Sur le théorème d'Abel. (919-922).

Étant donnée une courbe algébrique de degré n, $f(x, y) = 0$, que l'on coupe par un faisceau $F - u\varphi = 0$ de courbes de degré m, on propose d'évaluer directement l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{Q(x, y)}{R(x, y)}\, dx,$$

où Q et R sont des polynômes de degrés q et r, et où $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{mn}^0$; $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$ sont les abscisses d'intersection de la courbe $f = 0$ avec les deux courbes $F - u_0\varphi = 0$, $F - u\varphi = 0$.

Les coordonnées homogènes de la courbe $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ peuvent toujours se mettre sous la forme

$$x_i = \theta_i(t), \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ étant des fonctions thêtafuchsiennes holomorphes, de degré μ, d'un paramètre t. L'intégrale

$$I = \int \frac{Q(x, y)}{R(x, y)}\, dx$$

peut dès lors s'écrire

$$I = \int \zeta(t)\, dt,$$

$\zeta(t)$ étant une fonction thêtafuchsienne de degré 1.

Cela posé, l'intégrale

$$J = \int \frac{\zeta(t)\, dt}{\frac{F(t)}{\varphi} - u},$$

prise le long du polygone fuchsien R_0 correspondant aux fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, est égale à zéro; il en résulte que la somme des résidus de la fonction $\dfrac{\zeta(t)}{\frac{F(t)}{\varphi} - u}$ est nulle dans l'intérieur de R_0.

Or les infinis de $\theta(t)$ sont : 1° les arguments des rn points communs à $f = 0$, $R = 0$ (résidus r_1); 2° les arguments des points à l'infini sur $f = 0$ (résidus r_2); 3° les arguments des points mobiles communs aux courbes $f = 0$ et $F - u\varphi = 0$ (résidus r_u). On trouve

$$r_u = \frac{dI_u}{du};$$

d'où, en écrivant que la somme des résidus est nulle,

$$\sum \frac{dI_0}{du} = -\sum (r_\beta + r_\gamma)$$

et, en intégrant entre u_0 et u,

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x_i^0} \frac{Q(x, y)}{R(x, y)}\, dx = -\int_{u_0}^{u} \sum (r_\beta + r_\gamma)\, du.$$

Les quantités r_β et r_γ sont faciles à calculer; elles ne doivent dépendre que de u et des éléments géométriques de la courbe $f = 0$ aux points où elle est coupée par $R = 0$ et $x_1 = 0$.

Hugoniot. — Sur l'écoulement d'un gaz qui pénètre dans un récipient de capacité limitée. (922-925).

Kronecker. — Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. (980-987).

Soient $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$ une série convergente à termes réels et $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ des quantités réelles, positives, croissant indéfiniment avec n; on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\psi_n} (\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \ldots + \varphi_n\psi_n) = 0,$$

et plus généralement pour des valeurs indéfiniment croissantes de m et de n (ces dernières croissant d'une manière convenable)

$$\lim \frac{1}{\psi_n - \psi_m} (\varphi_{m+1}\psi_{m+1} + \ldots + \varphi_n\psi_n) = 0.$$

De là ces théorèmes, si l'on prend $\varphi_k = \frac{c_k}{k}$, $\psi_k = k$:

Lorsque la série $\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} + \ldots$ est convergente, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = 0,$$

$$\lim_{m, n=\infty} \frac{1}{n - m} (c_{m+1} + c_{m+2} + \ldots + c_n) = 0.$$

Passant ensuite à l'étude de la série $\sum \frac{c_k}{k^{1+\rho}}$, et la supposant convergente pour des valeurs positives de ρ, γ compris zéro, M. Kronecker examine la question de savoir s'il est légitime d'écrire

$$\lim_{\rho=0} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{c_k}{k^{1+\rho}} = \lim_{n=\infty} \lim_{\rho=0} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{c_k}{k^{1+\rho}}.$$

Appell. — Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe. (991-993).

Soit α l'angle que fait à l'instant t la tangente en un point du fil avec l'axe des abscisses : l'équation de cette tangente en coordonnées rectangulaires sera

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = p',$$

p désignant une certaine fonction de α et t dont les dérivées successives par rapport à α seront appelées p', p'', ...

Les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -(p'+p'')\left(\varphi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right),$$
$$T = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - (p'+p'')\left(\psi + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right),$$

T désignant la tension, φ et ψ les composantes tangentielle et normale de la force extérieure.

L'élimination de T conduit à l'équation

$$2\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)$$
$$-(p''+p^{IV})\left(\psi + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) + (p'+p''')\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} + \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

qui définit p en fonction de α et t. Cette équation aux dérivées partielles du quatrième ordre conduit avec une grande facilité à la solution de plusieurs problèmes importants. On trouvera, par exemple, les mouvements dans lesquels le fil glisse le long d'une courbe animée d'un mouvement de translation en cherchant une intégrale de la forme

$$p = f(\alpha) + f_1(t) + f_2(t)\cos\alpha + f_3(t)\sin\alpha.$$

Goursat. — Sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer. (993-996).

M. Papperitz, qui s'est occupé de la recherche des intégrales algébriques de Kummer (*Habilitationschrift*, Leipzig, 1886), a établi pour cet objet un système d'équations arithmétiques dont toute solution ne correspond pas en général à une intégrale algébrique de l'équation de Kummer, ainsi que le montre M. Goursat.

Adam. — Démonstration analytique d'un théorème relatif aux surfaces orthogonales. (996-998).

Ce théorème, énoncé et démontré géométriquement par M. Maurice Lévy, est le suivant : Pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système orthogonal, il faut que sa ligne ombilicale soit une trajectoire orthogonale des surfaces qui le composent.

Serret (P.). — Sur l'octaèdre et la construction de la droite associée. (999-1002).

La recherche de la direction de la droite associée d'un octaèdre est ramenée

par M. Serret au problème : Étant donnés deux cônes du deuxième ordre, de sommet commun, construire la hauteur du trièdre conjugué commun à ces deux cônes; problème résoluble par la seule géométrie et dont l'auteur donne une solution analytique.

Hugoniot. — Sur le mouvement varié d'un gaz comprimé dans un réservoir qui se vide librement dans l'atmosphère. (1002-1004).

Soient V le volume du récipient, Ω la section de l'orifice, m le coefficient de contraction, p_1 la pression initiale, p_0 la pression atmosphérique, k le coefficient de détente. On a pour la durée T de l'écoulement.

1° Transformation isothermique (à la température θ) :

$$T = \frac{V}{m\Omega\sqrt{R(273+\theta)}}\left(0{,}120 + 1{,}212 \log \text{vulg.}\frac{p_1}{p_0}\right);$$

2° Transformation adiabatique :

$$T = \frac{V}{m\Omega\sqrt{R(273+\theta)}}\left[2{,}363\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}} - 2{,}269\right].$$

Fouret. — Sur certains problèmes dans lesquels on considère, sur une courbe plane, des arcs de même origine parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes. (1114-1116).

Un point matériel soumis, dans un plan, à une force dérivant d'un potentiel déterminé, part d'une origine O avec une vitesse donnée. Faire passer par O un système de courbes (C) homothétiques, telles que le mobile, décrivant une de ces courbes à partir de O, atteigne un point quelconque du plan dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante.

Ce problème n'a de solution que si la vitesse initiale est nulle et si l'expression du potentiel a la forme

$$\psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]\varphi^2(\theta),$$

r et θ désignant les coordonnées polaires dont O est le pôle. L'équation de la courbe (C) est alors

$$r^2 = k^2\varphi(\theta)e^{-\int^{\theta}\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}d\theta}.$$

M. Fouret résout le problème inverse, dans lequel le système (C) est donné et la force inconnue.

Serret (P.). — Sur un théorème connu. (1116-1118).

Correspondance des lignes de courbure sur deux surfaces à rayons vecteurs réciproques.

Fouret. — Sur certains problèmes d'isochronisme. (1174-1176).

Autonne. — Sur les groupes irréductibles d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. (1176-1178).

Une substitution à deux séries de trois variables homogènes x_i et u_i sera dite *crémonienne* si elle est à la fois birationnelle et de contact. Conformément aux notations employées dans une Communication précédente, l'auteur désigne une crémonienne S de cette manière

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ x, & u \end{smallmatrix}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ x, & u \end{smallmatrix}\right) \end{vmatrix}.$$

Une crémonienne devient *crémonique* si l'un des entiers a, b, c, d est 0 ou 1.

Les crémoniennes forment un groupe. Après l'étude des groupes *linéaires*, pour lesquels aucun des entiers a, b, c, d ne dépasse 1, l'auteur aborde celle des groupes *quadratiques*, où aucun de ces entiers ne dépasse 2.

Un groupe quadratique contient des substitutions linéaires crémoniques et crémoniennes linéaires proprement dites, pour lesquelles on a $a=b=c=d=1$. Une de ces dernières est dite *réductible*, lorsqu'elle est un produit de crémoniques, irréductible dans le cas contraire.

M. Autonne n'étudie que les groupes crémoniens irréductibles, composés de crémoniennes quadratiques proprement dites et dépourvus de réductibles.

Il démontre trois théorèmes qui épuisent l'étude de ces groupes, supposés d'ordre fini, en ramenant leur construction à celle de groupes connus.

Hugoniot. — Sur un théorème relatif au mouvement permanent et à l'écoulement des fluides. (1179-1181).

Suivant l'auteur, la vitesse au point du filet où se produit le maximum de contraction est égal à la vitesse du son correspondant à la pression et à la densité en ce point.

Stieltjes. — Sur les dérivées des séries qui procèdent suivant les puissances d'une variable. (1243-1246).

Étant donnée la fonction $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, représentée entre $x = 0$ et $x = 1$ par une série convergente pour $x = 1$, on doit prendre pour définition de $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{x=1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}.$$

Mais M. Stieltjes montre par divers exemples que $f'(1)$ n'existe pas toujours; et, en supposant même que $f'(1)$ existe, on n'est pas en droit de conclure que

$$\lim_{x=1} f'(x) = f'(1).$$

Toutefois cette dernière égalité est vraie dans le cas où la série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{n=k}^{n=\infty} a_n$$

est convergente.

Appell. — Sur les fonctions abéliennes. (1246-1248).

D'après M. Weierstrass, toute fonction périodique de deux variables u et v à quatre paires de périodes peut s'exprimer rationnellement à l'aide de trois fonctions de même nature

$$f_1(u, v),\quad f_2(u, v),\quad f_3(u, v),$$

liées par une équation algébrique irréductible.

De là résulte, en particulier, que $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ sont exprimables rationnellement au moyen de six fonctions d'une seule variable, savoir

$$f_1(x, 0),\quad f_2(x, 0),\quad f_3(x, 0),$$
$$f_1(0, y),\quad f_2(0, y),\quad f_3(0, y).$$

M. Appell montre comment, dans ce mode d'expression des fonctions $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$, se manifeste leur quadruple périodicité.

Gilbert. — Sur l'accélération angulaire. (1248-1250).

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS.

Tome XCVII; 1884.

Sturm (*Rudolf*). — Le cube et le tétraèdre régulier comme maximum et minimum. (1-12).

Démonstrations synthétiques et très exactes des deux théorèmes :

« De tous les prismes à base quadrilatérale, le cube possède, la surface étant donnée, le plus grand volume et, le volume étant donné, la plus petite surface.

» De tous les tétraèdres, le tétraèdre régulier possède, la surface étant donnée, le plus grand volume et, le volume étant donné, la plus petite surface. »

Steiner s'est déjà occupé de ces théorèmes, mais ses démonstrations n'atteignent pas le degré de simplicité qui lui ait paru satisfaisant. Tout en se servant d'un principe appliqué par Steiner et qui consiste à donner à une grandeur la valeur qu'elle possédera dans la figure de maximum ou de minimum,

M. Sturm parvient à réduire le prisme donné au cube en appliquant successivement quatre transformations dont chacune laisse subsister la même surface et sert à augmenter le volume. Tout de même trois transformations successives opérées sur un tétraèdre quelconque donné font ressortir à la fin le tétraèdre régulier comme celui de la plus petite surface.

Study (*E.*). — Construction géométrique de la représentation de l'anneau circulaire sur un rectangle. (13-15).

La construction part de la représentation connue de la cyclide.

Frobenius (*G.*). — Sur les bases de la théorie des fonctions de Jacobi. (16-48).

(Introduction de l'auteur). Si une fonction analytique uniforme $\varphi(u_1, \ldots, u_\rho)$ des ρ variables $u_1, \ldots, u_\rho$ satisfait à une équation

$$\varphi(u_1 + a_1, \ldots, u_\rho + a_\rho) = e^{2\pi i\left(b_\lambda + \frac{1}{2}\sum a_\lambda u_\lambda\right)}\varphi(u_1, \ldots, u_\rho),$$

où $a_1, \ldots, a_\rho, b, b_1, \ldots, b_\rho$ sont des constantes, je nomme le système des quantités $a_1, \ldots, a_\rho$: une *période* de la fonction φ ou bien une *période de première espèce*, le système des quantités $b_1, \ldots, b_\rho$: la *période de deuxième espèce* correspondante, et la constante c définie par l'équation $b = c + \frac{1}{2}\sum a_\lambda b_\lambda$: le *paramètre* correspondant à cette période. Soit $g(u_1, \ldots, u_\rho)$ une fonction entière des u_i du second degré; alors la fonction $e^{g(u_1, \ldots, u_\rho)}$, que j'appelle *fonction de Jacobi d'ordre zéro*, satisfait pour des valeurs quelconques de $a_1, \ldots, a_\rho$ à une équation de la forme indiquée ci-dessus. Si la fonction φ a des périodes indéfiniment petites et différentes de zéro, c'est-à-dire telles que les modules $a_1, \ldots, a_\rho$ soient tous inférieurs à une limite arbitraire, on sait que, d'après un théorème connu de Riemann, les dérivées partielles du deuxième ordre de $\log\varphi$ sont exprimables par moins de ρ agrégats linéaires des variables $u_1, \ldots, u_\rho$ et, suivant l'extension que M. Weierstrass a donnée à ce théorème, toutes par les mêmes agrégats. Donc φ est le produit d'une fonction de Jacobi d'ordre zéro et d'une fonction qui peut être transformée par une substitution linéaire en une fonction de moins de ρ variables. Réciproquement, une telle fonction a toujours des périodes indéfiniment petites. J'exclus ce cas de la recherche qui suit.

Plusieurs périodes se nomment *indépendantes* quand on n'en peut composer aucune par les autres en les ajoutant, chacune multipliée respectivement par des nombres rationnels (entiers ou fractionnaires). Si, dans le nombre de plusieurs fonctions homogènes et linéaires de n variables à coefficients réels, il ne se trouve pas n algébriquement indépendantes les unes des autres, on peut toujours assigner aux variables des valeurs entières telles que les valeurs des fonctions soient toutes inférieures à une limite fixée d'avance. Donc, si ces fonctions ne peuvent encore s'évanouir toutes pour des valeurs entières des variables, elles peuvent devenir indéfiniment petites pour ces valeurs. D'où l'on tire le théorème :

« Soient $a_{1\alpha}, \ldots, a_{\rho\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma$) σ périodes indépendantes d'une fonc-

tion qui ne possède pas de périodes infiniment petites, et soient

$$a_{\lambda\alpha} = a'_{\lambda\alpha} + ia''_{\lambda\alpha}, \qquad a^0_{\lambda\alpha} = a'_{\lambda\alpha} - ia''_{\lambda\alpha};$$

alors, dans le système à σ lignes et 2ρ colonnes,

$$a'_{1\alpha}, \ \ldots, \ a'_{\rho\alpha}, \ a''_{1\alpha}, \ \ldots, \ a''_{\rho\alpha},$$

et partant, dans le système

$$a_{1\alpha}, \ \ldots, \ a_{\rho\alpha}, \ a^0_{1\alpha}, \ \ldots, \ a^0_{\rho\alpha}$$

les déterminants de degré σ ne peuvent tous s'évanouir. »

Par conséquent, il faut que σ soit $\leqq 2\rho$. Une fonction de ρ variables qui est partout holomorphe à distance finie et qui possède exactement 2ρ périodes indépendantes, sera nommée *fonction de Jacobi du rang* ρ. Elle ne peut avoir de périodes infiniment petites; car, si elle en avait, on pourrait déterminer, d'après les recherches de M. Weierstrass, un système de grandeurs $r_1, \ \ldots, \ r_\rho$ tel que $a_1 = r_1 z, \ \ldots, \ a_\rho = r_\rho z$ fût une période de la fonction pour des valeurs quelconques de z, et alors elle aurait un nombre arbitraire de périodes indépendantes.

§ 1. Équations entre les périodes. § 2. Conditions d'inégalité pour les périodes. § 3. Conséquences des conditions A et B. § 4. Construction des systèmes de périodes. § 5. La forme bilinéaire $\Sigma k_{\alpha\beta} x_\alpha x'_\beta$. § 6. Fonctions de Jacobi du rang ρ. § 7. Les inégalités B et B'. § 8. Détermination de fonctions à périodes prescrites. § 9. Périodes primitives. § 10. Fonctions paires et impaires.

Sturm (*Rudolf*). — Sur le point tel que la somme de ses distances à n points donnés de l'espace soit un minimum. (49-61).

1° Soient $A_1, A_2, \ \ldots, A_n$ les points donnés, M le point cherché qui ne se confond pas avec un des points A_i, a_i l'angle compris entre MA_i et une droite quelconque fixe issue de M. La condition du minimum est

$$(\alpha) \qquad \Sigma \cos a_i = 0.$$

2° Soit un des points donnés, par exemple A_n, le point cherché; a'_i l'angle compris entre A_nA_i et une droite quelconque fixe issue de A_n. Alors on a

$$(\beta) \qquad 1 \geqq \Sigma \cos a'_i \geqq -1.$$

Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes et l'existence de l'une exclut celle de l'autre; elles servent à caractériser ou M ou A_n comme les seuls points de minimum absolu, propriété qu'on ne trouve éclaircie dans nul Mémoire sur ce problème. Ces conditions se prêtent à être énoncées sous une autre forme : 1° Si aucun des points A_i ne satisfait à la condition (β), il existe toujours un point M qui satisfait à la condition (α); alors les segments MA_1, MA_2, ..., MA_n ont la même direction et le même sens que les côtés d'un polygone (de l'espace) à n côtés égaux, ou bien n forces égales qui, sollicitant M suivant les lignes d'action MA_1, MA_2, ..., MA_n, se font équilibre. 2° Si l'un des points donnés A_i, soit A_n, résout le problème, les segments A_nA_1, A_nA_2, ..., A_nA_{n-1} ont la même direction et le même sens que les côtés égaux d'un polygone (de l'espace) qui a $n-1$ côtés égaux, chacun de longueur a, et un côté $\leqq a$.

L'application détaillée aux cas $n = 3$ et $n = 4$ et quelques remarques sur le problème du minimum de la somme des carrés des distances d'un point à n points donnés terminent le Mémoire intéressant et distingué par sa méthode tout élémentaire.

Ameseder (*Adolf*). — Sur le système nul général du second degré. (62-92).

Le système nul (*Nullsystem*) général se trouve défini par les propriétés :

α. A un point correspondent en général tout au plus α plans passant par lui, à un plan de position générale tout au plus β points situés dans lui.

β. Les points nuls (*Nullpunkte*) des plans d'un réseau ont pour lieu géométrique une surface de l'ordre $n + \alpha - 1$.

Pour le système nul général du second degré, l'auteur en tire $n - 1 = 1$, $\alpha = \beta = 1$; ce système est donc projectif et de seconde classe. Ce qui caractérise le système nul quadratique, c'est l'existence :

1. D'un réseau de plans $a[u]$ dont les éléments sont tous des plans nuls du centre a;

2. D'une courbe de second ordre c^2 qui se compose de points qui ont chacun un faisceau $\tau[E]$ de plans nuls.

I. D'un système ponctuel plan A[λ] dont les éléments sont tous des points nuls du plan ponctuel A ;

II. D'un faisceau de second ordre C_2 qui se compose de plans qui correspondent chacun à une série ponctuelle $\varepsilon[e]$ de points nuls.

La section conique singulière c^2 est dans le plan principal A, et le cône singulier C_2 a pour centre le point principal a. Les axes τ enveloppent la section T_2 de A et de C_2, et les droites ε forment les génératrices du cône K^2 qui projette c^2 de a.

Nous n'insisterons pas à suivre tous les raisonnements de l'auteur; contentons-nous de transcrire les titres des paragraphes du Mémoire :

§ 1. Généralités sur les systèmes nuls de degré supérieur. § 2. Les singularités du système nul quadratique. § 3. Relations entre les formes qui se correspondent dans le système nul. § 4. Corrélations qui engendrent le système nul. § 5. Le système des rayons directeurs et les complexes des rayons ordinaux du système nul quadratique. § 6. Le complexe tétraédral des rayons involutoires du système des rayons directeurs. § 7. Sections planes et projections. § 8. Première application. § 9. Deuxième application : la représentation de la surface de Kummer sur une surface du second degré. § 10. Espèces particulières du système nul quadratique.

Kronecker (*L.*). — La troisième démonstration de Gauss, de la loi de réciprocité pour les restes quadratiques, en forme simplifiée. (93-94).

Voir les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin, 19 juin 1884.

Segre (*Corrado*). — Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes. (95-110).

Étude du complexe de toutes les droites qui possèdent un moment donné m par rapport à une droite fixe. Si l'on multiplie la distance d'un point quelconque d'une droite à une autre droite par le cosinus de l'angle que la première droite fait avec la normale au plan qui joint l'autre à ce point, on aura un produit constant égal au moment des deux droites. Les droites d de l'espace pour lesquelles $mom(r, d) = m$ forment un complexe, tel que celles d'entre elles qui sont dans un plan quelconque enveloppent un cercle ayant le centre sur la droite r et ayant son rayon exprimé par $\frac{m}{\cos(rn)}$, où n représente la normale à ce plan. Les droites du complexe qui passent par un point quelconque P de l'espace forment un cône droit ayant pour axe la normale en P au plan qui joint P à r et dont les génératrices font avec cet axe un angle dont le cosinus est donné par $\frac{m}{(Pr)}$. La caractéristique de ce complexe, dans la classification de M. Weiler, est [(22) 11]; cependant, en le transformant projectivement, on n'obtient pas le complexe le plus général de cette classe, mais bien l'un de ceux qui appartiennent à la catégorie de complexes des droites coupant harmoniquement deux surfaces du second ordre.

Helmholtz (*H. von*). — Principes de la statique de systèmes monocycliques. (111-140).

Introduction. — J'entends par *systèmes monocycliques* des systèmes mécaniques, tels qu'ils présentent à leur intérieur un ou plusieurs mouvements stationnaires qui reviennent sur eux-mêmes, mais qui, lorsqu'il y en a plusieurs, ne dépendent que d'un seul paramètre en ce qui concerne la vitesse. Je suppose de plus que les forces en action entre les divers corps qui forment le système ne soient que des forces conservatrices, respectivement qu'il existe des liaisons rigides; mais il n'est pas nécessaire que les forces extérieures qui s'y ajoutent soient, elles aussi, conservatrices. Les problèmes que je vais traiter sont caractérisés comme *statiques,* vu que les changements subis par le régime du système se passent avec une si petite vitesse que le système ne s'écarte jamais sensiblement, pendant leur durée, des régimes tels qu'il pourrait persister indéfiniment à s'y maintenir.

L'intérêt principal de ces recherches consiste en ce que le mouvement de la chaleur, du moins pour ses effets observables à l'extérieur, montre les propriétés essentielles d'un système monocyclique et que la transformabilité restreinte des équivalents du travail qui ont passé sous forme de chaleur appartient à ceux des systèmes monocycliques sous certaines conditions. A parler rigoureusement, le mouvement calorifique n'est pas monocyclique. Chaque atome individuel varie vraisemblablement dans l'espèce de ses mouvements; mais dans un nombre énorme d'atomes tous les régimes possibles du mouvement se trouvent continuellement représentés, quoique chaque régime individuel soit inhérent tantôt à l'un, tantôt à l'autre des atomes, et c'est par cela que se présente le caractère mécanique d'un mouvement monocyclique. Dans les recherches théoriques sur le mouvement calorifique qu'on a pu effectuer jusqu'à présent, il a toujours fallu faire les calculs avec les moyennes des valeurs qui

se succèdent dans le cours du temps pour la même molécule. Les lois du mouvement qu'on a pu déduire ainsi malgré la fluctuation des valeurs individuelles ne peuvent s'invalider parce que la valeur moyenne est à composer de valeurs individuelles purement égales dans les systèmes monocycliques. Sous ce point de vue, les études à présenter se rattachent à la théorie de la chaleur.

§ 1. Récapitulation des lois de la chaleur. § 2. Les équations générales de la Mécanique pour des systèmes polycycliques. § 3. Systèmes monocycliques. § 4. Cas plus général du mouvement monocyclique, système enchaîné. § 5. Conditions sous lesquelles la force vive est dénominateur intégrant. § 6. Accouplement de deux systèmes. § 7. Équilibre du mouvement intérieur pour trois systèmes monocycliques.

Kronecker (*L.*). — Remarques sur un système d'équations différentielles qui a été traité dans le Travail précédent de M. von Helmholtz. (141-145).

Il s'agit du système d'équations aux différentielles partielles

$$\Sigma_k \varphi_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} = 0, \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

où les $n+1$ coefficients φ_{ik} sont des fonctions données des $m+1$ variables indépendantes x_h et des $n+1$ variables indépendantes y_k.

Stahl (*Wilhelm*). — Le système de rayons de quatrième ordre et de deuxième classe. (146-164).

Les systèmes de rayons de $n^{ième}$ ordre qui contiennent deux plans singuliers avec des faisceaux de rayons de $(n-1)^{ième}$ ordre peuvent se définir comme l'ensemble des rayons qui joignent les points correspondants de deux systèmes plans en correspondance uniforme. Cette construction du système de rayons de deuxième classe est donc praticable si son ordre n'est pas supérieur au quatrième [*voir* KUMMER, *Sur les systèmes algébriques de rayons* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1866)].

Alors la correspondance uniforme entre les deux plans est quadratique, et, en construisant le système de rayons, nous partons de cette relation. Dans les investigations des systèmes de rayons, il est utile d'employer diverses méthodes, de les déduire, pour saisir toutes les propriétés importantes de ces figures compliquées de l'espace. Voilà pourquoi M. Stahl ne part d'aucune génération déjà connue du système de rayons. Le système qui lui est adjoint et qui touche la même surface caustique que lui, sans se confondre avec lui, admet une représentation complète de ses propriétés essentielles. On y découvre des courbes doubles de la surface caustique; ces courbes sont engendrées par des faisceaux appartenant au système de rayons et situés dans des plans singuliers qui ne sont pas identiques à ceux du premier système. Le second système conduit encore à une construction rapide de l'arête de rebroussement de la surface caustique. Enfin M. Stahl signale un cas spécial où l'arête de rebroussement, qui est du douzième ordre, se décompose en trois courbes du quatrième ordre, et il expose les modifications qui se présentent par un abaissement de l'ordre du premier système de rayon.

Dans un post-scriptum, l'auteur renvoie le lecteur à un Mémoire de M. Hirst : *On cremonian congruences*, publié dans les *Proceedings of the London mathematical Society*, vol. XIV, 1883. Ce Mémoire n'a paru qu'après que le travail de M. Stahl avait été envoyé à la rédaction du *Journal für Mathematik*. On y trouve la même construction du système de rayons de quatrième ordre et de deuxième classe. Cependant la construction du système adjoint et les singularités de la surface caustique qui en découlent forment des traits distinctifs et intéressants du Mémoire de M. Stahl.

Caspary (*F.*). — Sur le théorème d'addition des fonctions thêta à plusieurs arguments. (165-171).

D'une identité qui a lieu pour le produit de deux fonctions thêta, M. Weierstrass a tiré le théorème d'addition des fonctions thêta hyperelliptiques en se servant d'un procédé d'élimination particulier. La même voie peut conduire à un théorème d'addition des fonctions thêta à plusieurs arguments si l'on réussit à faire évanouir un nombre convenable de fonctions thêta. M. Caspary montre actuellement qu'une identité, résultant du théorème de multiplication des déterminants, appliquée à cette formule de produits de M. Weierstrass, fournit immédiatement, sous forme définitive, un théorème d'addition des fonctions thêta à plusieurs arguments sans qu'on ait besoin de recourir à aucune élimination. Ce théorème d'addition, d'où se tire tout à la fois celui gagné par M. Frobenius au moyen d'études sur les caractéristiques de Göpel (*Journ.* t. 89), donne encore lieu à quelques conclusions et spécialités.

Blasendorff (*M.*). — Sur les systèmes optiques de rayons. (172-176).

Extrait de la dissertation inaugurale du même auteur :

Ueber die Beziehungen zwischen zwei allgemeinen Strahlensystemen, von welchen das eine durch die verschiedensten Reflexionen und Brechungen in Medien mit beliebiger Wellenfläche aus dem anderen hervorgegangen ist, und die hieraus für optisch darstellbare Strahlensysteme sich ergebenden Folgerungen. Berlin, 1883.

Hermes (*O.*). — Sur une certaine courbe du troisième degré. (177-187).

La courbe est le lieu du point P d'où les côtés AC et BC d'un triangle ABC sont vus sous le même angle visuel. Elle est du troisième ordre et a un point double dans le sommet C; les deux bissectrices de l'angle C et de son angle adjacent sont les tangentes des deux branches en C. L'équation peut se mettre sous la forme $(ay - bx)(x^2 + y^2) + ab(x^2 - y^2) = 0$. M. Hermes énonce un nombre considérable de théorèmes sur la courbe. En rédigeant son travail, il n'avait pas une connaissance complète des Mémoires qui ont paru sur ce sujet. La liste de ces travaux a été publiée par M. Schoute au tome 99 du même Journal.

Frobenius (*G.*). — Sur les bases de la théorie des fonctions de Jacobi. Second Mémoire. (188-223).

Dans la première Partie de ce travail (*voir* plus haut), l'auteur avait étudié les équations et les inégalités qui sont nécessaires et suffisantes pour que $\frac{1}{2}\rho^2$ grandeurs puissent être les périodes de premier et second genre d'une fonction de Jacobi du rang ρ. C'est pour obtenir les conditions d'inégalité que M. Frobenius, en introduisant de nouvelles variables x_α et en multipliant par une fonction de Jacobi d'ordre zéro, avait déduit de la fonction donnée une autre dont la norme reste inaltérée si une quelconque des grandeurs x_α est augmentée de l'unité. Cette circonstance l'avait engagé à développer cette norme en série suivant les puissances des variables $E(x_\alpha)$. Ainsi, il parvint à une représentation remarquable des fonctions de Jacobi que M. Kronecker a développée le premier dans ses fameuses recherches sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Les 2ρ périodes entrent d'une manière asymétrique dans la représentation ordinaire d'une fonction de Jacobi du rang ρ par une série ρ-uplement infinie dont les termes sont des fonctions de Jacobi d'ordre zéro; car, si l'on augmente les variables de ρ des périodes, chaque terme de la série reste inaltéré (abstraction faite d'un facteur commun exponentiel); mais si on les augmente d'une des ρ autres périodes, les différents termes de la série se transforment l'un dans l'autre. Comme, pour une fonction de Jacobi d'ordre zéro, les nombres $k_{\alpha\beta}$ s'évanouissent tous, il faut d'abord déduire du système donné de périodes un autre pour lequel on a $k_{\alpha\beta} = 0$, lorsque tous les deux indices sont $\leqq \rho$, quand il s'agit d'obtenir ce développement en série. La forme employée pour représenter une telle fonction par une série 2ρ-uplement infinie (§§ 2-6), est symétrique par rapport à toutes les variables et ne suppose nulle sorte de transformations arithmétiques, ce qui paraît très remarquable. Presque sans le concours de la théorie des formes linéaires et bilinéaires alternées, elle peut servir à démontrer le théorème (§ 7) que le nombre des fonctions de Jacobi linéairement indépendantes et isotropes est égal à la racine carrée du déterminant $|k_{\alpha\beta}|$, et à développer (§§ 8 et 9) les formules pour le nombre des fonctions linéairement indépendantes qui sont paires ou impaires. Ce qui est indispensable, c'est une proposition arithmétique relative à la comparaison de deux domaines périodiques dont l'un fait partie de l'autre. Pour ne rien omettre, l'auteur en a donné une démonstration analytique qui repose sur les principes énoncés par Dirichlet (t. XIX du même Journal) et qui a été achevé selon ses indications (t. XL). A la fin, on trouve une formule qui est une généralisation de la formule désignée par M. Prym comme formule thêta de Riemann.

Nœther (*M.*). — Démonstration et extension d'un théorème dû à M. Weierstrass, de la théorie des fonctions et de l'Algèbre. (224-229).

Scheeffer (*Ludwig*). — Contribution à la théorie des fonctions $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$. (230-241).

On a

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx, \quad P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\,dx, \quad Q(z) = \int_1^x e^{-x} x^{z-1}\,dx.$$

Dans un Mémoire antérieur (*Journ.*, t. LXXXII, p. 165), M. Prym a montré que ces fonctions sont parfaitement définies par deux conditions, par exemple $\Gamma(z)$ par celles-ci :

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = 1, \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

M. Schecffer fait voir que trois des conditions de M. Prym peuvent être remplacées par d'autres qui conduisent, comme celles-là, à des représentations analytiques des trois fonctions, mais qui méritent de leur être préférées parce qu'elles peuvent se tirer immédiatement des intégrales.

Reye (*Th.*). — Sur les surfaces aux singularités de complexes quadratiques de rayons et sur leurs lignes asymptotiques. (242-260).

Dans la géométrie analytique des complexes de rayons et de leurs tissus, des raisons puisées dans la forme et dans la matière justifient non seulement l'emploi exclusif des coordonnées de lignes ou de complexes, mais on y est même astreint quand on s'impose certaines limites. En faisant abstraction des coordonnées de points et de plans, on parvient enfin à reconnaître cette branche importante de la Géométrie comme autonome et indépendante de la géométrie analytique de l'espace à trois dimensions. En même temps l'emploi, introduit par principe, de coordonnées homogènes de complexes, fait ressortir les relations mutuelles de complexes linéaires en involution, qui avaient échappé à Plücker; témoin les premiers travaux de M. Klein qui s'y rapportent. Cependant, il serait fort peu convenable d'éviter l'application des coordonnées de points et de plans dans les études détaillées des surfaces liées aux complexes. En reprenant le fil des idées exposées dans un travail antérieur (t. XCV, voir *Bulletin*, XI$_2$, p. 68), M. Reye se sert maintenant de ces coordonnées aussi bien que de celles des lignes droites pour étudier les surfaces aux singularités des complexes quadratiques. Ces surfaces de Kummer lui présentent plusieurs genres de courbes à étudier, entre autres les lignes asymptotiques. On sait que MM. Klein et Lie ont découvert en 1870 (*Bulletin*, II, p. 72) que l'ordre ou la classe de ces courbes est 16, qu'elles ont les 16 points nodaux et les 16 plans singuliers de la surface adjointe de Kummer pour points de rebroussement et plans osculateurs stationnaires, et qu'elles possèdent 96 tangentes stationnaires dont les points de contact se répartissent également entre six lignes asymptotiques distinguées de huitième ordre et de huitième classe. M. Reye démontre ces propriétés par un nouveau raisonnement emprunté à ses considérations géométriques et fait de plus voir qu'on peut joindre les lignes asymptotiques d'une surface de Kummer à un point quelconque de l'espace par des surfaces du quatrième ordre. Ces surfaces appartiennent à une gerbe de surfaces et forment une variété quadratique, c'est-à-dire qu'elles ont en général 64 points communs, et il y en a toujours deux qui passent par tout autre point.

Hauck (*G.*). — Théorie de la correspondance trilinéaire de systèmes plans. Article II. La position orientée. (261-276).

Suite du Mémoire : *Nouvelles constructions de la perspective et de la photogrammétrie* [t. XCV, p. 1; voir *Bulletin*, XI$_2$, p. 58]. En projetant de

trois centres un système de l'espace sur trois plans qui ont un seul point commun, on obtient trois systèmes plans trilinéaires en position orientée. Réciproquement, trois systèmes trilinéaires définis par les projectivités respectives peuvent toujours être mis en position orientée. Quand on a préalablement réuni trois points quelconques correspondants, il y a huit positions orientées différentes, mais qui ne sont pas toujours réelles. Les critères pour la réalité de ces solutions sont amplement discutés. L'établissement de la position orientée se fait fort simplement si l'on choisit pour points fondamentaux trois points correspondants situés à l'infini. En déterminant encore convenablement les éléments décisifs, on peut amener des positions remarquables par leur simplicité. § 1. Transformation de la position orientée. Problème général. § 2. Les lignes de fuite. Position orientée à sections fondamentales parallèles. § 3. Ponctuelles adjointes semblables et égales. § 4. Position orientée à sections fondamentales coïncidantes. § 5. Conclusions. § 6. Orientation plane plus générale.

Milinowski. — Contribution à la théorie des courbes gauches de quatrième ordre et de première espèce. (277-316).

L'auteur s'est proposé de développer les propriétés des courbes planes du troisième ordre et de celles du quatrième ordre à deux points doubles en exploitant les ressorts de la géométrie de position pour la théorie des courbes gauches du quatrième ordre et de première espèce. C'est M. Reye qui a tiré dans sa *Geometrie der Lage* de ces considérations quelques-unes des propriétés principales des courbes planes du troisième ordre; cependant sa voie ne conduit pas à leurs propriétés polaires et il ne prend pas en considération les courbes du quatrième ordre. Les connaissances que M. Milinowski suppose comme acquises sont celles contenues dans le Livre cité de M. Reye et dans celui de M. Schroeter : *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung*. Toute proposition gagnée pour les courbes gauches de quatrième ordre et de première espèce fournit des résultats analogues pour les courbes planes mentionnées. Dans la première partie, le centre de projection étant choisi sur la courbe gauche, la projection devient une cubique plane libre de singularités. Trois sections traitent les différents modes de leur génération, leurs propriétés polaires et harmoniques et dans une quatrième l'auteur étudie les faisceaux de cubiques planes. Dans la seconde Partie du Mémoire, le centre de projection ne se prend plus sur la courbe gauche; par conséquent, la projection est une courbe plane de quatrième ordre à deux points doubles. Outre les mêmes propriétés que dans le cas des cubiques, on trouve ici les théorèmes sur les sections coniques en contact.

Helmholtz (*H. von*). — Principes de la statique des systèmes monocycliques. Second Mémoire. (317-336).

§ 8. Un caractère général des liaisons physiques de corps en mouvement. « Dans le § 5 de mon premier Mémoire, j'ai discuté les conditions sous lesquelles la force vive est un dénominateur intégrant dans un système monocyclique composé. On a reconnu que cela en est ainsi pour tous les cas connus d'accouplement mécanique de deux mouvements cycliques. Mais les réflexions qu'on y a faites sur les relations caractéristiques de liaisons de corps en mouvement n'ont pas suffi pour exclure la possibilité d'autres modes de liaisons

où la conclusion mentionnée n'aurait pas lieu.... Je vais mettre à profit, dans ce paragraphe, un principe qu'on n'a pas employé jusqu'à présent et qui se rapporte au caractère de toutes les liaisons à effectuer entre des corps en mouvement : c'est lui qui permet la généralisation pleine et entière de la proposition mentionnée et d'où l'on peut tirer tout à la fois une démonstration qui ne suppose pas l'intégration des équations différentielles pour le mode d'enchaînement. » § 9. L'intégration des équations d'enchaînement pour un système physiquement lié.

Runge (*C.*). — Sur la liaison des valeurs d'une fonction algébrique. (337-344).

Dans la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe, il est d'une importance fondamentale de résoudre le problème : Soit $f(u, z) = 0$ une équation algébrique entre la fonction u et la variable indépendante z; soit $u = u'$ la valeur de u pour $z = z'$, quelle valeur prendra u pour $z = z''$ quand on se donne le chemin parcouru par z depuis z' à z''? Ce problème, posé et résolu par Puiseux dans le *Journal de Liouville*, t. XV, est actuellement traité par M. Runge par des méthodes algébriques rapides et élégantes.

THE MESSENGER OF MATHEMATICS, edited by W.-Allen Whitworth, C. Taylor, W.-J. Lewis, R. Pendlebury, J.-W.-L. Glaisher. London and Cambridge, Macmillan and C° (1).

Tome XV; 1885-1886.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur certaines sommes de produits de quantités dépendant des diviseurs d'un nombre. (1-20).

Calcul des expressions de la forme

$$f(1)f(n-1)+f(2)f(n-2)+\ldots+f(n-1)f(1),$$

ou de la forme

$$f(1)\,\mathrm{F}(n-1)+f(2)\,\mathrm{F}(n-2)+\ldots+f(n-1)\,\mathrm{F}(1),$$

où $f(n)$ et $\mathrm{F}(n)$ désignent une des sept fonctions numériques suivantes :

$\sigma(n)$ = la somme des diviseurs de n;
$\Delta(n)$ = la somme des diviseurs impairs;
$\mathrm{D}(n)$ = la somme des diviseurs pairs;
$\Delta'(n)$ = la somme des diviseurs conjugués des diviseurs impairs;
$\mathrm{D}'(n)$ = la somme des diviseurs conjugués des diviseurs pairs;
$\zeta(n) = \Delta(n) - \mathrm{D}(n)$;
$\zeta'(n) = \Delta'(n) - \mathrm{D}'(n)$.

(1) Voir *Bulletin*, X$_2$, p. 194.

Ces fonctions numériques se présentent comme coefficients dans les développements en série des fonctions elliptiques du module.

Chree (*Charles*). — Sur les vibrations d'un gaz contenu entre deux sphères concentriques, particulièrement dans le cas où les rayons des deux sphères sont presque égaux. (20-23).

Roberts (*R.-A.*). — Sur les triangles d'aire maximum ou minimum inscrits dans une cubique plane (24-25).

Le problème revient à inscrire dans une cubique un triangle tel que la tangente en chaque sommet soit parallèle au côté opposé. Il y a quarante-huit solutions dans le cas d'une cubique non singulière, neuf dans le cas d'une cubique nodale. La solution repose sur l'emploi des courbes hessienne et cayleyenne.

Roberts (*R.-A.*). — Sur certaines courbes du sixième ordre. (26-32).

Soit $X = (x-a)(x-b)(x-d)$; on sait que l'équation différentielle

$$\frac{dx_1}{X_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{dx_2}{X_2^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

qui peut d'ailleurs se ramener à l'équation d'Euler, possède une intégrale générale algébrique. Si dans cette intégrale on remplace x_1 par $x + iy$ et x_2 par $x - iy$ et qu'on soumette les courbes ainsi obtenues à une inversion, on obtient un système de courbes C du sixième ordre, jouissant de propriétés intéressantes. Ces courbes sont de douzième classe; elles admettent pour points triples les points circulaires à l'infini et ont en outre trois points doubles à distance finie. Elles peuvent être considérées de trois manières différentes comme l'enveloppe d'un cercle qui coupe orthogonalement un cercle fixe J et dont le centre décrit une quartique tricuspidale.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Expressions des cinq premières puissances de la série dont les coefficients sont les sommes des diviseurs des exposants. (33-36).

Les coefficients des nouvelles séries s'expriment au moyen des fonctions numériques $\sigma_s(n)$, qui représentent les sommes des $s^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de n.

Christine Ladd-Franklin. — Le paradoxe géométrique de Carnot-d'Alembert. (36-37).

Elliott (*E.-B.*). — Sur les petits mouvements des systèmes. (38-40).

Mannheim (*A.*). — Sur la surface de l'onde. (40-41).

Piers (*C. Ward*). — Sur la rationalisation de $a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} = 0$. (42-44).

Cette opération revient évidemment à éliminer m entre les deux équations $a(m+1)^n = (-1)^n c$, $am^n = b$. Les calculs sont développés pour $n = 3$ et $n = 5$.

Forsyth (*A.-R.*). — Une méthode particulière pour intégrer quelques équations linéaires du second ordre. (44-48).

Si l'on connaît une intégrale particulière de l'équation $\frac{dP}{dx} - P^2 = I$, l'intégration de l'équation linéaire $\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = 0$ est ramenée à celle d'une équation du premier ordre $\frac{dz}{dx} + 2Pz = A$, où A désigne une constante arbitraire. Appliquée à l'équation de Gauss, cette méthode conduit à des résultats connus.

Forsyth (*A.-R.*). — Le théorème d'addition pour les intégrales de seconde et de troisième espèce. (49-57).

Cayley. — Une transformation algébrique. (58-59).

Cayley. — Solution de l'égalité $(a, b, c, d) = (a^2, b^2, c^2, d^2)$. (59-61).

Il s'agit de trouver quatre quantités différentes de zéro qui soient identiques à leurs carrés pris dans un certain ordre.

L'illustre géomètre montre qu'il existe huit équations du quatrième degré dont les racines jouissent de cette propriété; les racines s'expriment très simplement au moyen des racines imaginaires de l'unité.

Cayley. — Note sur une équation du troisième degré. (62-64).

Étant donnée une équation du troisième ordre

$$x^3 + 3cx + d = 0, \tag{1}$$

il existe deux nombres T_1, T_2 tels que les trois racines α, β, γ de l'équation (1) vérifient les relations

$$\beta = \alpha T_1 + (\alpha^2 + 2c)T_2, \qquad \gamma = \beta T_2 + (\beta^2 + 2c)T_1, \qquad \alpha = \gamma T_1 + (\gamma^2 + 2c)T_2,$$

de sorte que, par l'adjonction des irrationnelles T_1, T_2, l'équation cubique peut être regardée comme une équation abélienne. Plus généralement, si les racines d'une équation du troisième ordre sont α, β, γ, cette équation se reproduit par

la transformation de Tschirnausen

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & x^2 \\ \beta & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \gamma & 1 & \beta & \beta^2 \\ \alpha & 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = 0,$$

dont les coefficients s'expriment rationnellement au moyen des coefficients de l'équation proposée et de la racine carrée du discriminant.

Forsyth (*A.-R.*). — Correction d'une erreur contenue dans un article précédent. (64).

Mac-Mahon (*P.-A.*). — Note sur la rationalisation. (65-67).

Soit $x^{\frac{1}{m}} = a_1^{\frac{1}{m}} + a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{m}}$; x vérifie une équation de degré m^{n-1} dont les racines sont les $m^{\text{ièmes}}$ puissances des différentes valeurs que peut prendre le second membre de la formule précédente. L'auteur donne une méthode générale pour calculer les coefficients de cette équation et, par suite, le dernier terme qui, égalé à zéro, donne une équation équivalente à l'équation irrationnelle

$$a_1^{\frac{1}{m}} + a_2^{\frac{1}{m}} + \ldots + a_n^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Mathews (*G.-B.*). — Note relative au dernier théorème de Fermat. (68-74).

Simplification d'une partie des démonstrations de Kummer.

Sylvester (*J.-J.*). — Note sur la dérivée schwarzienne. (74-76).

Buchheim (*Arthur*). — Note sur l'algèbre linéaire associative. (76-78).

Fujisawle (*R.*). — Sur une certaine classe d'intégrales définies. (79-80).

Johnson (*A.-R.*). — Développement d'une fonction en séries de fractions. (81-87).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur les réciprocants. (88-92).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les fonctions ζ. (92-148).

Formes de la fonction ζ. — Addition de K, iK', K + iK' à l'argument. — Fonctions de l'argument ix. — Valeurs des fonctions pour les arguments 0, K, iK'. — Les fonctions $Z_1(x)$, $Z_2(x)$, $Z_3(x)$. — Les fonctions $Z_4(x)$ et $\zeta_4(x)$. — Les fonctions $iZ_3(x)$, $gZ_4(x)$, $eZ_4(x)$. — Correspondances entre ces fonctions.

— Addition à l'argument de multiples de K et de iK'. — Relations entre les fonctions $g\,Z_\iota(x)$. — Valeurs des fonctions pour les arguments o, K, iK', ... — Fonctions de l'argument ix. — Le théorème d'addition. — Formules relatives aux fonctions $i\,Z_\iota(x)$, $g\,Z_\iota(x)$, $e\,Z_\iota(x)$. — Expression de $i\,Z_\iota(x)$ $g\,Z_\iota(x)$, $e\,Z_\iota(x)$ par des intégrales. — Valeurs de $\int \mathrm{sn}^2 x\,dx$, $\int \mathrm{cn}^2 x\,dx$, ..., en fonction de $g\,Z_\iota(x)$. — Valeurs de $\int \mathrm{sn}^4 x\,dx$, $\int \mathrm{cn}^4 x\,dx$, ... — Valeurs de $\int \mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{cn}^2 x\,dx$, $\int \mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{dn}^2 x\,dx$, ... — Dérivées de $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, ... par rapport au module. — Dérivées de $k\,\mathrm{sn}\,x$, $k\,\mathrm{cn}\,x$, ..., par rapport au module. — Différentiation par rapport au module lorsque l'argument est $\frac{2Kx}{\pi}$. — Dérivées des fonctions $g\,Z_\iota(x)$ par rapport à k. — Dérivées de $i\,Z_\iota(x)$, ... — Valeurs des dérivées lorsque l'argument est $\frac{2Kx}{\pi}$. — Les dérivées de $(\log \mathrm{sn}\,x)'$, $(\log \mathrm{cn}\,x)'$, ... — Développement des fonctions $g\,Z_\iota(x)$ suivant les puissances croissantes de x. — Liste d'intégrales indéfinies.

Roberts (*R.-A.*). — Sur un théorème du calcul des variations. (148-152).

Soit

$$du^2 = f'(X_1)\,dx_1^2 + f'(X_2)\,dx_2^2 + \ldots + f'(X_n)\,dx_n^2,$$

où

$$f(X) = (X - X_1)\ldots(X - X_n).$$

Les équations qui expriment que la variation $\delta \int du$ est nulle peuvent se mettre sous la forme suivante

$$\sum_1^n \frac{dx_i}{\sqrt{\Phi(x_i)}} = 0, \qquad \sum_1^n \frac{X_i^\nu\,dx_i}{\sqrt{\Phi(x_i)}} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où

$$\Phi(x_i) = (X_i + c_1)(X_i + c_2)\ldots(X_i + c_{n-1}).$$

Roberts (*R.-A.*). — Sur les cubiques planes satisfaisant à certaines conditions. (152-155).

Détermination des cubiques passant par trois points en ligne droite et tangentes à trois couples de droites issues de ces points.

Lachlan (*R.*). — Un théorème de Géométrie. (155-158).

Théorème sur les points d'intersection de six coniques, analogue au théorème de Pascal.

Alexander (*P.*). — Une démonstration symbolique du théorème de Fourier sur l'intégrale double. (158-164).

Forsyth (*A.-R.*). — Note sur la théorie des fonctions doublement périodiques de Weierstrass. (165-183).

Exposition de la théorie de Weierstrass et des propriétés principales des fonctions pu et σu. La méthode d'exposition est celle de Liouville.

Lloyd Tanner (*H.-W.*). — Solution numérique d'une équation biquadratique par le procédé de Descartes. (184-187).

Recherche des diviseurs du second degré à coefficients rationnels.

Lloyd Tanner (*H.-W.*). — Note sur la classification de quelques séries algébriques. (187).

Kempe (*A.-B.*). — Sur une extension de l'Algèbre ordinaire. (188-190).

Morley (*F.*). — Une conique des neuf lignes. (190-192).

Cayley. — Note de Géométrie analytique sur les coniques. (192).

Il existe une infinité de triangles inscrits dans la conique $yz + zx + xy = 0$ et circonscrits à la conique $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$.

Tome XVI; 1886-1887.

Taylor (*C.*). — Sur l'ordre des lieux orthoptiques. (1-5).

Le lieu orthoptique d'une courbe de classe n, c'est-à-dire le lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette courbe, est en général d'ordre $n(n-1)$ et passe $\frac{n(n-1)}{2}$ fois par les points circulaires à l'infini.

Elliott (*E.-B.*). — Sur la définition d'un invariant. (5-8).

On définit ordinairement un invariant par l'équation de condition

$$\Phi(A, B, C, \ldots) = \Delta^w \Phi(a, b, c, \ldots, l),$$

Δ étant le déterminant de la substitution linéaire effectuée sur les variables. L'auteur propose avec raison de remplacer cette équation par la relation plus générale

$$\Phi(A, B, C, \ldots) = \psi(l, m, \ldots, l', m', \ldots)\, \Phi(a, b, c, \ldots),$$

l, m, ..., l', m', ... désignant les coefficients de la substitution. Avec cette définition, il y a lieu de démontrer que ψ se réduit à une puissance de Δ; la démonstration se fait très simplement en appliquant le théorème d'Euler relatif aux fonctions homogènes.

Brill (*J.*). — Sur l'application à la Géométrie plane de la théorie des quantités complexes. (8-20).

Si l'on représente une quantité complexe par un vecteur, toute identité algébrique est susceptible d'être interprétée géométriquement. En appliquant

cette méthode à quelques identités simples, l'auteur parvient à des théorèmes de Géométrie qu'il serait peut-être un peu long de démontrer directement.

Lachlan (*R.*). — Note sur une classe d'identités algébriques. (21-22).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n variables liées par les relations

$$\Sigma x_i = \Sigma a_i x_i = \ldots = \Sigma a_i^{n-2} x_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

on a

$$\Sigma A_i^p a_i^q x_i^{p+1} = 0,$$

si $p + q < n - 2$, et

$$\Sigma A_i^p a_i^q x_i^{p+1} = (\Sigma a_i^{n-2} x_i)^{p+1},$$

si $p + q = n - 2$, en posant

$$A_r = (a_r - a_1)(a_r - a_2)\ldots(a_r - a_n).$$

Peter Alexander. — Une démonstration de la série de Fourier pour les fonctions périodiques. (23-26).

Johnson (*A.-R.*). — Sur l'équation différentielle des surfaces orthogonales de Cayley. (27-33).

Johnson (*A.-R.*). — Note sur la cyclide. (33-35).

Buchheim (*Arthur*). — Note sur quelques théorèmes de la théorie des fonctions elliptiques de Weierstrass. (35-36).

Jenkins (*M.*). — Note sur l'équation des sinus en Trigonométrie sphérique. (37-39).

Taylor (*H.-M.*) — Sur une interprétation géométrique de l'expression algébrique qui, égalée à zéro, représente une courbe ou une surface. (39-41).

Si $S = 0$ est l'équation d'une conique, S est proportionnel au produit des normales menées du point (x, y, z) à la conique et des perpendiculaires abaissées du centre sur les tangentes menées par les pieds de ces normales. Le théorème est vrai aussi pour les quadriques.

Peter Alexander. — Extension des théorèmes de Fourier sur les séries trigonométriques. (42-61).

Buchheim (*Arthur*). — Sur l'algèbre double (62-63).

Johnson (*A.-R.*). — Note sur les surfaces du second et du troisième ordre. (63-66).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Formules relatives aux fonctions elliptiques. (67-86).

Dérivées de $\log \operatorname{sn} x$, $\log \operatorname{cn} x$, ... — Expressions de $\frac{d}{dx} \log \frac{d}{dx} \log \operatorname{sn} x$, ... — Valeurs de $\operatorname{sn}^2 x$, $\operatorname{ds}^2 x$, $\operatorname{cs}^2 x$. — Les expressions

$$\operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x \pm \operatorname{dn}^2 x \operatorname{sn}^2 x \pm k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{cn}^2 x, \quad ....$$

— Les expressions $\operatorname{sn} x \pm \operatorname{ds} x \pm \operatorname{cs} x$, ... — Les expressions

$$k'^2 \operatorname{sn} x \pm \operatorname{ds} x \pm k^2 \operatorname{cs} x, \quad ....$$

— Valeurs de $\int \operatorname{sn} x \, dx$, ... — Remarques sur les douze fonctions.

Woolsey Johnson (*W.*). — Sur un point relatif aux méthodes symboliques d'intégration. (86-90).

Johnson (*A.-R.*). — Une démonstration du théorème de Fourier. (90-98).

Lachlan (*R.*). — Systèmes de cercles orthogonaux. (98-109).

Étude de deux systèmes de quatre cercles, le premier système étant pris arbitrairement, le second étant formé des quatre cercles dont chacun coupe orthogonalement trois cercles du premier système.

Notes de Mathématiques. — *Carr* (*G.-S.*) : Démonstration de la formule qui donne la torsion d'une ligne géodésique. — *Jenkins* (*M.*) : Démonstration du théorème de Holditch. — *Johnson* (*A.-R.*) : Correction à un article précédent. — *Buchheim* (*Arthur*) : Note sur l'algèbre triple. (110-114).

Greenhill (*A.-G.*). — L'équation des périodes des vibrations latérales. (115-125).

Tucker (*R.*). — Sur le cercle de l'angle *sinus-triple*. (125-126).

Mansion (*Paul*). — Définition d'un invariant. (127-129).

Cayley. — Comparaison des fonctions elliptiques de Weierstrass et de Jacobi. (129-132).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le passage des produits infinis aux séries pour les fonctions elliptiques. (133-139).

Lachlan (*R.*). — Sur les coniques satisfaisant à certaines conditions et touchant une conique donnée. (140-143).

Détermination des coniques : 1° passant par quatre points donnés et tangentes à une conique donnée; 2° passant par trois points donnés et osculatrices à une conique donnée; 3° passant par trois points donnés et doublement tangentes à une conique donnée; 4° passant par deux points donnés et ayant un contact du quatrième ordre avec une conique donnée. La méthode employée est due à Clifford (*Philosophical Transactions*, t. CLXIV).

Taylor (*H.-M.*). — Extension d'une propriété de l'inversion. (143-144).

Imaginons que l'on soumette un point M du plan à un nombre quelconque d'inversions; le centre des moyennes distances des différents transformés de M est un autre point M'. La généralisation de M. Taylor consiste en ceci : deux courbes quelconques décrites par le point M se coupent sous le même angle que les courbes décrites par le point M'.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le moyen d'élever au carré les séries qui donnent $k\rho \operatorname{sn} u$, $k\rho \operatorname{cn} u$, $\rho \operatorname{dn} u$. (145-149).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le carré de la fonction ζ. (150-151).

Lachlan (*R.*). — Sur un système poristique de cercles. (152-162).

Dans le Volume XIX des *Annales* de Gergonne, Steiner a donné la condition pour qu'il existe une chaîne fermée composée de n cercles dont chacun touche le précédent, ainsi que deux cercles fixes. L'auteur de cet article s'est proposé de généraliser le problème en considérant des séries de cercles dont chacun coupe le précédent, ainsi que deux cercles fixes, sous des angles constants.

Greenhill (*A.-G.*). — Les lignes de Sumner sur les Cartes de Mercator. (163-167).

Forsyth (*A.-R.*). — Sur la solution de l'équation de Legendre dans un cas particulier. (168-176).

Correction d'une erreur contenue dans les §§ 93-95 du Traité de l'auteur sur les équations différentielles.

Burnside (*William*). — Sur la trisection des périodes pour les fonctions elliptiques de Weierstrass. (177-180).

Morley (*F.*). — Quelques propriétés des coniques homofocales et d'une cubique dérivée. (181-185).

Woolsey Johnson (*W.*). — Note sur les solutions singulières des équations différentielles homogènes. (186-188).

L'équation différentielle $y = x\varphi(p)$ admet l'intégrale particulière $y = p_1 x$, où p_1 est une racine de l'équation $p - \varphi(p) = 0$. Si p_1 est en même temps racine de l'équation $\varphi'(p) = 0$, $y = p_1 x$ est une solution singulière.

Ferrers (*N.-M.*). — Le carré de $\rho\, \mathrm{dn}\, u$. (189-190).

Gutzmer (*A.*). — Note sur les coefficients du binôme. (189-192).

THE LONDON, EDINBURGH AND DUBLIN PHILOSOPHICAL MAGAZINE AND JOURNAL OF SCIENCE. Conducted by Sir Robert Kane, Sir William Thomson and William Francis. — London, in-8° (1).

Tome XIX; janvier-juin 1885.

Pliny Earle Chase. — Quelques principes et quelques résultats dans la théorie du mouvement harmonique. (190-196).

Wilsing (*J.*). — Sur l'application du pendule à la détermination de la densité moyenne de la Terre. (219-222).

Sarah Marks (Miss). — Usages d'une machine à diviser. (280-285).

Macfarlane (*A.*). — Le spectre logique. (286-290).

Si l'on représente par un carré l'ensemble des objets considérés (ou l'univers), et si l'on sépare par un cercle ceux qui possèdent une propriété particulière, un diagramme formé de cercles suffit pour représenter toutes les classes possibles tant que le nombre des qualités, par lesquelles on distingue ces objets, ne dépasse pas trois. Il n'en est plus ainsi si ce nombre dépasse trois. L'auteur propose un nouveau diagramme qui s'applique à tous les cas.

Oliver Heaviside. — Sur la surface des ondes électromagnétique. (397-419).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur l'expression de l'intégrale elliptique complète de seconde espèce par une série procédant suivant les sinus des multiples de l'angle modulaire. (504-510).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 237-250

Dans le *Journal de Crelle*, t. 11, p. 51, Gudermann a donné la formule suivante :

$$\frac{K}{\pi} = \sin 0 + \frac{1^2}{2^2}\sin 5\theta + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\sin 9\theta + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\sin 13\theta + \ldots.$$

M. Glaisher indique une formule analogue pour E et pour les quantités I, G, U, V, W, qu'il a étudiées en détail dans le *Quarterly Journal of Mathematics*, t. XX, p. 313-361.

Tome XX; juillet-décembre 1885.

Edmonson (*Joseph*). — Sommaire d'une lecture sur les machines à calculer, faite devant la Société de Physique de Londres. (15-18).

Sutherland (*William*). — Intégration mécanique du produit de deux fonctions. (175-178).

Fleming (*J.-A.*). — Problèmes sur la distribution des courants électriques dans les réseaux de conducteurs traités par la méthode de Maxwell. (221-258).

De Volson Wood. — L'éther lumineux. (388-417).

Gray (*Thomas*). — Sur les mesures de l'intensité de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, faites dans le laboratoire de l'Université de Glasgow. (484-495).

Tome XXI; janvier-juin 1886.

Moon (*Robert*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du troisième ordre et d'ordre plus élevé. (63-69).

Recherche des cas où l'équation aux dérivées partielles

$$R\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + S\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + T\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + U\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = V,$$

où R, S, T, U, V ne contiennent que x et y, admet une intégrale première $f(x, y, r, s, t) = 0$. Extension de la méthode aux équations de forme analogue, mais d'un ordre plus élevé.

Sutherland (*William*). — Intégration mécanique du produit de deux fonctions. (141-143).

Muir (*Thomas*). — L'équation différentielle des coniques. (143-145).

L'auteur calcule directement, par des différentiations et des éliminations, l'équation différentielle des coniques. Le premier membre se présente sous forme d'un déterminant du troisième ordre. La méthode s'applique d'ailleurs aux courbes algébriques d'un ordre quelconque; pour les cubiques, le premier membre de l'équation différentielle est donné par un déterminant du sixième ordre.

Boys (*C.-V.*) — Sur une machine pour résoudre les équations. (241-245).

Cunyngham (*Henry*). — Sur un moyen mécanique de résoudre les équations du second ou du troisième degré, que les racines soient réelles ou imaginaires. (260-263).

Méthode fondée sur l'emploi de la parabole $x^n = y$ et applicable aux équations de la forme $x^n + mx = C$.

Edgeworth (*F.-Y.*). — La loi de l'erreur et l'élimination du hasard. (308-324).

Tait. — Sur les fondements de la théorie cinétique des gaz. (343-348).

Walter Baily. — Une mappemonde dans le système de projections de Flamsteed. (415-416).

Rayleigh (*Lord*). — Notes sur certaines propositions fondamentales d'optique. (466-476).

Burbury (*S.-H.*). — Les fondements de la théorie cinétique des gaz. Note sur l'article du professeur *Tait*. (481-483).

Edgeworth (*F.-Y.*). — Sur la détermination du module des erreurs. (500-507).

Tome XXII; juillet-décembre 1886.

Fisher (*O.*). — Sur les variations de la pesanteur à certaines stations de l'arc indien de méridien, et leurs relations avec la constitution de la croûte terrestre. (1-29).

Sutherland (*William*). — La loi d'attraction des molécules gazeuses. (81-95).

L'auteur conclut des expériences de Thomson et de Joule que les molécules d'un gaz s'attirent proportionnellement au produit de leurs masses et en raison inverse de la quatrième puissance de leur distance.

Heaviside (*Oliver*). — Sur la self-induction des fils. (118-138; 273-288; 332-352; 419-442).

Cunyngham (*H.*). — Sur un nouveau hyperbolographe. (138-139).

Cet appareil est basé sur la propriété suivante, qu'il est aisé de démontrer : si d'un point fixe O on mène une droite OP rencontrant une droite fixe AB en P, puis qu'on prenne sur la perpendiculaire élevée en P à cette droite une longueur PQ telle que $OP + PQ = a$, le lieu du point Q est une hyperbole équilatère.

Smith (*Frederick John*). — Sur quelques modifications dans la forme de l'intégrateur sphérique. (147-148).

Buchheim (*A.*). — Extension d'un théorème du professeur Sylvester relatif aux matrices. (173-174).

Un des théorèmes fondamentaux de M. Sylvester dans cette théorie est le suivant. Si m est une matrice d'ordre n et si l'on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses racines latentes, on a

$$\Phi_m = \sum \frac{(m-\lambda_2)\ldots(m-\lambda_n)}{(\lambda_1-\lambda_2)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)}\Phi\lambda_1,$$

Φ étant une fonction quelconque. M. Buchheim étend ce théorème aux matrices ayant des racines latentes égales.

Hennessy (*Henry*). — Sur la structure physique de la Terre. (233-251).

Chree (*C.*). — Barreaux et fils d'élasticité variable. (259-270).

J. Lester Woodbridge. — Les turbines. (313-324).

Hennessy (*Henry*). — Note sur la précession annuelle calculée dans l'hypothèse de la solidité de la Terre. (328-331).

Thomson (Sir *William*). — Sur les vagues permanentes dans l'eau courante. (353-357; 445-452; 517-530).

Edgeworth (*F.-Y.*). — Questions de probabilités. (371-383).

Lodge (*Alfred*). — Nouvelle représentation géométrique des moments et des produits d'inertie d'une aire plane. (453-458).

Constructions géométriques, au moyen de cercles, du rayon de giration relatif à un axe quelconque, quand on connaît les rayons de giration principaux.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON (1).

Vol. 175; 1884.

Rayleigh. — Sur la circulation de l'air observée dans les tubes de Kundt et sur quelques problèmes connexes d'Acoustique. (1-22).

Hicks. — Sur le mouvement permanent et les petites vibrations d'un vortex creux. (161-196).

Près de la surface d'un anneau-tourbillon de grande ouverture, dont la section circulaire a un rayon b, le mouvement du liquide se compose d'un mouvement de translation sensiblement uniforme et d'un mouvement de rotation autour de l'axe curviligne du tourbillon. En un point de la surface du tourbillon la pression est $p_0 - \rho \frac{I^2}{4\pi^2 b^2}$, en appelant p_0 la pression que subit le liquide aux points où la vitesse est nulle, et I la circulation. La présence de l'anneau-tourbillon n'est nullement nécessaire pour que le mouvement extérieur conserve ses propriétés générales; nous pouvons supposer que le tourbillon est remplacé par un vide annulaire dans lequel la pression est nulle; le rayon de la section est alors sensiblement égal à $\frac{I}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho}{p_0}}$. C'est le rayon de la section qui se conserve dans toutes les déformations de l'anneau, le volume du vide varie avec la grandeur de l'ouverture; pour un anneau-tourbillon ordinaire, c'est le volume qui reste invariable. M. Hicks étudie en détail les conditions de stabilité de l'anneau vide, les périodes vibratoires de la surface libre et du liquide environnant. M. B.

Heath. — Sur la dynamique d'un corps solide dans l'espace elliptique. (281-324).

Le travail de M. Heath comprend quatre Parties.

(1) Voir *Bulletin*, VI, p. 197.

La première Partie a le caractère d'une Introduction : c'est une exposition très claire et élégante de la Géométrie de l'espace elliptique, faite en partant de la conception fondamentale due à M. Cayley; ce qui caractérise cette géométrie, c'est que l'absolu est une somme de quatre carrés. La Géométrie plane se fait en supposant le plan rapporté à un triangle conjugué par rapport à l'absolu du plan, dont on peut supposer l'équation mise sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

dès lors la Géométrie plane est identique à la Géométrie sphérique dans l'espace ordinaire.

La Géométrie de l'espace se fait de même en supposant l'équation de l'absolu mise sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0.$$

M. Heath établi les formules fondamentales relatives aux angles et aux distances.

La deuxième Partie se rapporte à la cinématique du corps solide. Tout d'abord une telle cinématique existe; cela résulte de ce que l'espace considéré est à courbure constante, ou, comme l'a observé M. Klein, de ce qu'il y a des transformations linéaires qui reproduisent l'absolu.

Un point et son plan polaire par rapport à l'absolu doivent être regardés comme un système solide.

Quand on fait tourner un système solide autour d'une droite, la conjuguée de cette droite par rapport à l'absolu glisse sur elle-même; si un système solide est animé d'un mouvement de translation le long d'une droite, c'est-à-dire d'un mouvement qui laisse glisser sur eux-mêmes tous les plans qui passent par cette droite, le système tourne autour de la conjuguée par rapport à l'absolu : dans l'espace elliptique les deux mouvements de rotation et de translation sont ainsi parfaitement réciproques.

L'étude du mouvement d'un corps solide se fait en imaginant un tétraèdre de référence (conjugué aussi par rapport à l'absolu) entraîné avec lui; les coordonnées x_0, y_0, z_0, u_0 d'un point M du système mobile par rapport aux axes fixes sont données par les formules

$$\begin{aligned} x_0 &= l_1 x + m_1 y + n_1 z + p_1 u, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_0 &= l_4 x + m_4 y + n_4 z + p_4 u, \end{aligned}$$

x, y, z, u étant les coordonnées du même point par rapport au tétraèdre de référence mobile; $l_1, m_1, \dots, p_4$ sont les coefficients d'une substitution orthogonale. En passant, on examine comment on peut faire coïncider les deux tétraèdres de référence, et l'on constate que cette coïncidence peut être obtenue par deux rotations autour de deux droites conjuguées par rapport à l'absolu.

Si, dans les formules de transformation, on suppose que les coefficients soient des fonctions connues du temps t, le mouvement du tétraèdre mobile par rapport au tétraèdre fixe est connu. Pour étudier la vitesse on est amené à introduire six quantités $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$ définies par des équations telles que les suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_1 = \quad & l_1 \frac{dp_1}{dt} + l_2 \frac{dp_2}{dt} + l_3 \frac{dp_3}{dt} + l_4 \frac{dp_4}{dt} \\ = & - p_1 \frac{dl_1}{dt} - p_2 \frac{dl_2}{dt} - p_3 \frac{dl_3}{dt} - p_4 \frac{dl_4}{dt} \\ = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

avec ces notations, on a pour déterminer la vitesse les formules

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\omega_4 y + \omega_3 z - \omega_1 u,\\
\frac{dy}{dt} &= \omega_4 x - \omega_2 z - \omega_1 u,\\
\frac{dz}{dt} &= -\omega_3 x + \omega_2 y - \omega_1 u,\\
\frac{du}{dt} &= \omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z;
\end{aligned}$$

il est ensuite aisé de montrer comment une rotation ou une translation suivant une droite peut se décomposer en six rotations ou translations suivant les arêtes du tétraèdre de référence.

La théorie des torsions (screws) se fait aussi facilement dans l'espace elliptique. On a alors à considérer deux complexes linéaires polaires désignés par M. Lindemann (¹) sous le nom de *complexes de rotation et de translation*. Le cylindroïde est remplacé dans cette théorie par une surface réglée du quatrième degré. Enfin M. Heath donne, en suivant la méthode que l'on doit à Spottiswoode (²), les conditions que doivent vérifier les lignes d'action d'un système quelconque de rotations en équilibre.

La troisième Partie se rapporte à la Dynamique. La force qui agit sur une particule matérielle est toujours le produit de l'accélération par un coefficient numérique propre à cette particule, la masse. Le principe de la conservation de l'énergie subsiste. La considération de l'énergie d'un corps solide amène à la considération des moments d'inertie, et à la notion du tétraèdre principal d'inertie. Si l'on suppose le corps mobile rapporté à ce tétraèdre, son mouvement, quand on se donne les forces qui agissent sur lui, est déterminé par des équations entièrement analogues à celles d'Euler, savoir :

$$A\frac{d\omega_1}{dt} - (B - H)\omega_2\omega_4 - (G - C)\omega_2\omega_3 = Q, \qquad \ldots.$$

S'il n'y a pas de forces accélératrices, les quantités Q sont nulles et les six équations précédentes déterminent les six composantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$.

M. Heath montre dans la dernière Partie de son Mémoire comment on peut obtenir une solution de ces équations au moyen des fonctions Θ à deux variables.

Poynting. — Sur le transfert de l'énergie dans un champ électromagnétique. (343-362).

Hill. — Sur le mouvement d'un liquide formé de deux parties dont l'une a un potentiel des vitesses. (363-410).

Clebsch a montré que les composantes u, v, w de la vitesse d'un fluide

(¹) *Projectivische Behandlung der Mechanik Starrer Körper* (*Math. Ann.*, t. VII; 1874).

(²) *Comptes rendus*, t. LXVI, p. 97.

parallèlement à trois axes rectangulaires peuvent être mises sous la forme

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \chi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z};$$

λ et ψ sont deux systèmes de surfaces dont l'intersection détermine les lignes tourbillons; quand le liquide est formé de deux parties dont l'une a un potentiel des vitesses φ, on peut toujours prendre la surface $\lambda = 0$ comme surface de séparation des deux parties du liquide. Les conditions de continuité des vitesses à travers cette surface exigent que l'on ait pour $\lambda = 0$

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

La pression est donnée par

$$\frac{p}{\rho} + V = -\frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\lambda^2}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right];$$

pour qu'elle soit continue à travers la surface $\lambda = 0$, il faut ajouter une nouvelle condition

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

L'auteur cherche à former une équation aux dérivées partielles ne contenant que la fonction λ; il y arrive en tenant compte des équations de l'Hydrodynamique, dans les trois cas suivants : 1° mouvement plan en coordonnées rectilignes x, y; 2° mouvement plan en coordonnées polaires r, θ; 3° mouvement symétrique par rapport à l'axe des z et dans les plans méridiens, en coordonnées cylindriques r, z. Dans chacun de ces cas, l'équation générale qui apparaît compliquée de signes de quadrature se simplifie lorsque les surfaces tourbillons ont une forme invariable et se meuvent parallèlement à l'axe des y ou des z (premier et troisième cas), ou tournent autour de l'origine (deuxième cas)

La fonction λ et ses dérivées font connaître ensuite les trois composantes de la vitesse. Il reste à déterminer le potentiel φ à l'extérieur qui satisfait aux conditions (1), (2). On trouvera des indications sur cette partie de la question et sur les difficultés qu'elle présente dans les exemples qui terminent le Mémoire. M. B.

Vol. 176; 1885.

Poynting. — Sur la connexion entre les courants électriques et l'induction électrique et magnétique dans le champ environnant. (277-306).

Thomson (*J. J.*). — Sur quelques applications des principes dynamiques aux phénomènes physiques. (307-342).

Application des équations de Lagrange et de Hamilton à l'étude des transformations de diverses formes de l'énergie : l'auteur montre comment on parvient ainsi à coordonner des résultats de natures très différentes et à prévoir des phénomènes nouveaux.

Shaw (*H.*). — Théorie des machines à calcul à mouvement continu et d'un mécanisme de cette espèce fondé sur un nouveau principe. (367-402).

Étude historique et critique sur les mécanismes propres à intégrer ou à différentier, formés essentiellement de deux pièces tournantes disposées de façon que l'on puisse à chaque instant connaître le rapport des vitesses de rotation ou faire varier ce rapport. Description d'un mécanisme de cette espèce composé d'une sphère et d'une roulette.

Hicks. — Recherches sur la théorie des anneaux tourbillons. IIe Partie. (725-780).

Ce second Mémoire de M. Hicks est relatif au cas où l'anneau tourbillon est formé par un liquide de densité différente du milieu indéfini qui l'entoure; lorsque les rotations élémentaires sont assez rapides, il peut arriver que suivant l'axe circulaire de cet anneau, au milieu du noyau plus dense, il se forme un vide avec une surface libre. Le Mémoire contient une étude complète du mouvement des liquides dans ce cas, mouvements permanents, vibrations, conditions de stabilité. Un des résultats intéressants, c'est que l'existence du vide permet des vibrations avec changement périodique de volume de l'anneau, et par suite entre deux anneaux pareils, les actions moyennes en raison inverse du carré de la distance, attractives ou répulsives suivant la différence de phase, comme dans le cas bien connu des sphères pulsantes. M. B.

Vol. 177; 1886.

Kempe. — Mémoire sur la théorie des formes mathématiques. (1-70).

C'est un travail de Logique plutôt que de Mathématiques; l'auteur veut «dégager la matière nécessaire des Sciences exactes du vêtement accidentel géométrique, algébrique, logique, sous lequel on la présente habituellement ». Le mot *forme* est pris là dans le sens de *collections d'unités*, lesquelles peuvent être ou non distinctes les unes des autres, ou parmi lesquelles certaines collections peuvent être distinguées de certaines autres. Par exemple, dans un carré, les quatre sommets, considérés comme des unités, ne doivent pas être distingués les uns des autres; mais les couples de ces points se distinguent en deux classes, selon qu'ils sont formés de points appartenant à un même côté, ou de points appartenant à une même diagonale.

C'est sur des éléments de cette nature, de plus en plus compliqués, que raisonne l'auteur. Quelques indications sur l'application de ses idées à l'Algèbre, à la Géométrie et à la Logique terminent son Mémoire.

Reynolds (*O.*). — Sur la théorie de la lubréfaction et sur son application aux expériences de M. Beauchamp Tower. Détermination expérimentale de la viscosité de l'huile d'olive. (157-184).

Mc Connell. — Recherche expérimentale sur la forme de la surface de l'onde dans le quartz. (299-326).

Hopkinson. — Machines dynamo-électriques. (331-358).

Lachlan. — Sur les systèmes de cercles et de sphères. (481-625).

Ce long et important Mémoire se rapporte à divers points de la théorie des systèmes de cercles ou de sphères, des quartiques bicirculaires ou des cyclides. Il comprend trois Parties.

I. Le point de départ est la notion de la puissance de deux cercles, introduite par M. Darboux (¹) : c'est, comme on sait, la somme des carrés des rayons diminuée du carré de la distance des centres. La méthode suivie par M. Lachlan, qui est très systématique, est due à Clifford (²), qui était arrivé de son côté à cette notion et en avait nettement saisi l'importance.

La puissance d'une droite et d'un cercle est le double de la distance à la droite du centre du cercle; la puissance de deux droites est le double du cosinus de leur angle; la puissance d'un cercle quelconque et de la droite de l'infini est égale à un; la puissance de la droite de l'infini et d'une droite quelconque est nulle.

Sous le bénéfice de ces définitions, si l'on adopte en général le symbole ϖ_{xy} pour désigner la puissance de deux éléments (cercles, points, droites), on a les propositions suivantes :

L'expression

$$\frac{\varpi_{xy}}{\sqrt{\varpi_{ox}\varpi_{oy}}}$$

reste inaltérée si l'on soumet les cercles à une inversion par rapport à un cercle de même centre que le cercle o.

Si l'on considère dix cercles, désignés par les nombres 1, 2, ..., 9, 10, le déterminant du cinquième ordre

$$|\varpi_{ij}| \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5, \\ j = 6, 7, 8, 9, 10 \end{cases}$$

est identiquement nul. Ce déterminant sera désigné dans la suite par le symbole

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix},$$

(¹) *Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. I; 1872.

(²) *Mathematical Papers*, passim.

où toutefois les cercles pourront être représentés par d'autres symboles que des nombres.

M. Lachlan, après avoir donné une intéressante généralisation de cette dernière propriété à des systèmes de coniques bitangentes à une conique donnée, en montre la grande fécondité : il en déduit nombre de propositions, dont beaucoup d'ailleurs étaient déjà connues, relatives aux cercles touchant trois droites, au cercle orthogonal à trois cercles donnés, au système de quatre cercles que l'on déduit de quatre autres cercles donnés en prenant les cercles orthogonaux à trois de ces quatre cercles, aux cercles coupant trois cercles donnés sous des angles donnés, aux cercles tangents à trois cercles donnés, aux cercles qui passent par trois des points d'intersection deux à deux de deux cercles, etc.

L'auteur passe ensuite aux coordonnées-puissances (*power-coordinates*), que l'on peut appeler *coordonnées tétracycliques*. Il est clair, en effet, qu'un cercle (point ou droite) est déterminé si l'on se donne des quantités proportionnelles à ses puissances par rapport à quatre cercles, multipliées si l'on veut par des paramètres constants k_1, k_2, k_3, k_4 : appelons ces produits coordonnées du cercle (point ou droite) et désignons les quatre cercles de référence par les symboles 1, 2, 3, 4. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un point P. On aura, en vertu de l'identité fondamentale,

$$\begin{vmatrix} P & 1 & 2 & 3 & 4 \\ P & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

On aperçoit de suite, en se reportant à la définition du symbole qui figure dans le premier membre, et en se rappelant que la puissance d'un point par rapport à lui-même est nulle, que ce premier membre est une forme quadratique des coordonnées x, y, z, u du point P; cette forme quadratique $\Psi(x, y, z, u)$ joue dans toute la théorie ce rôle essentiel qu'a fait ressortir M. Cayley dans le sixième de ses Mémoires sur les *Quantics* et il convient de lui donner le nom d'*absolu*. Si θ est le symbole de la droite de l'infini, on aura, toujours en vertu de la même identité,

$$\begin{vmatrix} P & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \theta & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

cette relation est du premier degré en x, y, z, u et il est aisé de voir qu'elle a la forme

$$x\frac{\partial\psi}{\partial k_1} + y\frac{\partial\psi}{\partial k_2} + z\frac{\partial\psi}{\partial k_3} + u\frac{\partial\psi}{\partial k_4} = K,$$

en désignant par K une constante et par $\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \frac{\partial\psi}{\partial k_2}, \cdots$ ce que deviennent les dérivées partielles $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \cdots$ de l'absolu, quand on y remplace $x, y, \ldots$ par $k_1, k_2, \ldots$.

Soit maintenant S le symbole d'un cercle, de coordonnées ξ, η, ζ, ω et P le symbole d'un point de ce cercle, de coordonnées x, y, z, u; l'équation

$$\begin{vmatrix} P & 1 & 2 & 3 & 4 \\ S & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + y\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + z\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + u\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = 0;$$

on voit ainsi que l'équation d'un cercle est du premier degré; réciproquement, toute équation du premier degré en x, y, z, u représente un cercle, un point ou une droite; la puissance ϖ de deux cercles, dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, ω; ξ', η', ζ', ω', est donnée par la formule

$$\varpi K = \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi'} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta'} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta'} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial \omega'}.$$

Ces formules contiennent celles qui se rapportent à la détermination du rayon d'un cercle, de l'angle de deux cercles ou de deux droites, de la distance de deux points.

On a supposé jusqu'ici que les quatre cercles de références étaient quelconques; en les supposant orthogonaux deux à deux et en choisissant convenablement les paramètres k, on donne à l'absolu la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2,$$

et toutes les formules se simplifient d'une façon évidente. C'est le système dont M. Darboux a fait un si bel usage. M. Lachlan signale un autre système, considéré par M. Homerrnsham Cox (1) et formé de deux cercles orthogonaux et de leurs points d'intersection; l'absolu a alors la forme

$$x^2 + y^2 - 4zu.$$

Il passe ensuite à l'étude de l'équation générale du second degré en x, y, z, u, qui représente une quartique bicirculaire : il donne l'équation de la tangente et de la normale en un point, étudie les quatre séries de cercles bitangents, et les quatre cercles coupant une telle courbe orthogonalement en quatre points (cercles principaux de M. Moutard); la détermination de ces cercles et la réduction de l'équation de la quartique bicirculaire aux formes canoniques sont liées à l'étude du discriminant de la forme $\varphi + \lambda\psi$, où φ désigne le premier membre de l'équation de la quartique; le degré de multiplicité des racines de l'équation en λ que l'on obtient en égalant ce discriminant à zéro fournit la base de la classification de ces quartiques; M. Lachlan indique diverses propriétés des quartiques bicirculaires spéciales.

II. La deuxième Partie du Mémoire se rapporte aux systèmes de cercles sur une sphère.

La puissance de deux petits cercles, intersections de la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

par les deux plans qui ont pour équations

$$ax + by + cz = 1, \qquad a'x + b'y + c'z = 1,$$

est

$$1 - aa' - bb' - cc';$$

la puissance d'un grand cercle et d'un petit cercle est le produit du cosinus de

(1) *On systems of circles and bicircular quartics* (*Quart. Journ. Math.*, t. XIX, p. 116; 1883.

l'angle des deux cercles par la tangente du rayon du petit cercle; la puissance de deux grands cercles est le cosinus de leur angle. En admettant ces définitions, la même identité que dans le plan a lieu pour les puissances de dix cercles sur une même sphère, et cette identité entraîne des conséquences analogues que l'auteur suit pas à pas. Les coordonnées tétracycliques sur la sphère s'introduisent comme dans le plan, et l'étude des « sphéri-quadriques » se fait parallèlement à celle des quartiques bicirculaires.

III. La troisième Partie se rapporte aux systèmes de sphères. Le complet parallélisme des déductions qu'on y trouvera et de celles qui viennent d'être analysées nous permet de ne pas insister beaucoup. En considérant deux séries de six sphères, on a entre les puissances des sphères d'une série par rapport aux sphères de l'autre série une relation identique qui s'exprime en égalant à zéro un déterminant du sixième ordre. Cette propriété fondamentale s'applique aux configurations de sphères analogues à ces configurations de cercles énumérées plus haut. Les coordonnées pentasphériques remplacent des coordonnées tétracycliques et l'étude des cyclides correspond à celle des quartiques bicirculaires.

Reynold (*W.*) et *Rücker* (*W.*). — Sur la relation entre l'épaisseur et la surface de tension des pellicules liquides. (627-684).

Tomlinson. — Le coefficient de viscosité de l'air. (767-785).

Stokes. — Addition au précédent Mémoire. (786-795).

Tomlinson. — Addition au précédent Mémoire. (795-799).

Tomlinson. — Influence de la pression et de la tension sur les propriétés physiques de la matière. (801-838).

J. T.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS (1).

Tome XXII; 1887.

Forsyth (*A.-R.*). — Sur les fonctions doublement périodiques de Weierstrass. (11-43).

Gino Loria. — Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du quatrième ordre. (44-74).

(1) Voir *Bulletin*, t. XI$_1$, p. 257.

Tout cercle du plan peut être représenté par une équation de la forme

$$X \equiv C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4 = 0, \tag{1}$$

$C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$ étant les équations de quatre cercles particuliers; x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées homogènes du cercle représenté par l'équation (1). Après avoir établi les formules fondamentales, l'auteur considère les systèmes de cercles, c'est-à-dire les *complexes* de cercles et les *congruences* de cercles, définis par une ou deux relations entre les coordonnées x_i. Un complexe linéaire est identique à un réseau; de même, une congruence linéaire n'est autre chose qu'un faisceau. M. Gino Loria étudie en particulier les complexes quadratiques et les congruences communes à deux complexes quadratiques. Les propriétés de ces complexes sont identiques en réalité avec les propriétés des surfaces du second ordre, et s'en déduisent immédiatement par une interprétation convenable. Le lieu des points-cercles d'un complexe quadratique est une quartique bicirculaire; on retrouve ainsi très simplement les propriétés les plus importantes de ces courbes.

Mac Mahon (*P.-A.*). — La loi de symétrie et autres théorèmes relatifs aux fonctions symétriques. (74-81).

Établissement de la loi de symétrie remarquée par Cayley et démontrée par Betti et Hammond.

Johnson (*A.-R.*). — Extension de l'équation différentielle de Cayley pour les surfaces orthogonales. (81-88).

Chree (*C.*). — Une solution nouvelle des équations d'un solide élastique isotrope et son application à la théorie des poutres. (89-118).

Greenhill (*A.-G.*). — Multiplication complexe des fonctions elliptiques. (119-150).

Ce travail a pour objet, d'une part la recherche des valeurs des modules lorsque le rapport des périodes est égal à la racine carrée d'un nombre rationnel Δ, d'autre part, la détermination des fonctions elliptiques de l'argument $(a + b\sqrt{\Delta i})u$ au moyen des fonctions elliptiques de l'argument u. Dans un Mémoire contenu dans le tome XVII du *Quarterly Journal*, M. Stuart a donné les formules relatives aux fonctions sn, cn, dn de Jacobi. M. Greenhill reprend la même question pour la fonction pu de Weierstrass. Il est conduit à distinguer quatre classes de transformations suivant que $\Delta \equiv 3 \pmod 8$, $\Delta \equiv 7 \pmod 8$, $\Delta = 4n + 1$, $\Delta = 2n$. Les formules sont développées jusqu'à $\Delta = 43$.

Jessop (*C.-M.*). — Le tracé mécanique des courbes. (151-156).

Les appareils décrits reposent sur un principe donné par Cremona dans ses *Éléments de Calcul graphique;* ils se composent essentiellement de deux systèmes de tiges, dont chacune est perpendiculaire à celle qui la précède.

Cayley. — Sur la surface de Rudio. (156-158).

Il s'agit de la surface découverte par Liouville dont les normales sont tangentes communes à deux quadriques homofocales.

Johnson (*A.-R.*). Sur les polygones et les polyèdres conjugués. (158-173).

Une courbe plane étant représentée par une équation de la forme

$$u_1^n + u_2^n + \ldots + u_p^n = 0,$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont des fonctions linéaires des coordonnées, le polygone dont les côtés ont pour équations $u_1 = 0, \ldots, u_p = 0$ est dit conjugué par rapport à cette courbe. Une cubique admet une infinité double de quadrilatères conjugués, dont l'auteur étudie les relations avec la courbe et avec sa hessienne; il s'occupe ensuite des polygones conjugués par rapport aux courbes du troisième, quatrième, cinquième, sixième, septième, huitième degré et des polyèdres conjugués par rapport aux surfaces du troisième et du quatrième ordre.

Greenhill (*A.-G.*). — Multiplication complexe des fonctions elliptiques. (174).

Note additionnelle relative au cas où $\frac{K'}{K} = \sqrt{51}$.

Workman (*W.-P.*). — Théorie des solutions singulières des équations différentielles intégrables du premier ordre. (115-198; 308-324).

L'auteur appelle équations *intégrables* les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

où f est un polynôme entier en x, y, $\frac{dy}{dx}$, qui admettent une intégrale générale de la forme

$$\varphi(x, y, C) = 0, \tag{2}$$

$\varphi(x, y, C)$ désignant une fonction entière de x, y et de la constante arbitraire C. La première section contient un résumé des principaux Mémoires de Darboux, Cayley, Casorati, etc., sur la théorie des solutions singulières. Soit $E = 0$ l'enveloppe des courbes représentées par l'équation (2), $C = 0$ le lieu des points de rebroussement de première espèce, $N = 0$ le lieu des points-doubles, $T = 0$ le lieu des points par où passent deux courbes distinctes tangentes l'une à l'autre (*tac-locus*); si les courbes intégrales n'admettent pas d'autres singularités que des points doubles ou des points de rebroussement, le discriminant P de l'équation (1) sera égal à EC^2T^3, et le discriminant I de

l'équation (2) à EN^2C^2. Dans la seconde Section, M. Workman donne différentes méthodes pour trouver l'équation $T = 0$, quand on connaît l'intégrale générale, sans passer par l'équation différentielle elle-même. Dans la troisième Section, l'auteur s'est proposé d'étudier le cas où les courbes intégrales admettent des singularités d'ordre supérieur; si chaque courbe admet une singularité équivalente à δ points doubles et k points de rebroussement, le lieu de ces points singuliers figurera à la puissance k dans P et à la puissance $2\delta + 3k$ dans I. De nombreux exemples terminent le Mémoire.

Hart (*A.-S.*). — Note sur un système de cubiques. (199).

Construction du neuvième point d'un faisceau de cubiques déterminé par 8 points.

Dixon (*A.-C.*). — Sur le théorème d'Abel. (200-204).

Hermann (*R.-A.*). — Sur le mouvement de deux sphères dans un fluide et les problèmes qui s'y rapportent. (204-262).

Mouvement de deux sphères dans un fluide indéfini le long de la ligne des centres. — Mouvement de deux sphères perpendiculairement à la ligne des centres. — Potentiel de deux sphères électrisées.

Sharpe (*H.-J.*). — Mouvement des corps composés dans un liquide. (262-268).

Walton (*William*). — Sur une propriété physique d'une certaine courbe génératrice de la surface des ondes d'un cristal à deux axes. (268-270).

La surface des ondes d'un cristal à deux axes peut être engendrée par la courbe gauche représentée par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{a^2x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2z^2}{c^2 - r^2} = 0; \tag{2}$$

la ligne de vibration de l'éther en chaque point de la surface est perpendiculaire à la courbe génératrice qui passe par ce point.

Cockle (Sir *James*). — Seconde addition aux relations entre certains symboles. (270).

Cayley. — Sur l'Algèbre multiple. (270-308).

Ce Mémoire n'est que le développement des idées renfermées dans un passage du Discours prononcé par l'auteur devant les membres de l'Association Britannique (voir ***Bulletin***, t. VIII, p. 77; 1884). On y trouve un aperçu très intéressant des principaux Mémoires antérieurs à Gauss, qui traitent de l'interprétation du symbole $\sqrt{-1}$.

Johnson (*A.-R.*). — Les produits symétriques relatifs aux courbes et aux surfaces. (325-369).

Étant données deux courbes dans un même plan ou trois surfaces, toute fonction rationnelle des coordonnées des points d'intersection qui ne change pas quand on échange deux quelconques de ces points peut s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients des équations qui représentent ces courbes ou ces surfaces. Par exemple, lorsque la fonction F est un simple produit, on peut dans certains cas obtenir aisément les relations entre les coefficients qui rendent ce produit nul ou infini; si $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, ... sont les relations indépendantes qui rendent la fonction F infinie et $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, ... les relations qui rendent nul ce produit, on aura

$$F = A_1^{-\alpha_1} A_2^{-\alpha_2} \dots B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \dots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ étant des nombres entiers positifs qui se déterminent facilement par des considérations infinitésimales.

Le travail de M. Johnson est divisé en trois parties; l'auteur considère successivement les points de contact des tangentes ou les pieds des normales menées d'un point à une ou plusieurs courbes, les points d'intersection de deux ou plusieurs courbes, les points d'intersection de trois surfaces.

Hermann (*A.-R.*). — Sur un problème de mouvement dans les fluides. (370-384).

L'auteur considère successivement un solide, formé de deux sphères qui se coupent, se mouvant suivant la ligne des centres, un solide formé de deux cylindres se mouvant suivant la ligne des centres ou perpendiculairement à cette ligne.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA. Diretti dal prof. Francesco Brioschi (1).

Série II, tome XIII, janvier-décembre 1885.

Brioschi (*F.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (1-21).

Torelli (*G.*). — Un problème sur les expressions différentielles. (23-38).

L'auteur donne deux généralisations du problème de Pfaff.

(1) Voir *Bulletin*, X_2, p. 231.

Bianchi (*L.*). — Sur une classe de systèmes triples de surfaces orthogonales contenant un système d'hélicoïdes qui ont en commun l'axe et le pas. (39-52).

Lorsqu'on prend un de ces systèmes comme système de coordonnées curvilignes dans l'espace, l'élément linéaire prend la forme suivante

$$dS^2 = H_1^2\,dy_1^2 + H_2^2\,dy_2^2 + H_3^2\,dy_3^2,$$

H_1, H_2, H_3 étant des fonctions de y_3 et de $y_1 + y_2$, si $y_3 = \text{const.}$ sont les hélicoïdes. La recherche de ces systèmes dépend de l'intégration d'une équation à dérivées partielles du second ordre; car, pour avoir l'équation du profil méridien des hélicoïdes successifs, il faut déterminer une fonction $z = \varphi(\rho, t)$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\,\frac{\rho\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}}{\sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2}} = \sqrt{\rho^2 + m^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right)^2},$$

m étant le paramètre du mouvement hélicoïdal. Une intégrale particulière de la forme

$$z = \varphi(\rho) + F(t)$$

donne un système triple orthogonal constitué par trois systèmes d'hélicoïdes ayant même axe, dont deux sont à courbure constante négative et l'autre à courbure constante positive. L'élément linéaire de l'espace prend alors la forme

$$\begin{aligned} dS^2 = {} & A^2\,\mathrm{sn}^2(y_1 + y_2 + y_3)\,dy_1^2 \\ & + B^2\,\mathrm{cn}^2(y_1 + y_2 + y_3)\,dy_2^2 + C^2\,\mathrm{dn}^2(y_1 + y_2 + y_3)\,dy_3^2, \end{aligned}$$

A, B, C étant des constantes liées au module k des fonctions elliptiques par la relation

$$\frac{1}{A^2} = \frac{k^2}{B^2} + \frac{1}{C^2}.$$

Ces derniers sont les seuls systèmes triples orthogonaux pour lesquels les H_1, H_2, H_3 soient des fonctions de $y_1 + y_2 + y_3$. L'auteur fait remarquer le cas limite de $k = 1$.

Martinetti (*V.*). — Sur quelques transformations involutives du plan. (53-80).

L'auteur démontre que les involutions de troisième et de quatrième classe qu'il a indiquées dans un autre Mémoire [*Le involuzioni di 3ª e 4ª classe* (*Annali di Mat.*, serie II, t. XII)] sont toutes les involutions possibles de ces deux classes, à points fondamentaux distincts.

Berzolari (*L.*). — Sur la surface du quatrième ordre ayant une conique double. (81-174).

L'auteur démontre par des considérations purement géométriques les propriétés principales des droites et des courbes situées sur cette surface. Il donne des propriétés nouvelles relatives à la configuration des seize droites, et des analogies remarquables avec les propriétés des surfaces du troisième ordre. Puis, après avoir traité des systèmes de coniques situés sur la surface, et trouvés par Kummer, il donne deux constructions de la surface par formes projectives; après quoi il passe à la recherche de toutes les courbes du troisième, quatrième et cinquième ordre situées sur la surface, obtenues par son intersection totale ou partielle avec des surfaces passant par la conique double.

Enfin, il reprend l'étude des seize droites et des quarante plans tritangents; principalement, il prend en considération les $n-$ latères gauches ($n = 4, 5, 6$) que l'on peut former avec les seize droites, et les polyèdres formés par les plans tritangents, en faisant remarquer, lorsqu'il s'en présente l'occasion, les propriétés analogues des surfaces du troisième ordre.

Bianchi (*L.*). — Sur les systèmes triples orthogonaux de Weingarten. (177-234).

Ce Travail contient la théorie générale de ces systèmes, c'est-à-dire des systèmes triples orthogonaux renfermant un système de surfaces ayant une même courbure constante. L'énoncé du théorème de Weingarten dans sa forme originelle se trouve dans une Note de M. Bianchi, insérée dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* du 15 février 1885. Ce théorème donne une construction des systèmes triples en question en partant d'une surface à courbure constante.

L'élément linéaire prend la forme

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

pour la courbure constante $k = -1$, et

$$ds^2 = \cos h^2\theta\, du^2 + \sin h^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

pour $k = +1$. Après avoir trouvé ces expressions de l'élément linéaire, l'auteur donne deux démonstrations du théorème de Weingarten et prouve que les systèmes triples orthogonaux, obtenus au moyen de ce théorème, sont les plus généraux possibles qui renferment un système de surfaces à même courbure constante. Puis, il détermine des conditions initiales nécessaires pour établir un système de Weingarten.

Il y a une espèce de systèmes de Weingarten que l'auteur appelle à flexion constante. Ces systèmes renferment, comme cas particulier, les systèmes cycliques de Ribaucour. L'auteur s'occupe de ces systèmes à flexion constante, et aussi d'autres cas particuliers, c'est-à-dire du système triple hélicoïdal, et du système de surfaces d'Enneper (surfaces à courbure constante ayant un système de lignes de courbure planes). Après il appelle la *transformation complémentaire*, construction trouvée par lui dans sa thèse d'habilitation (*Ann. d. R. Scuola Norm. sup. di Pisa*, 1879, et *Math. Ann.*, t. XVI) et une généralisation de cette transformation, trouvée par M. Bäcklund, et qu'il appelle *transformation de Bäcklund*, et applique chacune de ces deux transformations à toutes les surfaces pseudosphériques d'un système de Weingarten,

en montrant comment on peut de cette manière déduire d'un système connu un nombre infini d'autres systèmes, sans calculs d'intégration lorsqu'on emploie la transformation complémentaire, et avec quadratures successives lorsqu'on se sert de celle de Bäcklund.

Dans un système de Weingarten à flexion constante, chacune des surfaces orthogonales aux pseudosphériques a la propriété que l'un de ses systèmes de lignes de courbure est constitué de courbes à même flexion constante. Or l'auteur appelle *surface hypercyclique de rayon* R une surface dont les lignes de courbure d'un système ont la flexion constante $\frac{1}{R}$ et termine son Mémoire par un Chapitre dédié à ces surfaces.

Dans un Appendice au Mémoire, l'auteur étudie l'application simultanée des deux *transformations complémentaires* et *de Bäcklund.*

Cesaro (*E.*). — Étude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres. (235-250).

Cesaro (*E.*). — Le plus grand diviseur carré. (251-268).

Cesaro (*E.*). — Éventualités de la division arithmétique. (269-290).

Nous citerons ici les résultats suivants choisis entre ceux obtenus par l'auteur.

La probabilité que le quotient obtenu dans une division quelconque soit impair est

$$\log\sqrt{2} = 0{,}3465, \quad \ldots.$$

La probabilité que, dans une division quelconque, le $k^{ième}$ chiffre décimal soit r, est

$$\frac{1}{20} + \frac{10^k}{2}\int_0^1 \frac{1-\varphi}{1-\varphi^{10}}\varphi^{10^{k-1}+r}\,d\varphi.$$

L'auteur a obtenu une foule de résultats aussi curieux et intéressants que ceux que nous avons reportés, en employant la fonction $i(x)$, *nombre entier le plus proche de* x.

En terminant son Mémoire, l'auteur fait remarquer que la fonction $i(x)$ est liée étroitement avec la fonction $\rho(x)$ de Riemann, et la fonction $\mathfrak{C}(x)$ de M. Tchébychef.

Cesaro (*E.*). — Sur le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. (291-294).

Cesaro (*E.*). — Sur la distribution des quantités commensurables. (295-313).

Cesaro (*E.*). — Sur le rôle arithmétique de $\sin\frac{\pi x}{2}$. (315-322).

Cesaro (*E.*). — Sur la fonction $z-(z)$. (323-328).

Cesaro (*E.*). — Sur la fonction $\mathfrak{C}(z)$. (329-338).

Cesaro (*E.*). — Sur l'inversion de certaines séries. (339-351).

T. XIV, janvier 1886-mars 1887.

Ricci (*G.*). — Sur les paramètres et les invariants des formes quadratiques différentielles. (1-11).

Sabinine (*G.*). — Sur le minimum d'une intégrale. (13-30).

Il s'agit de l'intégrale

$$V = \int_{t_0}^{t_1} \Pi \, dt,$$

Π étant la fonction des forces, donnée comme fonction des coordonnées x, y, z.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur les surfaces du quatrième ordre à conique double. (31-70).

Mémoire publié pour la Commémoration du IVe centenaire de l'Université de Copenhague, juin 1879. Traduction italienne de M. G. Loria.

L'auteur étudie spécialement la forme et la connexion des nappes de cette surface et la réalité de ses droites et de ses cônes de Kummer.

Vanecek (*I.-S.* et *M.-N.*). — Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces. (73-114).

Un résumé d'une partie de ce Mémoire a paru dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, t. I, p. 130; 1884-1885, et l'on en a rendu compte dans les revues de ce *Bulletin*, X$_2$, p. 96.

Bianchi (*L.*). — Additions au Mémoire « Sur les systèmes triples orthogonaux de Weingarten ». (115-130).

Il s'agit principalement des systèmes de Weingarten qui contiennent une série de surfaces d'Enneper à courbure constante, et de la transformation que l'auteur a appelée *transformation de Bäcklund*. Dans une Note, l'auteur donne la démonstration du théorème suivant, dont il a fait usage dans son Mémoire :

« Toute équation linéaire aux différentielles totales, contenant linéairement la fonction inconnue et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, est intégrable par des quadratures. »

Montesano (*D.*). — Sur certains groupes de surfaces du second degré. (131-140).

Les groupes en question sont formés par des surfaces du second degré, dont deux quelconques ont la propriété que l'une est polaire conjuguée à soi-même par rapport à l'autre.

L'auteur démontre qu'il ne peut y avoir d'autres groupes complets de cette espèce que les deux déjà connus, et donne en même temps une construction très simple de ces groupes.

Cesaro (*E.*). — Fonctions énumératrices. (141-158).

Martinetti (*V.*). — Sur quelques configurations planes. (161-192).

L'auteur appelle *conjoints* deux points d'une configuration, lorsqu'ils sont sur une droite de la configuration, et étudie les configurations où deux points conjoints n'ont pas un même point conjoint hors de la droite qui les unit.

Pucci (*E.*). — Sur les formules fondamentales de la Géodésie géoïdique. (193-220).

Cesaro (*E.*). — Sur un théorème de M. Lipschitz, et sur la partie fractionnaire de nombres de Bernoulli. (221-226).

Capelli (*A.*). — Sur la possibilité limitée de transformations conformes dans l'espace. (227-237).

Brioschi (*F.*). — Les équations différentielles pour les périodes des fonctions elliptiques. (238-240).

Brioschi (*F.*). — Sur la théorie des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (241-344). (*A suivre.*)

S. R.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tome I; mars 1884-juillet 1887.

Maisano (*G.*). — Interprétation sur la conique de la sextique binaire dont le catalectiquant est nul. (14-16).

Guccia (*G.-B.*). — Formules analytiques pour les transformations crémoniennes. (17-19, 20-23, 24-25 et 50-53).

Capelli (*A.*). — **Solution d'un problème de M. Schoute.** (48-50 et 53-54).

Maisano (*G.*). — **Sur les covariants indépendants du sixième degré par rapport aux coefficients de la forme biquadratique ternaire.** (54-56).

Guccia (*G.-B.*). — **Sur les transformations Cremona dans le plan.** (56-57).

L'auteur, au moyen des théorèmes énoncés par lui dans sa Note : *Sur les transformations Cremona dans le plan* (*Comptes rendus*, t. CI, p. 866), donne la solution de la question suivante :

Déterminer le nombre des droites qui sont des tangentes d'inflexion de leurs courbes correspondantes, et de celles qui en sont des tangentes doubles.

Albeggiani (*M.-L.*). — **Sur un théorème de M. Hermite, dans la XVIIe Leçon de son *Cours*, 2e édition autographiée, p. 118; 1883.** (59-63).

Hirst (*T.-A.*, F. R. S.). — **Sur la congruence Roccella, du troisième ordre et de la troisième classe.** (64-66).

L'auteur montre que la congruence Roccella est un cas particulier de la congruence crémonienne étudiée par lui dans son Mémoire *On Congruences of the third order and class* (*Proceedings of the L. M. S.*, Vol. XVI; 1885).

Maisano (*G.*). — Quelques recherches sur certaines courbes covariantes analogues aux courbes hessienne, steinérienne et cayleyenne. (66-68).

Giudice (*F.*). — Sur la détermination des racines réelles des équations à coefficients numériques réels. (69-72).

Cantone (*A.*). — Théorèmes sur la cubique gauche. (72-74).

Gebbia (*M.*). — Méthode pour former les équations à dérivées partielles des surfaces qui ont une génératrice de forme constante. (74-86).

Cette méthode est fondée sur la considération que la génératrice est emportée dans le mouvement d'un système invariable. L'auteur en fait aussi des applications aux surfaces cylindriques, coniques, gauches, développables, de révolution et aux surfaces canaux. Enfin il détermine l'ordre de l'équation différentielle générale des surfaces à génératrice de forme constante, et trouve que cette équation générale doit être du treizième ordre.

Maisano (*G.*). — Sur les tangentes doubles et d'inflexion de la courbe générale du cinquième ordre. (86-88).

Guccia (*G.-B.*). — Théorèmes sur les transformations crémoniennes dans le plan. Extension de quelques théorèmes de Hirst sur les transformations quadratiques. (119-132).

L'auteur étudie certains lieux et enveloppes remarquables qui se présentent dans une transformation birationnelle entre deux plans superposés. Il donne plusieurs belles et intéressantes propriétés de ces courbes, et fait connaître les liens imposés par elles aux points fondamentaux, aux points unis, aux points des couples involutifs et à d'autres points remarquables de la transformation.

Capelli (*A.*). — Sur un théorème qui se rattache à la formule servant à exprimer les formes algébriques à n séries de variables n^{aires} par des puissances du déterminant des variables et de formes qui dépendent seulement de $n-1$ séries de variables. (133-138).

Voici le théorème que l'auteur énonce et démontre pour quatre séries de variables quaternaires, mais d'une manière qu'on peut sans difficulté généraliser pour le cas de n séries.

Si l'on a les quatre séries

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1, x_2, x_3, x_4, \\ y &\equiv y_1, y_2, y_3, y_4, \\ z &\equiv z_1, z_2, z_3, z_4, \\ t &\equiv t_1, t_2, t_3, t_4, \end{aligned}$$

il ne peut y avoir une identité de la forme

$$\mathrm{D}_{yx} f_1 + \mathrm{D}_{zx} f_2 + \mathrm{D}_{tx} f_3 = (xyzt)\mathrm{F},$$

où les f_1, f_2, f_3, F soient des fonctions entières des trois séries de variables x, z, t et où

$$\mathrm{D}_{yx} = x_1 \frac{d}{dy_1} + x_2 \frac{d}{dy_2} + x_3 \frac{d}{dy_3} + x_4 \frac{d}{dy_4}, \qquad \ldots,$$

à moins que ses deux membres ne soient nuls séparément.

Guccia (*G.-B.*). — Généralisation d'un théorème de Nöther. (139-156).

L'auteur résout le problème suivant qui est évidemment une généralisation de la question résolue par le théorème de Nöther sur la réduction des réseaux homaloïdiques par des transformations quadratiques :

« Étant donné un système linéaire quelconque de genre zéro, indiquer les systèmes (d'ordre *minimum*) qu'on peut en déduire par des transformations

quadratiques du plan, et dont l'ordre ne peut être abaissé par aucune transformation birationnelle.

» Un système linéaire de genre zéro, dont les courbes se coupent en D points variables avec les paramètres, admet toujours un des systèmes suivants d'ordre *minimum*. »

A. Un système linéaire de l'ordre $\frac{D+2}{2}$ avec un point base ordinaire du degré $\frac{D}{2}$ et un point base simple à distance finie.

B. Un système linéaire de l'ordre $\frac{D+s-1}{2}$ ($0 \leqq s \leqq D-1$) avec un point base du degré $\frac{D+s-1}{2}$ à s tangentes fixes (distinctes ou coïncidentes) communes à toutes les courbes.

C. Un système linéaire de coniques sans points communs ($D = 4$).

D. Le réseau des droites du plan ($D = 1$).

Del Pezzo (*P.*). — Sur la représentation du complexe linéaire de droites sur l'espace de points à trois dimensions. (157-164).

Guccia (*G.-B.*). — Sur les surfaces algébriques dont les sections planes sont unicursales. (165-168).

L'auteur démontre le théorème de M. Picard sur ce sujet de manière à éviter les objections qu'on peut faire à la démonstration de M. Picard, et il emploie pour cela les résultats de ses études sur la réduction des systèmes linéaires de courbes planes. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

« Les seules surfaces algébriques dont les sections planes soient unicursales sont les surfaces gauches de genre zéro et la surface romaine de Steiner. »

Guccia (*G.-B.*). — Sur la réduction des systèmes linéaires de courbes elliptiques et sur un théorème général des courbes algébriques de genre p. (169-189).

Mémoire faisant suite à la *Généralisation d'un théorème de Nöther.*

Si k est le nombre des dimensions du système (nombre des paramètres), les systèmes d'ordre *minimum* pour $k > 1$ seront les suivants :

E. Un système linéaire de courbes elliptiques du troisième ordre ayant ν points bases simples à distance finie ou infiniment rapprochés

$$(\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

F. Un système linéaire de courbes elliptiques du quatrième ordre avec deux points bases doubles à distance finie ou infiniment rapprochés.

Pour $k = 1$ (et, par conséquent, $D = 0$).

G. Un faisceau de courbes de l'ordre $3m$ ayant neuf points bases du degré m (résultat déjà obtenu par M. Bertini).

Le théorème général est le suivant :

« Si un système linéaire déterminé par les points bases renferme un système linéaire de courbes elliptiques de dimension >1, on a

$$k+p-\mathrm{D}-1=0. \text{ »}$$

Ce théorème est une extension d'un autre que l'auteur avait donné dans sa *Généralisation d'un théorème de Nöther*. Il en donne diverses applications à l'étude des intersections de courbes douées de singularités quelconques.

Catalan (*E.*). — Sur les nombres de Segner. (190-201).

Martinetti (*V.*). — Sur une classe de systèmes linéaires de courbes planes algébriques. (202-204).

Soit donné un système linéaire dont les courbes soient uniquement assujetties à avoir aux points bases certaines singularités données quelconques. Si D est le nombre des intersections variables de deux courbes du système, k le nombre des dimensions et p le genre, on a

$$\mathrm{D}-p-k+1+h=0, \qquad (h \leqq p),$$

h étant le nombre des conditions imposées par les points bases, qui sont des conséquences des autres.

Martinetti (*V.*). — Sur quelques systèmes linéaires de courbes planes algébriques de genre 2. (205-216).

L'auteur étudie les systèmes linéaires de genre 2, déterminés par les points bases, et pour lesquels on a

$$\mathrm{D}=k+1-h, \qquad (h>0).$$

Segre (*C.*). — Sur les systèmes linéaires de courbes planes algébriques de genre p. (217-221).

L'auteur donne une démonstration très simple du théorème de M. Guccia : $k=\mathrm{D}-p+1$ pour tout système linéaire déterminé par les points de base et où $\mathrm{D}>2p-2$. Il en déduit immédiatement que :

Toute surface à sections linéaires de genre p dont l'ordre D est $>2p-2$ et qui est représentable sur le plan appartient à un espace de $\mathrm{D}-p+1$ dimensions, ou bien est une projection d'une surface de l'ordre D appartenant à un tel espace.

Il démontre ensuite le théorème suivant :

« Tout système linéaire k fois infini ($k>2$) de courbes d'ordre n et de genre p ayant D intersections variables, pour $\mathrm{D}>2p$, est toujours la représentation plane uniponctuelle d'une surface de l'ordre D dans un espace de k dimensions, »

et fait voir comment on peut en déduire une méthode pour la réduction des systèmes de courbes.

Giudice (*F.*). — Un théorème sur les substitutions. (222-223).

Si deux groupes G et H des ordres μ et ν sont permutables entre eux et le groupe L de leurs substitutions communes est de l'ordre s, l'ordre du groupe *minimum* renfermant G et H comme sous-groupe est $\frac{\mu\nu}{s}$.

Cesaro (*E.*). — Sur une recherche de limites. (224-226).

Soit $f(n)$ une fonction du nombre entier n qui, pour $n=\infty$, puisse tendre à r limites différentes suivant la forme de n. Indiquons par Ω_i le système de valeurs pour lesquelles $f(n)$ tend à la limite l_i, et soit ω_i la *fréquence* de Ω_i dans le système de tous les nombres entiers, c'est-à-dire la probabilité qu'un nombre entier pris au hasard appartienne à Ω_i. L'auteur établit les deux relations suivantes, dont la première est évidente,

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_r=1,$$

$$\lim\frac{1}{n}\sum_1^n f(i)=\sum_1^r \omega_i l_i,$$

et il en déduit une signification précise pour la *somme* d'une série indéterminée.

Giudice (*F.*). — Sur les équations irréductibles dont le degré est un nombre premier, résolubles par radicaux. (227-229).

Si une équation, dont le degré est premier, est résoluble par radicaux, les fonctions des racines x_z appartenant au groupe des substitutions linéaires entières entre les indices z sont exprimables rationnellement au moyen des coefficients de l'équation, les racines étant prises dans un certain ordre.

Conti (*I.*). — Sur les congruences engendrées par un couple de plans en correspondance double. (230-240).

Étant donnés deux plans en correspondance double, c'est-à-dire rapportés l'un à l'autre par une transformation de de Paolis, on joint les points correspondants par des droites, qui forment ainsi une congruence. L'auteur étudie cette congruence, et sa méthode est celle qui a été suivie par M. Hirst dans l'étude des congruences crémoniennes. Il fait l'application de ses résultats au cas de la transformation double quadratique.

Del Pezzo (*P.*). — Sur les surfaces du $n^{\text{ième}}$ ordre plongées dans l'espace de n dimensions. (241-271).

Généralités. Plans tangents. Projections des F_2^n plongées en S_n sur les Φ_2^3 de notre espace. Classification des F_2^n plongées en S_n. Sur les surfaces gauches du $n^{\text{ième}}$ ordre plongées dans l'espace de n dimensions. Sur les droites appartenant aux F_2^n non réglées de S_n. Sur la représentation plane de ces surfaces. Projection d'une surface faite d'un de ses plans tangents. Espaces S_s osculateurs. Sur

la surface du huitième ordre et de seconde espèce plongée dans l'espace de huit dimensions. Quelques variétés de trois dimensions dont les sections spéciales sont des F_2^n plongées en S_n. Surfaces F_2^n de S_n douées de points doubles coniques. Surfaces de notre espace qui se déduisent des F_2^n de S_n. Toute surface représentable à sections elliptiques est une projection d'une F_2^n plongée en S_n.

Del Re (*A.*). — Sur certains lieux qui se rencontrent dans l'étude de trois formes géométriques fondamentales de deuxième espèce deux à deux projectives. (272-283).

L'auteur étudie les figures engendrées :

1° Par deux systèmes plans homographiques et une gerbe homographique à tous les deux;

2° Par une gerbe homographique à un système plan, ce système et un autre qui lui est réciproque;

3° Par deux gerbes homographiques entre elles et une autre qui leur est réciproque.

Del Re (*A.*). — Quelques propriétés géométriques qui pourraient être utiles dans la théorie des systèmes de rayons lumineux. (284-289).

Si une surface algébrique S^n de l'ordre n est éclairée par un point lumineux, chaque rayon éclairant tous les points où il rencontre la surface, le système Ω des rayons réfléchis est une congruence de l'ordre $n[2n(n-1)+1]$.

Si une surface algébrique S^n de l'ordre n est éclairée par une courbe lumineuse de l'ordre m, les rayons réfléchis forment un complexe du degré $m^2(2n-1)$.

Del Re (*A.*). — Sur la congruence (6, 2) des droites qui joignent les couples de points homologues de deux quadriques qui se correspondent dans une homographie non axiale ni homologique de l'espace. (290-292).

Cette congruence est du sixième ordre et de la deuxième classe. Sa surface focale est de la quatrième classe.

Cesaro (*E.*). — Sur l'usage de l'intégration dans quelques question d'Arithmétique. (293-298).

Cesaro (*E.*). — Sur une question de probabilités. (299-303).

Il s'agit du problème du joaillier proposé par Laurent et traité par Catalan dans ses *Mélanges mathématiques*. La formule de Catalan, pour le prix du diamant brisé en n morceaux, est

$$X = \frac{2n}{\pi(n+1)};$$

SECONDE PARTIE.

[illegible] comme unité le prix du diamant entier, l'auteur montre que cette formule est erronée, et que le prix du diamant brisé est

$$\mathrm{X} = \frac{2}{n+2}.$$

Il traite aussi le problème analogue dans le cas où le prix d'un objet est une fonction f du volume, et ajoute des observations intéressantes sur une représentation géométrique du problème dans l'espace de $n-1$ dimensions.

Cesaro (*E.*). — Sur le mouvement d'un point sollicité vers une droite. (305-309).

Gebbia (*M.*). — Sur une Note de M. V. Cerruti. (310-313).

Albeggiani (*M.-L.*). — Généralisation de deux théorèmes sur les parenthèses d'ordre n. (314-326).

Gerbaldi (*F.*). — Sur la réalité des points communs et des tangentes communes de deux coniques. (327-337).

Guccia (*G.-B.*). — Sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques doués de singularités de base quelconques. (338-349).

Soient

p_0 le nombre des dimensions du système;
p_1 le genre;
p_2 le genre de la courbe variable d'intersection de deux surfaces;
p_3 le nombre des points variables d'intersection de trois surfaces.

Alors, sous certaines conditions qui laissent d'ailleurs une très grande généralité, on a

$$p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 2.$$

Albeggiani (*M.-L.*). — Sur quelques formules dans la théorie des fonctions elliptiques. (350-378).

S. R.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ (1). — 3e série.

Tome VI; 2e semestre 1887.

Laurent (*H.*). — Remarques sur les conditions d'intégrabilité. (305-311).

Fin d'un travail publié dans le même Volume (p. 274) et antérieurement analysé. Généralisation de deux théorèmes, de Jacobi et de Donkin.

Appell (*P.*). — Sur les polynômes qui expriment la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres entiers. (312-321).

Recherche d'un polynôme $\varphi_p(x)$ s'annulant avec x et vérifiant la condition $\varphi_p(x)-\varphi_p(x-1)=x^p$. Propriétés et usages de ces polynômes. Calcul des polynômes $\varphi_p(x)$ de proche en proche. Emploi de ces polynômes pour des développements de fonctions en séries.

Voir, sur ce sujet : Raale (*Journal de Crelle*, t. 42), Hermite (*Journal de Crelle*, t. 79), J. Bertrand (*Traité de Calcul différentiel*), J. Tannery (*Sur la théorie des fonctions*, p. 150).

Drouet. — Sur les foyers des sections planes d'une quadrique. (321-325).

Formation simple de l'équation tangentielle des foyers, déduite d'une propriété élémentaire des foyers d'une conique.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1887). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Géométrie descriptive, Calcul trigonométrique, Physique et Chimie, Lavis. (321-327).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1887). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Physique. (328-329).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (1887). — Énoncés des compositions : Arithmétique et Algèbre, Géométrie descriptive, Calcul trigonométrique, Géométrie, Géométrie analytique. (330-333).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XII$_2$, p. 98.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (1887). — Énoncés des compositions : Mathématiques, Épure, Lavis. (333-335).

Bonnet (*O.*). — Théories de la réfraction astronomique et de l'aberration. (335-368, 554-580).

Cette étude est extraite des Leçons faites en 1887 à la Sorbonne pour les candidats à la Licence. Nous nous bornons à en indiquer les grandes divisions principales :

RÉFRACTION ASTRONOMIQUE. — Notions préliminaires. — Équations différentielles de la trajectoire lumineuse. — Propriétés générales des trajectoires lumineuses. — Mouvement de la lumière émanée d'une étoile, à travers l'atmosphère, dans le cas où la densité de celle-ci ne dépend que de la distance au centre de la Terre. — Relations entre les divers éléments de l'atmosphère; transformations de l'intégrale définie $\int \operatorname{tang} i \frac{dn}{n}$. — Démonstration de quelques propriétés qui facilitent la détermination de la réfraction R. — Détermination de la valeur approchée de la réfraction totale. — Simplification du calcul des valeurs approchées r de la réfraction totale R, pour les différentes valeurs de H_0 comprises entre 0,63 et 0,79 et les différentes valeurs de T_0 comprises entre — 30° et 50°.

Une suite, traitant de l'aberration, comme le promet le titre, sera sans doute publiée ultérieurement.

De Crès (*R.*). — Solution de la question du Concours d'admission à l'École normale (1886). (369-372).

Sur un système de courbes du troisième degré.

Barisien. — Solution de la question de Géométrie analytique donnée au Concours d'Agrégation des Sciences mathématiques (1886). (372-391).

Propriétés du système des coniques qui touchent une droite donnée D en un point donné O, et qui ont une autre droite donnée D' pour directrice.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887. — Énoncés des compositions : Mathématiques spéciales. (391-392).

BIBLIOGRAPHIE. — *J. Boussinesq* : Cours d'Analyse infinitésimale; in-8°, Paris, 1887; t. I, Calcul différentiel. — *C. Jordan* : Cours d'Analyse de l'École Polytechnique; Paris, 1887; t. III, Équations différentielles. — *Gaston Darboux* : Leçons sur la théorie générale des surfaces et sur les applications géométri-

ques du Calcul infinitésimal; Ire Partie, Paris, 1887; 1 vol. gr. in-8°. (392-395).

Goffart (*N.*). — Solution analytique de la question proposée en 1884 pour l'admission à l'École Polytechnique (395-399).

Propriétés du triangle ayant pour sommets un point d'une conique et les deux foyers.

Questions proposées. — 1564 à 1568. (399-400).

Genty. — Sur un complexe du second ordre et sur la question posée au Concours de 1881 pour l'agrégation des Sciences mathématiques. (401-415).

Étude des droites telles que si, par chacune d'elles, on mène des plans tangents à un ellipsoïde, les normales aux points de contact soient situées dans un même plan. Le complexe constitué par ces droites a été envisagé par le D^r^ Th. Reye dans sa *Géométrie de position*. Le présent article contient au début des notions générales fort intéressantes sur les coordonnées d'une droite, notions dont l'auteur fait application à la question proposée.

Laurent (*H.*). — Sur le calcul d'une fonction symétrique. (416-419).

Contribution à la théorie de l'élimination. Cet article se rattache à la notion des polynômes réduits et des équivalences algébriques, dont l'auteur a publié antérieurement la théorie dans le même Recueil.

Maupin (*G.*). — Sur une question posée aux examens oraux d'admission à l'École Polytechnique. (419-421).

Sur un paraboloïde hyperbolique équilatère.

Biehler (*Ch.*). — Sur une application de la méthode de Sturm. (421-426).

Étude des termes des réduites de la fraction continue qu'on obtient en développant $\tan x$. Ces polynômes ont tous leurs zéros réels.

Concours général de 1887. — Énoncé de la composition de Mathématiques élémentaires. (426-428).

Concours d'admission pour l'École centrale (Juillet 1887). — Énoncés des compositions : Géométrie analytique, Épure, Calcul trigonométrique, Physique, Chimie. (428-433).

Concours pour l'agrégation des Sciences mathématiques (1887). — Énoncés des compositions : Mathématiques élémentaires, Mathématiques spéciales, Analyse et ses applications géométriques, Mécanique rationnelle. (433-437).

Goursat (*E.*). — Sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante (437-439).

Démonstration rigoureuse et simple du théorème classique sur ce maximum. M. Darboux en a précédemment donné une, dans le ***Bulletin des Sciences mathématiques***, laquelle est également à l'abri de toute objection.

Rouché (*E.*). — Propriétés géométriques des polygones funiculaires. (439-465).

Article extrait des Leçons de Statique graphique faites par l'auteur au Conservatoire des Arts et Métiers en 1886-1887. En voici les divisions principales :

Définition des polygones funiculaires. — Lemmes de Géométrie. — Axe commun à deux polygones funiculaires d'un même système de forces. — Lieu du point de rencontre de deux côtés de rangs assignés. — Lieu des pôles des polygones funiculaires passant par deux points donnés. — Propriétés spéciales des polygones funiculaires relatifs à un système de forces concourantes ou parallèles. — Polygone funiculaire passant par trois points donnés. — Polygone funiculaire passant par deux points donnés et ayant une distance polaire donnée.

Goursat (*E.*). — Remarque sur la détermination des foyers d'une conique. (465-468).

M. Goursat ramène la détermination des foyers à l'extraction de la racine carrée d'une quantité imaginaire. Extension aux courbes algébriques planes de degré quelconque.

Sarrau (*E.*). — Sur un théorème de la théorie de l'attraction. (469-485).

Ce théorème se rapporte à l'attraction newtonienne exercée par une masse sur un point. Établi d'abord par Poisson (*Bulletin de la Soc. philom.*, t. III, p. 368), il a été démontré depuis par divers géomètres (*voir* Gauss, *Œuvres*, t. V, p. 197; Clausius, *De la fonction potentielle et du potentiel*, p. 44; Em. Mathieu, *Théorie du potentiel*). Ces diverses démonstrations se compliquent de propositions de Calcul intégral dont M. Sarrau débarrasse la solution directe et fort élégante qu'il donne ici. Il commence par établir quelques théorèmes préliminaires, dont il indique l'application à des exemples, et arrive ensuite au théorème de Poisson. L'article se complète par la démonstration, comme corollaire, d'une proposition établie par Gauss et par Chasles, et qu'on utilise souvent dans la théorie de l'électricité.

Biehler (*Ch.*). — Sur les développements en séries des fonctions rationnelles. (485-492).

Démonstration élémentaire, pour les fonctions rationnelles, du théorème de Cauchy sur le développement en série d'une fonction.

D'Ocagne (*M.*). — Les coordonnées parallèles de points. (493-502).

Si AP, BP coupent respectivement en V, U deux droites Bq, Ap, perpendiculaires à AB, M. d'Ocagne appelle *coordonnées parallèles* de P les expressions $\frac{1}{AU}, \frac{1}{BV}$. Cette étude se rattache à des travaux du même auteur publiés dans les *Nouvelles Annales* en 1885, et le conduit à une série d'applications intéressantes, notamment en ce qui concerne la théorie des coniques.

Errata aux Tables de logarithmes de Schrön. (502).

Bibliographie. — *J. Bertrand :* Thermodynamique; Paris, 1887. (503-504).

Questions proposées. — 1569, 1570. (504).

Lévy (*M.*). — Sur le principe de l'énergie. (505-525).

Leçon professée par l'auteur au Collège de France en 1880, et depuis, partiellement, à l'École centrale des Arts et Manufactures. Voici les divisions essentielles de cette étude si intéressante, soit au point de vue des applications, soit en elle-même, à cause du caractère éminemment philosophique qu'elle présente :

Sources de travail, énergie. — Expressions mathématiques des deux espèces d'énergie. — Exemples; réflexions sur la difficulté de qualifier certaines énergies. — Objet de la théorie de l'énergie. — Principe de la conservation de l'énergie. — Application à un système matériel quelconque; le théorème des forces vives. — Application à un cycle. — Équivalent mécanique de la chaleur.

Humbert (*G.*). — Sur quelques propriétés métriques des courbes. (526-547).

Exposé d'une méthode élémentaire permettant d'arriver simplement à quelques propriétés métriques des courbes algébriques, antérieurement établies par l'auteur dans un Mémoire publié au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. Le présent article se subdivise de la manière suivante :

Principes fondamentaux. — Centres des moyennes distances. — Centres des moyennes harmoniques. — Polaires. — Propriétés de la lemniscate. — Applications diverses.

Appell (*P.*). — Sur les valeurs approchées des polynômes de Bernoulli. (547-554).

Ce travail se rattache à un précédent article de M. Appell, publié à la page 312 du même Volume (*voir* ci-dessus). Il se propose ici de chercher une valeur approchée du polynôme $\varphi_p(x)$ quand p est très grand, en suivant une méthode indiquée par M. Darboux dans un Mémoire *sur l'approximation de fonctions de très grands nombres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. IV, 1878).

Droz (*A.*). — Solution géométrique de la question 1526. (580-581).

Sur les coniques circonscrites à un parallélogramme et tangentes à une droite.

Lemoine (*E.*). — Solution de la question 1565. (582).

Sur les points de Brocard et de Steiner.

QUESTIONS PROPOSÉES. — 1571, 1572. (582). A. L.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES(1).

Tome CIV; 1887.

Callandreau. — Sur la série de Maclaurin dans le cas d'une variable réelle. (38-41).

Si, dans un intervalle fini ($0 \leq x \leq a$), la fonction $f(y)$ est représentée par la série de Maclaurin

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots,$$

elle continuera à être représentée par la même série tant que les dérivées successives $f^{(n)}(x)$ seront continues et que la série de Maclaurin sera convergente.

M. Callandreau indique les points principaux de la démonstration de ce théorème dans un cas particulier, celui où l'on a toujours

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n-1) f''(0)} < 1,$$

et où les dérivées $f^{(n)}(x)$ sont supposées toutes positives pour $0 \leq x \leq 1$.

---

(1) Voir *Bulletin*, XII$_2$, p. 105.

Il montre qu'alors, si le terme complémentaire R_n tend vers zéro, entre $x = 0$ et $x = a\,(a < 1)$, on a, entre $x = a$ et $x = 1$,

$$R_n < \frac{x^n f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n} \times n\,\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^{n+1}},$$

quantité qui s'évanouit lorsque n augmente indéfiniment.

Picard. — Sur une classe d'équations différentielles. (41-43).

L'auteur considère l'équation différentielle

$$f(y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0 \qquad (1)$$

où ne figure pas la variable indépendante x et où f désigne un polynôme.

Supposant l'intégrale générale uniforme, soit y une intégrale quelconque, et soient $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m)}$ les valeurs que prennent cette fonction et ses dérivées quand on remplace x par $x + h$; on aura

$$(s) \qquad \begin{cases} y_1 = F(h, y, y', \ldots, y^{(m)}), \\ y_1' = F_1(h, y, y', \ldots, y^{(m)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1^{(m)} = F_m(h, y, y', \ldots, y^{(m)}), \end{cases}$$

les F étant des fonctions uniformes du point analytique $(y, y', \ldots, y^{(m)})$ de la surface f; et la transformation ainsi obtenue sera réversible. On voit que la relation algébrique (1) pourra être transformée en elle-même par une substitution uniforme réversible, ou *substitution biuniforme*. La substitution biuniforme (*s*) renfermera un paramètre arbitraire h. Dans le cas où $m = 1$, cette transformation biuniforme est en même temps birationnelle; il n'en est pas de même dans le cas général.

Se plaçant d'abord dans le cas le plus simple, M. Picard a résolu le problème suivant :

« Reconnaître sur l'équation différentielle si l'intégrale générale est uniforme et conduit à une transformation (*s*) birationnelle. Lorsqu'on a reconnu qu'il en est ainsi, on peut effectuer complètement l'intégration. L'intégrale générale est alors une fonction uniforme de x définie dans tout le plan. »

Il n'en est pas nécessairement ainsi dans le cas général : toute intégrale de l'équation (1) peut être une fonction définie seulement dans une partie du plan, variant d'une intégrale à l'autre avec les constantes arbitraires.

Lindelöff. — Observations relatives à une Note récente de M. P. Serret sur un théorème de Géométrie. (43).

Poincaré. — Sur le problème de la distribution électrique. (44-46).

Soit un conducteur chargé au potentiel 1. L'auteur imagine un réseau formé d'une infinité de sphères $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$, toutes extérieures au conducteur et telles que tout point extérieur au conducteur soit intérieur au moins à l'une

d'elles, puis une sphère Σ de rayon R assez grand pour contenir tout le conducteur.

Si l'on étend sur Σ une couche positive de densité uniforme $\frac{1}{4\pi R}$, le potentiel de cette couche sera égal à l'intérieur, plus petit que 1 et positif à l'extérieur.

Si l'on remplace l'électricité contenue à l'intérieur d'une des sphères S_i par une couche superficielle exerçant la même action sur tout point extérieur, le potentiel ne changera pas à l'extérieur de S_i et diminuera à l'intérieur.

Si l'on opère ainsi successivement sur chaque sphère S_i, de manière à revenir une infinité de fois sur chaque sphère, le potentiel ira toujours en diminuant; mais, comme il reste toujours positif, il tendra vers une limite finie et déterminée V.

Il est clair que V est toujours plus petit que 1 et s'annule à l'infini, et l'on prouve aisément que V se réduit à 1 sur la surface du conducteur. Il suit de là que V est le potentiel d'une charge électrique en équilibre sur le conducteur.

Duhem. — Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires. (54-56).

De la théorie du potentiel thermodynamique, M. Duhem déduit cette conséquence que la surface libre d'un conducteur électrisé est soumise, en chacun de ces points, à une tension électrique dont la valeur est

$$\frac{a\,Q}{M} + b\,\Delta + 2\pi\varepsilon\,\Delta^2,$$

Δ étant la densité de l'électricité libre, Q la charge totale, M la masse du corps, a, b deux constantes qui dépendent de la nature du corps, ε la constante qui figure dans la loi de Coulomb. C'est seulement pour les corps de très grandes dimensions et très fortement chargés que cette tension se réduit à la valeur arbitrairement reçue.

La même théorie permet à l'auteur d'établir l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la surface de séparation de deux fluides traversés par des courants constants, savoir

$$A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + (l' - l)\,g\,z = C + C'i + C''i^2,$$

i étant le flux électrique normal à la surface; la constante A dépend uniquement de la nature des deux fluides, nullement de leur état d'électrisation.

Perrin. — Sur la théorie des formes algébriques. (108-111).

L'auteur démontre un théorème qui ramène la recherche des invariants et covariants purs d'une forme ou d'un système de formes à p variables cogrédientes, à celle des invariants d'un système déterminé de formes à $p-1$ variables cogrédientes.

Soit une forme à p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, ordonnée par rapport à l'une d'elles

$$u = a x_1^m + m a_1 x_1^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x_1^{m-2} + \ldots + a_m;$$

si l'on construit, en traitant u comme une forme binaire où x serait le rapport des deux variables, les $m-1$ péninvariants principaux (c'est-à-dire sources des covariants associés à la forme binaire), savoir

$$\begin{aligned} v_2 &= a u_2 - u_1^2, \\ v_3 &= a u_3 - 3 a u_1 u_2 + 2 u_1^3, \\ v_4 &= a u_4 - 4 u_1 u_3 + 3 u_2^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

on aura un système de $m-1$ formes à $p-1$ variables. Tout invariant de ce système de formes, considérées comme indépendantes et simultanées, sera un invariant ou un péninvariant pur de u considérée comme forme à p variables; et réciproquement tout invariant ou péninvariant pur de u, multiplié par une puissance convenable de a, devient une fonction entière de a et des invariants du système des formes $v_2, \ldots, v_m$.

Ce théorème subsiste pour un système quelconque de formes $u, u', u'', \ldots$, pourvu qu'on adjoigne aux péninvariants principaux $v_2, \ldots, v_m$ de u, par exemple, les péninvariants $v_1', v_2', \ldots$; $v_1'', v_2'', \ldots$, qui apparaissent comme coefficients des puissances de x_1 dans $u', u'', \ldots$, lorsqu'on fait disparaître dans u le terme en x_1^{m-1}.

Gilbert. — Sur les accélérations des points d'un système invariable en mouvement. (162-165).

Formules élégantes relatives au mouvement d'un solide mobile autour d'un point fixe ou libre.

Dans le cas du point fixe, soient v la vitesse d'un point, j son accélération, ω l'axe instantané de rotation, λ l'accélération angulaire, R la résultante des forces motrices, S la résultante des quantités de mouvement, G l'axe du couple résultant des forces extérieures, K l'axe d'impulsion. On a

$$\begin{aligned} \omega j + \lambda v &= 0, \\ \omega R + \lambda S &= 0, \\ \omega G - \lambda K &= 0. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un corps libre, cette dernière relation subsiste si l'on prend pour centre de réduction le point central de l'axe instantané de rotation et de glissement, pourvu que le centre de gravité du corps soit dans le plan passant par cet axe et par l'accélération angulaire. Les deux premières formules deviennent

$$\omega j + \lambda v = \frac{d(\omega Q)}{dt},$$

$$\omega R + \lambda S = M \frac{d(\omega Q)}{dt},$$

M étant la masse du corps, et Q la vitesse de glissement le long de l'axe instantané.

Demartres. — Sur les surfaces qui ont pour lignes isothermes une famille de cercles. (217-220).

On considère un cercle variable dont les équations dépendent d'un paramètre unique l; soient O son centre, Oz son axe, R son rayon, Ox, Oy deux diamètres rectangulaires, dont le premier Ox est supposé passer par le centre radical des deux cercles de paramètres l et $l+dl$. Quand on passe du premier cercle au second, le centre O éprouve un déplacement $u\,dl$, $v\,dl$, $w\,dl$, et le trièdre $Oxyz$ subit une rotation $u\,dl$, $p\,dl$, $q\,dl$. En exprimant les conditions pour que la surface soit décomposée en carrés par les cercles et leurs trajectoires orthogonales, M. Demartres parvient aux équations

$$v + r\alpha = 0,$$
$$u + \alpha' = 0,$$
$$A(B' + rA - pC) - B(A' + qC - rB) = 0,$$

où α désigne la distance OP et où l'on a posé

$$A = -\alpha' + qRi, \qquad B = -r\alpha - pRi, \qquad C = q\alpha + R'i.$$

Les deux premières signifient que le point P est fixe; la surface est alors une anallagmatique à déférente réglée. La troisième exprime que la focale imaginaire, intersection de la directrice avec la déférente, a sa binormale perpendiculaire à l'axe du cercle.

Les surfaces cherchées sont donc les anallagmatiques dont la déférente est une surface réglée admettant comme ligne asymptotique son intersection avec la sphère directrice.

Perrin. — Sur la théorie des formes algébriques à p variables. (220-223).

Du principe général établi dans sa précédente Communication, et qui ramène la recherche des invariants et covariants purs d'une forme ou d'un système de formes à p variables cogrédientes à celle des invariants d'un système déterminé de formes à $p-1$ variables cogrédientes, M. Perrin déduit cette conséquence importante :

Le nombre des invariants et covariants purs *distincts* d'une forme d'ordre m à p variables est *au moins égal* au nombre des invariants *distincts* d'un système de $m-1$ formes à $p-1$ variables respectivement d'ordres 2, 3, ..., m.

Et de même pour un système de formes :

Le nombre des invariants et covariants purs *distincts* que possède un système de $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ formes indépendantes simultanées à p variables, comprenant n_1 formes linéaires, n_2 quadratiques, ..., n_m d'ordre m, est *au moins égal* au nombre d'invariants *distincts* que possède un système de

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots + mn_m - 1$$

formes indépendantes simultanées à $p-1$ variables, comprenant

n_m formes d'ordre m,

$n_{m-1} + n_{m-2}$ formes d'ordre $m-1$,

....

[illegible] formes quadratiques,

[illegible] $p-1$ formes linéaires.

Parmi les applications de ce théorème indiquées par l'auteur, nous citerons les deux suivantes :

La forme biquadratique linéaire a certainement plus de 27 invariants ou covariants purs distincts;

Une forme d'ordre m à p variables possède un covariant pur (distinct ou réductible) de degré $2p-3$ et d'ordre $(2p-3)m-2p$; pour une forme ternaire, c'est le hessien.

Tisserand. — Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire. (259-265).

Si les moyens mouvements de deux planètes étaient commensurables, les formules ordinaires du calcul des variations cesseraient de s'appliquer. Suivant M. W. Meyer (*Mémoire sur le système de Saturne,* 1884), la théorie de l'attraction prouverait que deux planètes tournant dans le même sens autour d'un centre commun ne pourraient pas exister si les durées de leurs révolutions autour de ce centre étaient dans un rapport commensurable simple.

Cependant, dès 1812, Gauss faisait observer que le rapport des moyens mouvements de Jupiter et de Pallas diffère peu de $\frac{7}{18}$; et les travaux récents de MM. Gylden et Harzer tendent à prouver que la commensurabilité exacte des moyens mouvements n'est pas un obstacle à la stabilité.

Cette conclusion est confirmée par les calculs de M. Tisserand dans le cas simple où, la petite planète se mouvant dans le plan même de l'orbite de Jupiter, le rapport de commensurabilité serait de la forme $\frac{j}{j-1}$, j désignant un entier positif.

Perrin. — Sur la théorie des formes algébriques à p variables. (280-282).

M. Perrin donne, pour obtenir tous les contrevariants et péninvariants mixtes distincts appartenant à une forme ou à un système de formes à p variables, un procédé analogue à celui qui lui a fourni tous les invariants et péninvariants purs distincts en partant d'un système déterminé de formes à $p-1$ variables.

Il en conclut que le nombre total des invariants, contrevariants et covariants (purs ou mixtes), que possède une forme d'ordre m à p variables, est au moins égal au nombre des invariants distincts que possède un système de m formes à $p-1$ variables respectivement d'ordres $1, 2, \ldots, m$.

Le même nombre total pour un système de $n_1+n_2+\ldots+n_m$ formes indépendantes simultanées à p variables (n_1 linéaires, ..., n_m d'ordre m) est *au moins égal* au nombre d'invariants distincts que possède un système de $n_1+2n_2+\ldots+mn_m$ formes à $p-1$ variables (n_m d'ordre m, n_m+n_{m-1} d'ordre $m-1$, ..., $n_m+n_{m-1}+\ldots+n_1$ linéaires).

Lecornu. — Sur les séries entières. (349-352).

On sait que la série entière

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

définit à l'intérieur du cercle de convergence une fonction holomorphe $\varphi(z)$ qui, prolongée en dehors de ce cercle, présente sur la circonférence un ou plusieurs points critiques.

S'il n'y en a qu'un, l'affixe de ce point, dit M. Lecornu, est égal à la limite du rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ de deux coefficients consécutifs.

S'il y en a plusieurs, la limite de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ est indéterminée. Si $\varphi(z)$ est uniforme, on cherchera à décomposer la série en une somme de plusieurs autres, dont chacune donne pour $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ une valeur limite, et l'on obtiendra ainsi les divers points critiques de la fonction.

Lipschitz. — Sur les surfaces où la différence des rayons de courbure principaux en chaque point est constante. (418).

Les coordonnées cartésiennes d'une pareille surface sont exprimées au moyen de deux angles θ et φ par les formules

$$x = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}[(\Theta - M\varphi)\cos\theta - \Theta + L\varphi],$$

$$y = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\left[(\Theta - M\varphi)\sin\theta\cos\varphi + \frac{M - L\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\right],$$

$$z = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\left[(\Theta - M\varphi)\sin\theta\sin\varphi + \frac{M - L\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\right],$$

où ρ_1 et ρ_2 désignent les rayons de courbure principaux, L et M deux constantes arbitraires et Θ la fonction de θ définie par la relation

$$\Theta = 2\int \frac{(1-\cos\theta)^2 - (1 - M\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta.$$

D'Ocagne. — Sur une certaine classe de suites récurrentes. (419-420).

Soit une suite (u) définie par la formule de récurrence

$$u_{p+n} = u_{p+n-1} + u_{p+n-2} + \ldots + u_n,$$

avec les conditions initiales

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0.$$

Si l'on représente par $P(n)$ une fonction arithmétique égale à -1 quand n est un multiple impair de $p+1$, à 1 quand n est un multiple pair de $p+1$, à zéro dans tous les autres cas (fonction dont on peut former diverses expressions), le terme général u_{p+n} sera donné par la formule

$$u_{p+n} = P(n) + 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{k=E\left(\frac{n-1}{p+1}\right)} (-1)^k \frac{n-k(p-1)}{k} C_{n-pk-1}^{k-1} 2^{n-1-k(p+1)}.$$

S'il s'agit d'une série (U) définie par la même loi de récurrence, mais avec des conditions initiales quelconques, on aura

$$U_m = U_1 u_{m+p-1} + (U_2 - U_1) u_{m+p-2} + (U_3 - U_2 - U_1) u_{m+p-3} + \dots + (U_p - U_{p-1} - \dots - U_1) u_m.$$

Mansion. — Sur la formule de quadrature de Gauss et sur la formule d'interpolation de M. Hermite. (488-490).

Après avoir constaté que l'expression du reste de la formule de Gauss, précédemment donnée par lui (*Comptes rendus*, t. CII, p. 412; 1885) n'est qu'un cas particulier d'une expression plus générale due à M. Markoff, l'auteur montre que la formule d'interpolation de M. Hermite

$$\begin{aligned} f(z) = {} & f(a) + (z-a) D_a f(a) + (z-a)^2 D_a f(a, c) \\ & + (z-a)^2 (z-c)^2 D^2_{ac} f(a, c) \\ & + \frac{(z-c)^2 (z-c)^2}{2} D^3_{ac^2} f(a, c) + \frac{(z-a)^2 (z-c)^3}{2} D^3_{ac^2} f(a, c, z) \end{aligned}$$

peut se déduire de la formule de Newton, par un simple passage à la limite.

Caspary. — Sur les systèmes orthogonaux formés par les fonctions thêta. (490-493).

Si les arguments $w, x, y, z; w', x', y', z'$ sont liés entre eux par les relations

$$2w' = w + x + y + z, \quad 2x' = w + x - y - z,$$
$$2y' = w - x + y - z, \quad 2z' = w - x - y - z,$$

et que l'on pose, pour abréger,

$$\theta_\alpha(u, q)\, \theta_\beta(v, q) = \theta_\alpha(u; v), \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3),$$

les seize combinaisons de fonctions thêta d'un seul argument

$$\begin{array}{ll} \theta(w;x) - \theta(y;z), & \theta_2(w;x) + \theta_2(y;z), \\ -\theta_2(w;x) + \theta_2(y;z), & \theta(w;x) + \theta(y;z), \\ \theta_3(w';x') + \theta_3(y';z'), & -\theta_1(w';x') - \theta_1(y';z'), \\ \theta_1(w';x') - \theta_1(y';z'), & \theta_3(w';x') - \theta_3(y';z'), \\ -\theta(w';x') - \theta(y';z'), & -\theta_2(w';x') + \theta_2(y';z'), \\ \theta_2(w';x') + \theta_2(y';z'), & -\theta(w';x') + \theta(y';z'), \\ \theta_3(w;x) - \theta_3(y;z), & -\theta_1(w;x) + \theta_1(y;z), \\ \theta_1(w;x) - \theta_1(y;z), & \theta_3(w;x) + \theta_3(y;z) \end{array}$$

forment un système orthogonal.

Ce théorème donne lieu à un très grand nombre de relations.

Les fonctions thêta de ρ variables forment elles-mêmes des systèmes orthogonaux. L'auteur explique comment on arrive à ces systèmes et termine par quelques applications simples.

Amigues. — Sur les surfaces applicables. (564-566).

Soient

$$R = f(s), \qquad T = \varphi(s)$$

les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement d'une développable, exprimés en fonction de l'arc. On obtiendra toutes les surfaces *rectilignement* applicables sur la proposée en cherchant le lieu des tangentes aux courbes

$$R = f(s), \qquad T = \psi(s),$$

ψ désignant une fonction arbitraire.

Pour que deux surfaces gauches soient rectilignement applicables, il faut et il suffit que deux génératrices correspondantes coupent les lignes de striction sous le même angle et aient le même paramètre de distribution, et, en outre, que deux couples de génératrices correspondantes interceptent sur les lignes de striction des arcs égaux.

L'équation générale des surfaces gauches rectilignement applicables sur une surface gauche donnée contient une fonction arbitraire. Si l'on ajoute cette condition, que la ligne de striction de la surface cherchée doit être plane, cette surface s'obtient par une simple quadrature. En particulier, il n'y a qu'une surface gauche à ligne de striction plane qui soit rectilignement applicable sur un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Antomari. — Sur le produit de deux sommes de huit carrés. (566-567).

Démonstration nouvelle de ce théorème : le produit de deux sommes de huit carrés est une somme de huit carrés.

Jamet. — Théorème sur les complexes linéaires. (567-569).

Si tous les plans osculateurs à une courbe S, aux points où elle est rencontrée par un plan passant par une droite fixe D, concourent en un même point situé dans ce plan et sur une droite fixe Δ, toutes les tangentes à cette courbe font partie d'un complexe linéaire; par rapport à ce complexe, les droites D et Δ sont polaires réciproques l'une de l'autre.

Parmi les courbes douées de la propriété énoncée figurent l'hélice (Reye), les cubiques gauches (Appell), et plus généralement toute ligne asymptotique d'une surface réglée dont les génératrices rencontrent deux droites fixes D, Δ.

Poincaré. — Sur un théorème de M. Liapounoff relatif à l'équilibre d'une masse fluide. (622-625).

Pour une masse fluide homogène en repos, régie par la loi de Newton, la sphère est une figure d'équilibre stable. Pour démontrer qu'elle est la seule figure stable, il faudrait établir qu'elle est la seule qui corresponde à un maximum relatif de l'énergie

$$W = \int \frac{d\tau\, d\tau'}{r}.$$

On ne sait pas le faire, mais M. Liapounoff a prouvé que la sphère correspond au maximum absolu de W.

M. Poincaré simplifie la démonstration de M. Liapounoff par des considérations empruntées à l'Électrostatique.

Après avoir établi que, pour un volume donné de la masse, W a un maximum absolu, il démontre le lemme suivant : de tous les conducteurs de même volume, c'est la sphère qui a la plus petite capacité électrique C. Puis, après avoir mis l'intégrale W sous la forme

$$W = \frac{3}{5} V\tau,$$

où V désigne le potentiel à la surface du fluide, il observe que l'attraction d'une figure d'équilibre sur un point extérieur est la même que celle d'une charge électrique égale à τ répandue à la surface supposée conductrice; d'où l'on conclut

$$V = \frac{\tau}{C}, \qquad W = \frac{3}{5}\frac{\tau^2}{C}.$$

Donc la sphère qui correspond au minimum de C doit correspondre au maximum de W.

Kœnigs. — Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments. (673-675).

Soit une surface (u) dépendant de $n+1$ paramètres

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}.$$

Le contact de deux surfaces infiniment voisines s'exprime par l'évanouissement d'une forme des différentielles du dont les coefficients dépendent de u. Ces formes

$$(A) \qquad M(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1} \mid du_1, du_2, \ldots, du_{n+1}) = M(u \mid du)$$

possèdent deux caractères spécifiques, l'un algébrique, l'autre transcendant.

Si à la place de $du_1, du_2, \ldots, du_{n+1}$ on introduit les variables $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ considérées comme coordonnées ponctuelles homogènes linéaires dans l'espace à n dimensions, l'équation

$$M(u \mid t) = 0$$

représente une surface dans cet espace. Ce qui caractérise algébriquement la forme (A), c'est que la surface $M(u \mid t) = 0$ a des plans tangents qui ne dépendent que de *deux* paramètres.

La condition de contact du plan

$$(P) \qquad T_1 t_1 + T_2 t_2 + \ldots + T_{n+1} t_{n+1} = 0$$

s'exprime par $n-2$ équations homogènes

$$(B) \quad \mathfrak{M}_1(u \mid T) = 0, \quad \mathfrak{M}_2(u \mid T) = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T) = 0.$$

en sorte que la forme (A), au lieu d'avoir une forme adjointe, comme c'est le cas général, possède un *système adjoint* (B) de formes.

Le caractère transcendant consiste en ce que les équations simultanées aux

dérivées partielles

$$(C)\quad \mathfrak{M}_1\left(u\left|\frac{\partial\theta}{\partial u}\right.\right)=0,\qquad \mathfrak{M}_2\left(u\left|\frac{\partial\theta}{\partial u}\right.\right)=0,\qquad \ldots,\qquad \mathfrak{M}_{n-3}\left(u\left|\frac{\partial\theta}{\partial u}\right.\right)=0$$

admettent une solution complète comprenant trois constantes (dont une additive à la fonction θ).

Réciproquement, si l'on part d'un système complet quelconque (C), en formant les équations (B) et cherchant l'enveloppe du plan (P) qui vérifie ces équations, on tombera sur une forme $M(u\mid t)$. La forme $M(u\mid du)$ est fondamentale pour une infinité de systèmes d'éléments; tous ces systèmes d'éléments dérivent les uns des autres par une transformation de contact.

De Longchamps (*G.*). — Sur la rectification de la trisectrice de Maclaurin au moyen des intégrales elliptiques. (676-678).

L'auteur indique une génération de cette courbe qui conduit à sa rectification au moyen des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce :

Si dans un cercle on prend un rayon fixe et que, par les extrémités de ce rayon, on mène deux semi-droites parallèles variables, elles rencontrent le cercle en deux points B et C; le pôle de la droite BC décrit la trisectrice de Maclaurin.

Darboux. — Sur un problème relatif à la théorie des surfaces minima. (728-733).

Dans une Communication antérieure (*Comptes rendus*, t. CII, 1886), M. Darboux a donné deux solutions de ce problème : « Déterminer les surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique ». A ces deux solutions il en ajoute une troisième, fondée sur le mode suivant de génération des surfaces minima, dû à M. Ribaucour : « Étant données deux développables Σ, Σ_1, circonscrites au cercle de l'infini, la surface minima la plus générale est l'enveloppe des plans perpendiculaires à toutes les tangentes communes de ces développables, et équidistants des deux points de contact de ces tangentes communes ».

Cette définition conduit M. Darboux à une solution très simple du problème proposé. Pour obtenir toutes ces surfaces minima inscrites dans une développable Δ, on déterminera toutes les surfaces réglées dont les génératrices sont normales aux plans de Δ et pour lesquelles le point central de chaque génératrice se trouve dans le plan correspondant de Δ. Les arêtes de rebroussement des deux développables circonscrites à chaque surface réglée et au cercle de l'infini seront les courbes minima au moyen desquelles on peut, comme l'a montré M. Lie, engendrer la surface minima correspondante.

Si l'on rapporte les points de l'espace au trièdre mobile formé par la tangente, la normale principale et la binormale en un point de l'arête de rebroussement de Δ, la droite qui engendre la surface réglée satisfaisant aux conditions énoncées aura pour équations

$$y=y_1,\qquad x=-\rho\frac{dy_1}{ds},$$

où $\frac{ds}{\rho}$ désigne l'angle de contingence en M. Ces formules résolvent complète-

ment le problème; on choisira arbitrairement y_1; si y, est algébrique, la surface minima correspondante sera algébrique. Ces formules se traduisent par une construction géométrique que M. Darboux donne en terminant.

Autonne. — Sur les substitutions crémoniennes quadratiques. (767-770).

Dans une Note antérieure (*Comptes rendus*, t. CIII) l'auteur étudiait, dans un cas très particulier, les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. Abordant le problème dans toute sa généralité, M. Autonne fait connaître actuellement les propriétés d'une substitution quadratique isolée.

Toute crémonienne quadratique, qui n'est pas crémonique, est le produit de deux ou trois crémoniques.

Toute crémonique ou crémonienne quadratique peut être obtenue en combinant les substitutions Cremona quadratiques avec des linéaires monistiques ou dualistiques; ce résultat est l'analogue du fait bien connu que toute substitution Cremona d'ordre quelconque est un produit de substitutions Cremona quadratiques et de collinéations.

Par crémonienne *équivalente* à une crémonienne s, l'auteur entend une crémonienne $\alpha s \beta$, où α et β sont des substitutions monistiques ou dualistiques. Il fait connaître les quatre substitutions *canoniques*, à l'une desquelles est équivalente toute crémonienne quadratique, produit de deux crémoniques, et les deux substitutions *canoniques*, à l'une desquelles équivaut toute crémonienne produit de trois crémoniques.

Bortniker (Mlle). — Sur un genre particulier de transformations homographiques. (771-773).

Sous le nom d'*homologie biaxiale*, M. Sylvester envisage une transformation homographique définie de la manière suivante : Étant données dans l'espace deux droites H et H_1, par un point variable M on mène la droite qui rencontre à la fois H et H_1, et l'on prend sur cette droite le point M' tel que le rapport anharmonique des points M, M' et des points h, h_1, où la droite rencontre H, H_1, soit une constante k.

Mlle Bortniker examine si deux figures homographiques quelconques peuvent être déplacées de manière que l'une devienne la transformée de l'autre par homologie biaxiale. Désignant par x, y, z, t les coordonnées rectangulaires du point M, par X, Y, Z, T celles de M', elle établit les formules qui réalisent la transformation de M. Sylvester et cherche à les ramener, conformément à un résultat général dû à M. Richelot, au type

$$X = \lambda y, \qquad Y = \mu x, \qquad Z = \nu t, \qquad T = \rho z,$$

x, y, z, t et X, Y, Z, T représentant les coordonnées de M et de M', par rapport à des systèmes d'axes différents. Or, en faisant cette réduction, on est conduit à l'équation de condition

$$\nu = \lambda\mu.$$

Les coefficients λ, μ, ν n'étant pas indépendants, la transformation homographique de M. Sylvester n'est pas générale.

On peut se donner les formules de l'homologie biaxiale

$$X = \lambda y, \quad Y = \mu x, \quad Z = \lambda\mu t, \quad T = z,$$

et chercher les droites qui correspondent aux valeurs choisies par λ et μ. L'auteur donne la solution de ce problème et trouve qu'il y a deux séries différentes de transformations donnant les mêmes figures qu'une homologie biaxiale donnée : la deuxième figure transformée s'obtient en faisant tourner la première de 180° autour de l'un des axes des x ou des y.

Darboux. — Remarques sur la Communication précédente. (773-777).

Après avoir retrouvé, par une méthode différente, le résultat obtenu par Mlle Bortniker, l'auteur montre qu'on réalise la transformation homographique la plus générale en faisant suivre ou précéder d'une transformation homothétique la transformation homologique de M. Sylvester.

M. Darboux signale encore la propriété suivante : « Étant donnée une transformation homographique, si les génératrices rectilignes de l'un des systèmes d'une quadrique s'y correspondent à elles-mêmes, la transformation est une homologie biaxiale dont les deux axes appartiennent à l'autre système de génératrices de la surface ». L'auteur utilise cette propriété pour faire voir que l'homologie biaxiale, combinée avec des déplacements, donne lieu à une transformation contenant quatorze constantes, c'est-à-dire une de moins que n'en comporte l'homologie la plus générale.

Halphen. — Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. (807-811).

Parmi les mouvements d'un corps solide dans un liquide indéfini, le plus simple, signalé par Kirchhoff et Clebsch, conduit à des quadratures elliptiques. Dans ce cas, les éléments du mouvement peuvent s'exprimer par les fonctions elliptiques en fonction explicite du temps.

En faisant cette nouvelle application des fonctions elliptiques, M. Halphen est parvenu à des formules qui rendent aisement compte du mouvement cherché. Parmi ces formules, celles qui représentent la rotation du corps solide font apparaître une décomposition en deux mouvements à la Poinsot et une rotation autour d'un axe fixe dans le corps. Dans le cas où le corps est homogène et de révolution, cette dernière rotation disparaît. Cette proposition est analogue au théorème de Jacobi, d'après lequel le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu dans le vide, est décomposable en deux mouvements à la Poinsot.

Dans le cas du solide immergé, la décomposition présente un cas exceptionnel qui se distingue seulement par le signe d'un coefficient, celui où les mouvements composants sont imaginaires.

A défaut des formules mêmes qui donnent la situation du corps à tout instant, la proposition suivante donne une idée suffisante du mouvement du solide. Ce mouvement se compose : 1° d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour d'un axe fixe dans l'espace; 2° d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe; 3° d'un mouvement périodique.

Kœnigs. — Sur une classe de formes de différentielles et la théorie des systèmes quelconques d'éléments. (842-844).

L'auteur donne l'interprétation géométrique des solutions du système complet

$$(C)\quad \mathfrak{M}_1\left(u\,\middle|\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)=0,\qquad \mathfrak{M}_2\left(u\,\middle|\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)=0,\qquad \ldots,\qquad \mathfrak{M}_{n-2}\left(u\,\middle|\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)=0,$$

défini dans sa Note précédente.

Soit $\varphi(\alpha,\beta\,|\,u)-\gamma$ une solution complète avec trois constantes α, β, γ; on obtient un système de surfaces donnant lieu à la forme $M(u\,|\,du)$ en prenant celles dont l'équation est $z=\varphi(x,y\,|\,u)$.

Si l'on suppose, au contraire, les équations (C) vérifiées identiquement ou en vertu de l'équation

$$\theta(u_1,u_2,\ldots,u_{n+1})=0,$$

θ étant une fonction des u, l'équation $\theta=0$ exprime que les surfaces qui la vérifient sont assujetties à toucher une courbe fixe ou une surface fixe ou bien à passer par un point fixe.

Réciproquement, pour que l'équation $\theta=0$ exprime une telle propriété, il faut que les équations (C) soient vérifiées. Cette interprétation est la même que celle de l'évanouissement du paramètre différentiel de M. Klein dans le cas des droites.

Si l'on distingue deux espèces de classes d'éléments : 1° les classes dont tous les systèmes d'éléments sont des systèmes de surfaces; 2° les classes dont l'un des systèmes est composé de courbes, à quel caractère reconnaîtra-t-on qu'une forme $M(u\,|\,du)$ se rapporte à une classe de deuxième espèce? Il faut et il suffit pour cela que les équations (C) forment un système complet *semi-linéaire,* c'est-à-dire admettant une solution de la forme

$$\varphi(\alpha\,|\,u)+\beta\,\psi(\alpha\,|\,u)-\gamma,$$

où α, β, γ sont trois constantes. Les courbes

$$x=\varphi(z\,|\,u),\qquad y=\psi(z,u),$$

prises pour éléments, donnent la forme fondamentale $M(u\,|\,du)$.

Dans la recherche des formes $M(u\,|\,du)$ on peut toujours supposer qu'aucune des équations (C) n'est linéaire. De là, on déduit, en particulier, que les systèmes d'éléments qui donnent lieu à une forme quadratique ne peuvent contenir plus de quatre paramètres.

Jamet. — Sur une certaine équation différentielle. (844-846).

Étant donnée une équation différentielle du second ordre

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0,$$

si parmi les courbes qu'elle représente (en coordonnées rectangulaires) on considère celles qui passent par un point fixe (x,y), le lieu de leurs centres de

courbure en ce point est immédiatement donné par l'équation

$$f\left[x, y, -\frac{\xi - x}{\eta - y}, \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{\eta - y}\right] = 0.$$

L'auteur signale un cas où cette équation est du troisième degré par rapport aux coordonnées courantes ξ, η, et déduit des propriétés des cubiques les propriétés du faisceau correspondant.

Desboves. — Sur un théorème relatif à la résolution de l'équation $aX^4 + bY^4 = cZ^2$. (846-847).

Si l'on désigne par (x, y, z), (x', y', z') deux solutions en nombres entiers de l'équation

$$aX^4 + bY^4 = cZ^2, \tag{1}$$

on obtient une nouvelle solution (X, Y, Z) par les formules

$$\begin{cases} x'X = x^2\lambda^2 - bcy^2\mu^2, \qquad y'Y = y^2\lambda^2 - acx^2\mu^2, \\ x'^2z'^2Z = [(x^2\lambda^2 + bcy^2\mu^2)z' + 2bxyy'^2\lambda\mu]^2 + 4abx^2y^2x'^4\lambda^2\mu^2, \\ \lambda = ax^2x'^2 - by^2y'^2, \qquad \mu = xyz' + zx'y'. \end{cases} \tag{2}$$

M. Desboves a vérifié sur un certain nombre d'équations de la forme (1) le théorème suivant : « On obtient la solution complète en nombres entiers d'une équation de la forme (1) par autant de systèmes (2) que l'équation a de solutions primitives (x', y', z'). »

Raffy. — Sur la rectification des courbes planes unicursales. (892-893).

L'auteur se propose de trouver toutes les courbes planes unicursales dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées et par suite d'un paramètre t. Ces courbes sont les développées des courbes dont la courbure est une fonction rationnelle de t.

On obtient toutes les courbes *à courbure rationnelle* en prenant les enveloppes des droites

$$\beta^2(x + iy) - \alpha^2(x - iy) - 2\gamma = 0, \tag{1}$$

où α, β, γ sont trois fonctions arbitraires de t, les deux premières entières et la dernière rationnelle.

De l'équation (1) on déduit l'expression des coordonnées de toutes les courbes à arc rationnel. Inversement, on peut se donner une fonction rationnelle de t et chercher s'il existe une courbe unicursale dont l'arc soit exprimé par cette fonction; si l'on se borne aux courbes qui ne passent pas par les points cycliques, on peut toujours répondre à la question. Ce cas comprend celui où l'arc est entier.

Goursat. — Sur les fonctions uniformes provenant de séries hypergéométriques de deux variables. (893-896).

On sait que les intégrales définies

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_1-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

où g, h désignent deux des quantités 0, 1, x, y, ∞, satisfont à un système de trois équations linéaires du second ordre aux dérivées partielles qui admettent trois solutions communes linéairement indépendantes ω_1, ω_2, ω_3.

M. Picard a montré que dans le cas où $\lambda+\mu-1$, $2-\lambda-b_1-b_2$ et les sommes analogues sont les inverses de nombres entiers positifs, les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=z, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1}=t$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes *hyperfuchsiennes* de z et t.

M. Goursat signale un autre cas où les mêmes équations donnent pour x et y des fonctions également uniformes, mais quadruplement périodiques, de z et t. Ce cas est caractérisé par les valeurs

$$\lambda=\mu=b_1=b_2=\frac{3}{4}.$$

Il est analogue au cas de la série hypergéométrique ordinaire où l'on a

$$1-\gamma=\gamma-\alpha-\beta=\beta-\alpha=\frac{1}{3}.$$

On peut rattacher au cas particulier examiné par M. Goursat toute une suite de systèmes S pour lesquels les variables indépendantes et l'intégrale s'exprimeront au moyen des fonctions Θ à deux variables.

Picard. — Sur les séries hypergéométriques de deux variables. (896-897).

M. Picard avait, il y a quelque temps, été conduit au même résultat que M. Goursat (*voir* ci-dessus). Dans un Mémoire publié en 1885 dans les *Annales de l'École Normale,* il a montré qu'à tout système S correspondant à une intégrale hypergéométrique à deux variables on peut associer une forme quadratique de trois variables indépendantes à indéterminées conjuguées qui reste invariable par les substitutions du groupe du système S. Le discriminant de cette forme est en général différent de zéro; et c'est en recherchant ce que deviendraient les fonctions fuchsiennes dans un cas où ce discriminant serait nul que M. Picard a été conduit au cas particulier donné par

$$\lambda=\mu=b_1=b_2=\frac{3}{4}.$$

L'auteur signale, en terminant, le cas de

$$\lambda=\mu=b_1=\frac{3}{4}, \qquad b_1=\frac{1}{4},$$

qui donne de véritables fonctions hyperfuchsiennes.

D'Ocagne. — Sur les péninvariants des formes binaires. (961-964).

Si w_p et w_q sont des péninvariants de degrés respectifs p et q de la forme représentée symboliquement par $(x+ay)^n$, l'expression $qw_q w'_p - pw_p w'_q$ est aussi un péninvariant de cette forme.

Cette proposition est susceptible de nombreuses applications.

Pour $w_q = a_0$ on déduit du péninvariant w_p celui-ci

$$w_{p,1} = a_0 w'_p - pa_1 w_p.$$

En répétant deux fois cette opération, et ajoutant au résultat l'expression $p+1)(a_2 a_2 - a_1^2) w_p$, on arrive au péninvariant

$$w_{p,2} = a_0 w''_p - 2pa_1 w'_p + p^2 a_2 w_p.$$

Appliquant la même opération à $w_{p,2}$ et ajoutant au résultat $p(p+1)$ fois le péninvariant

$$2(a_0 a_2 - a_1^2) w'_p - p(a_0 a_3 - a_1 a_2) w_p,$$

déduit du théorème général en faisant $w_q = a_0 a_2 - a_1^2$, on obtient le péninvariant

$$w_{p,3} = a_0 w'''_p - 3pa_1 w''_p + 3p^2 a_2 w'_p - p^3 a_3 w_p.$$

Ainsi se trouve confirmée jusqu'à l'indice 3 cette induction de M. Perrin, que si w_p est un péninvariant de la forme $(x+ay)^n$, il en est très probablement de même de

$$w_{p,\mu} = a_0 w_p^{(\mu)} - \mu p a_1 w_p^{(\mu-1)} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^2 a_2 w_p^{(\mu-2)} + \ldots + (-1)^\mu a_\mu w_p.$$

De Longchamps (G.). — Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites, au moyen des intégrales elliptiques. (964-966).

Ces cubiques peuvent être engendrées de la manière suivante : Étant donnés dans un plan une circonférence O, une droite Δ et un point fixe M sur O, si par M on mène une droite mobile rencontrant O en A, Δ en B, et qu'on prenne BI = OA, le lieu du point I est une cubique circulaire unicursale; cette cubique est droite si Δ est perpendiculaire sur le diamètre qui passe par M.

De là résulte pour l'équation polaire d'une pareille cubique

$$\rho = a\cos\omega + \frac{b}{\cos\omega},$$

et pour l'élément de son arc, si l'on pose $\operatorname{tang}\omega = z$, $\frac{a+b}{2b} = k$,

$$ds = b\sqrt{4k^2 + 4(1-k)z^2 + z^4}\,\frac{dz}{1+z^2}.$$

Ainsi toutes les cubiques circulaires, unicursales, droites, peuvent être rectifiées au moyen des intégrales elliptiques.

Pinczon. — Sur la génération de l'herpolhodie. (1048-1051).

L'auteur donne une image très nette de l'herpolhodie en rapportant cette courbe à un axe mobile $O\chi$ défini de la manière suivante :

Soient XOY le plan perpendiculaire à l'axe des quantités de mouvement; Ox, Oy, Oz les axes principaux d'inertie ($A > B > C$); $O\chi$ l'intersection des plans XOY, xOy; σ l'angle formé par le rayon vecteur ρ de la courbe, projetée sur XOY, avec $O\chi$ pris pour axe polaire.

En posant, suivant l'usage,

$$Ap^2 + Bp^2 + Cq^2 = h, \qquad A^2p^2 + B^2p^2 + C^2q^2 = k^2,$$

on trouve

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{k^2 - Ch}{k(A-B)p}\sqrt{\frac{A[Ah - k^2 - Bp^2(A-B)]}{C[k^2 - Ch - Bp^2(B-C)]}},$$

$$C^2 = \frac{(k^2 - Ch)(Ah - k^2) - k^2(A-B)(B-C)p^2}{AChk^2}.$$

En éliminant p^2 entre ces deux équations, on obtiendrait l'équation polaire de l'herpolhodie; mais, pour la discussion, il est plus commode de conserver la variable auxiliaire p, et l'on voit immédiatement que :

Si $k^2 - Bh > 0$, la courbe a la forme d'un ovale symétrique par rapport à l'axe polaire $O\chi$ et à sa perpendiculaire $O\eta$;

Si $k^2 - Bh < 0$, la courbe se compose de deux ovales symétriques par rapport à $O\eta$ et coupés symétriquement par $O\chi$;

Si $k^2 - Bh = 0$, la courbe est analogue à une lemniscate.

Humbert (*G.*). — Sur les courbes algébriques rectifiables. (1051-1053).

Il s'agit des courbes algébriques $f(x, y) = 0$, dont l'arc peut s'exprimer par une fonction algébrique des coordonnées.

En désignant par ω une constante et par R une fonction rationnelle de x, y, l'arc d'une pareille courbe s'exprimera par la formule

$$s - \omega = R\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}.$$

On conclut de là que toute courbe algébrique rectifiable est la développée d'une courbe algébrique. Pour que l'arc s soit une fonction rationnelle, il faut et il suffit que $f_x'^2 + f_y'^2$ soit un carré parfait, c'est-à-dire que la courbe $f = 0$ soit une *courbe de direction* (Laguerre). Il en résulte que les courbes algébriques planes, dont l'arc peut s'exprimer par une fonction rationnelle des coordonnées, sont les développées des courbes algébriques de direction *simples* (c'est-à-dire coupées orthogonalement en un seul point par leurs normales); ou bien encore, que ces courbes sont les caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons lumineux étant parallèles, et réciproquement.

Les épicycloïdes à arc rationnel s'obtiennent en prenant pour rapport du rayon du centre mobile au rayon du centre fixe une fraction irréductible de dénominateur pair.

Quand l'arc s d'une courbe algébrique $f = 0$ est rationnel, il s'exprime par

la formule

$$s = \frac{B(x, y)}{C(x, y)},$$

$B = 0$, $C = 0$ étant des adjointes de degrés $n-2$ et $n-3$ en général, et de degrés $n-1$ et $n-2$ si $f = 0$ est unicursale.

Mouchot. — Propriétés descriptives, segmentaires et métriques de la ligne droite de mode quelconque. (1053-1055).

Schoute. — Étude géométrique d'un complexe. (1055-1057).

L'auteur décrit le complexe ψ des droites d dont les distances à deux droites fixes l et l' sont dans un rapport donné f.

Le cône du complexe relatif à un point P est du quatrième ordre; il a trois arêtes doubles, les parallèles aux deux droites l, l' et l'intersection des deux plans (P, l) et (P, l').

La courbe du complexe relatif à un plan π est de la quatrième classe: elle a deux tangentes doubles : 1° la droite de π qui s'appuie sur l et l'; 2° l'intersection de π avec le plan de l'infini.

Le complexe ψ a deux points principaux (doubles), les points de l et l' situés dans le plan de l'infini et sept plans principaux, un double qui est le plan de l'infini et six simples.

Le lieu du point P pour lequel le cône du complexe se décompose en deux cônes du second degré est l'hyperboloïde réglé orthogonal dont les points ont des distances à l et à l' qui sont entre elles dans le rapport f.

L'auteur énumère beaucoup d'autres propriétés du complexe ψ et examine le cas particulier où les axes sont parallèles. Le complexe est alors caractérisé par quatre droites principales simples : les deux droites parallèles aux axes qui divisent la distance de ces axes dans le rapport donné, et les tangentes au cercle commun à toutes les sphères menées par le point d'intersection des axes dans le plan de l'infini.

Amigues. — Théorèmes sur les surfaces gauches. (1092-1094).

Caspary. — Sur une méthode élémentaire pour obtenir le théorème fondamental de Jacobi relatif aux fonctions Θ d'un seul argument. (1094-1096).

Perrin. — Sur les péninvariants des formes binaires. (1097-1099).

Soient w_p, w_q deux péninvariants de la forme binaire $(a, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n$, de degrés respectifs p et q; si ζ désigne une variable fictive par rapport à laquelle a_0 admet pour dérivées successives $a_1, a_2, \ldots$, l'expression

$$[w_p, w_q]_r = p^r w_p \frac{d^r w_q}{d\zeta^r} - \frac{r}{1} p^{r-1} q \frac{dw_p}{d\zeta} \frac{d^{r-1} w_q}{d\zeta^{r-1}} - \frac{r(r-1)}{1.2} p^{r-2} q^2 \frac{d^2 w_p}{d\zeta^2} \frac{d^{r-2} w_q}{d\zeta^{r-2}} - \ldots$$

est un péninvariant, quel que soit r.

Ce théorème, généralisation d'un autre théorème dont M. Perrin avait antérieurement annoncé l'existence probable, est la conséquence immédiate de la proposition suivante :

Soient w_p un péninvariant de degré p, $w_p^{(r)}$ sa $r^{ième}$ dérivée par rapport à ζ, $\frac{d}{d\theta}$ l'opérateur $a_0\frac{\partial}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial}{\partial a_3}+\ldots$; on a, quel que soit r,

$$\frac{dw_p^{(r)}}{d\theta}=r_p w_p^{r-1}.$$

Jensen. — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (1156-1159).

L'auteur établit par une analyse assez élémentaire l'holomorphisme de la fonction

$$(s-1)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{n=\infty}(s-1)n^{-s}.$$

Il y parvient en développant cette fonction suivant les puissances croissantes de $s-1$:

$$(s-1)\zeta(s)=1+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}C_\nu(s-1)^\nu,$$

les coefficients C_ν étant donnés par la formule

$$C_\nu=\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{\nu\,(\log n)^{\nu-1}}{n}-\log^\nu(n+1)+\log^\nu n\right].$$

M. Jensen donne la valeur des dix premiers coefficients C_ν avec neuf décimales exactes; le premier C_1 est la constante C d'Euler.

M. Stieltjes a prouvé la réalité de toutes les racines α de l'équation

$$\xi(t)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)(s-1)\zeta(s)=0\qquad\left(s=\frac{1}{2}+ti\right).$$

M. Jensen montre que ces racines sont liées par la relation remarquable

$$\sum\frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha^2}=1+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\log\pi-\log 2=0{,}0231\ldots$$

De là résulte une limite inférieure 8,4 pour la plus petite racine α.

Sylvester. — Sur une découverte de M. James Hammond relative à une certaine série de nombres qui figurent dans la théorie de la transformation Tchirnhausen. (1228-1231).

Hamilton a montré que, étant donnée une équation algébrique de degré

$$2,\ 3,\ 5,\ 11,\ 47,\ 923,\ 409619,\ \ldots,$$

on peut, par la méthode dite de Tschirnhausen, la transformer en une autre où

manquent les 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... termes consécutifs après le premier, sans avoir jamais à résoudre une équation de degré supérieur à

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots.$$

M. Sylvester a imaginé un triangle de chiffres permettant d'obtenir la suite des nombres 2, 3, 5, 11, 47, ..., qu'il appelle *nombres de Hamilton* et qu'il désigne par H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, ...

Par la méthode des fonctions génératrices, M. Hammond a obtenu entre ces mêmes nombres la relation récurrente

$$H_i = 2 + \beta_2(H_{i-1}) - \beta_3(H_{i-2}) + \beta_4(H_{i-3}) - \ldots,$$

où le symbole $\beta_r(q)$ représente

$$\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1.2\ldots r}.$$

Cette formule permet de démontrer que $H_{i+1} : H_i^2$ est plus petit que $\frac{1}{2}$ pour toute valeur finie de i, et égale à $\frac{1}{2}$ pour i infini.

Bourget. — Représentation géométrique des propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes. (1253-1254).

M. Kœnigs avait annoncé la possibilité d'une représentation géométrique pour les propriétés des complexes, analogue à celle qu'a donnée M. Mannheim pour les propriétés infinitésimales du premier ordre des congruences. La Note de M. Bourget a pour but de montrer comment on peut réaliser cette représentation.

Caspary. — Sur les théorèmes d'addition des fonctions thèta. (1255-1258).

Généralisant la méthode employée dans une Note antérieure pour les fonctions thèta d'un seul argument, M. Caspary obtient une relation qui fournit immédiatement des théorèmes d'addition dans lesquels figurent $2m$ systèmes ($2m \geq 4$) de 2 arguments indépendants.

Perrin. — Sur les péninvariants des formes binaires (1258-1260).

Si w est un péninvariant de degré p, de poids π et d'étendue n (c'est-à-dire contenant a_n sans contenir a_{n+1}, a_{n+2}, ...), l'expression

$$2\pi a_1 \frac{\partial w}{\partial a_0} + (2\pi - p) a_2 \frac{\partial w}{\partial a_1} + \ldots + (2\pi - np) a_{n+1} \frac{\partial w}{\partial a_n}$$

donne un péninvariant (de degré p, de poids $\pi + 1$ et d'étendue $n+1$).

Après ce théorème, qui fournit une série indéfinie de péninvariants du même degré que celui dont on part, M. Perrin établit le suivant :

« Si dans un péninvariant ω de degré p, de poids π, d'étendue n) on remplace a_0, a_1, ..., a_n par w, w', ..., $w^{(n)}$, w étant un péninvariant (de degré p',

de poids π', d'étendue n') et $w', \ldots, w^{(n)}$, ses dérivées successives par rapport à la variable fictive ζ, le résultat est un péninvariant (de degré pp' de poids $\pi + p\pi'$, d'étendue $n + n'$).

L'auteur énonce enfin un théorème qui renferme comme cas très particulier un des théorèmes de sa Note précédente :

« Si dans un péninvariant *quelconque*, relatif à un système *quelconque* de formes binaires indépendantes, on remplace un nombre quelconque de séries de coefficients de ces formes, savoir : $a_0, a_1, \ldots, a_n$ par $p^n v, p^{n-1} v', \ldots, v^{(n)}$; $a'_0, a'_1, \ldots, a'_m$ par $q^m w, q^{m-1} w', \ldots, w^{(m)}$, et ainsi de suite, $v, w, \ldots$ étant des péninvariants *quelconques* des degrés $p, q, \ldots$, relatifs à des formes ou systèmes de formes *quelconques*, et $v', v'', \ldots, w', w'', \ldots$ leurs dérivées successives par rapport à ζ, le résultat sera un péninvariant relatif au système composé de toutes les formes dont les coefficients subsistent dans ce résultat. »

Goursat. — Sur un système d'équations aux dérivées partielles. (1361-1363).

M. Goursat indique un système d'équations aux dérivées partielles qui se rattache aux systèmes linéaires de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} r = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \\ s = b_1 p + b_2 q + b_3 z, \\ t = c_1 p + c_2 q + c_3 z, \end{cases}$$

où

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et où les a, b, c sont des fonctions des variables x, y.

Les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$$

étant supposées vérifiées identiquement, on sait (Appell) que le système (1) admet trois intégrales linéairement indépendantes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Posant

$$u = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \qquad v = \frac{\omega_3}{\omega_1},$$

M. Goursat obtient, pour définir directement u et v comme fonctions de x et y, le système suivant, linéaire par rapport à chacune des fonctions u et v :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = A\Delta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right) = B\Delta, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}\right) = C\Delta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D\Delta, \end{cases}$$

où

$$A = b_1, \qquad B = b_2 - 2c_1, \qquad C = a_1 - 2c_2, \qquad D = a_2,$$
$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les intégrales générales des équations (2) sont

$$u = \frac{l\omega_1 + m\omega_2 + n\omega_3}{l'\omega_1 + m'\omega_2 + n'\omega_3}, \qquad v = \frac{l_1\omega_1 + m_1\omega_2 + n_1\omega_3}{l'\omega_1 + m'\omega_2 + n'\omega_3};$$

elles ne changent pas quand on effectue sur u et v une substitution linéaire quelconque.

Le système (3) et le système inverse, qui définit x et y comme fonctions de u et v, permettent de résoudre un grand nombre de questions relatives aux équations (1). On peut s'en servir, en particulier, pour former les systèmes (1) où les a, b, c sont des fonctions rationnelles de x, y et dont l'intégrale générale se compose de fonctions algébriques de ces deux variables.

D'Ocagne. — Sur les péninvariants des formes binaires. (1364-1365).

M. Perrin a récemment mis en évidence l'importance du péninvariant

$$[w_p, w_q]_r = p^r w_p \frac{d^r w_q}{d\zeta^r} - \frac{r}{1} p^{r-1} q \frac{dw_p}{d\zeta}\frac{d^{r-1} w_q}{d\zeta^{r-1}} + \dots$$

formé au moyen de deux péninvariants w_p et w_q de la forme binaire

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)(x, y)^n,$$

où a_s est considéré comme une fonction de la variable fictive ζ dont les dérivées par rapport à ζ seraient a_1, a_2, a_3, ...

M. d'Ocagne signale une propriété nouvelle de cet algorithme :

Si dans l'expression $[w_p, w_q]_r$ on remplace simultanément ou séparément $\frac{d^i w_p}{d\zeta^i}$ et $\frac{d^i w_q}{d\zeta^i}$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ par

$$w_p \frac{d^{i+1} w_p}{d\zeta^{i+1}} \quad \frac{dw_p}{d\zeta}\frac{d^i w_p}{d\zeta^i} \quad \text{et} \quad w_q \frac{d^{i+1} w_q}{d\zeta^{i+1}} - \frac{dw_q}{d\zeta}\frac{d^i w_q}{d\zeta^i},$$

on obtient encore un péninvariant de la forme binaire

$$(a_0, a_1, \dots, a_n)(x, y)^n.$$

Autonne. — Sur les groupes quadratiques crémoniens. (1422-1425).

Dans une Note précédente, l'auteur a étudié les propriétés d'une crémonienne quadratique isolée; il montre actuellement comment de pareilles substitutions se combinent pour former des groupes quadratiques crémoniens.

Andoyer. — Sur une équation différentielle que l'on rencontre dans la théorie des orbites intermédiaires. (1425-1427).

Les équations qui, dans la théorie des orbites intermédiaires, définissent le rayon vecteur et la latitude, se présentent sous la forme

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + R_1 \frac{d\rho}{dv} + R_2 \rho = R,$$

où R, R_1, R_2 sont des fonctions de v et de quantités inconnues. Mais R renferme des termes de la forme

$$\int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv,$$

qu'il est impossible de négliger, même dans une première approximation. M. Gyldén a fait connaître une méthode pour tenir compte de la plus importante fraction de ces termes.

M. Andoyer en propose une autre, fondée sur les propriétés des équations linéaires à coefficients périodiques, qui permet de n'en négliger aucune partie.

Guichard. — Sur les intégrales $\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$. (1494-1496).

Soient :

$G(x)$ une fonction entière quelconque;
$R(x)$ un polynôme de degré $2p+2$;
$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p+1}$ les périodes de l'intégrale

$$u = \int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}};$$

$\omega_{1,q}, \omega_{2,q}, \ldots, \omega_{2p+1,q}$ celles de l'intégrale

$$u_q = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt{R(x)}};$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{2p+1}$ des nombres vérifiant les relations

$$\Omega_i = a_1\omega_{i,1} + \ldots + a_{2p+1}\omega_{i,2p+1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p+1).$$

Alors l'intégrale

$$u - a_1 u_1 - a_2 u_2 - \ldots - a_{2p+1} u_{2p+1}$$

n'aura pas de périodes; elle sera de la forme

$$A + \varphi(x)\sqrt{R(x)},$$

A étant une constante et φ une fonction entière. On en déduit

$$G(x) = \frac{1}{2} R'(x)\varphi(x) + R(x)\varphi'(x) + \sum_1^{2p+1} a_q x^{q-1}.$$

On trouve aisément celles des intégrales u dont toutes les périodes sont des multiples de 2π; elles sont comprises dans la formule

$$v = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_{2p+1} v_{2p+1} + \varphi(x)\sqrt{R(x)} + A,$$

où les m sont des entiers et où

$$v_i = \int \frac{\sum_1^{2p+1} a_q x^{q-1}}{\sqrt{R(x)}}\, dx,$$

les a étant déterminés de telle sorte que $\Omega_i = 2\pi$, $\Omega_k = 0$ $(k \leqslant i)$.

On peut choisir la constante A de manière que $\cos v$ soit une fonction uniforme et, par suite, entière de x. Cette fonction $\psi(x)$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-\psi^2}} = \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

il en résulte pour ψ l'identité

$$1 - \psi^2 = R(x)X^2.$$

Si donc on pose

$$1 - \psi^2 = R(x)X^2,$$

on a une substitution entière qui transforme le cercle

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

en la courbe

$$y^2 - R(x) = 0.$$

De même, les intégrales u qui n'ont que deux périodes conduisent à la transformation de la courbe

$$Y^2 - (1 - X^2)(1 - k^2X^2)$$

en la courbe

$$y^2 = R(x).$$

Liouville (*R.*). — Sur un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (1496-1497).

L'auteur signale l'analogie de l'équation différentielle qu'il donnait dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (20 septembre 1886) avec une équation que M. Goursat considère dans sa dernière Communication et qu'il rattache à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

Painlevé. — Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles. (1497-1501).

M. Painlevé retrouve par une méthode nouvelle et généralise les résultats auxquels M. Goursat est parvenu concernant les équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du second ordre.

Il montre que la question de reconnaître si l'intégrale générale des systèmes linéaires et homogènes du second ordre est algébrique revient toujours à rechercher si un certain système de forme bien déterminée admet des intégrales rationnelles; les systèmes aux dérivées partielles qu'il considère peuvent d'ailleurs se ramener à des équations différentielles linéaires du troisième ou du quatrième ordre.

Pellet. — Sur les normales aux courbes. (1501-1502).

Desboves. — Sur des équations de la forme $aX^4 + bY^4 = cZ^2$. (1602-1603).

De Polignac. — Sur une partition des nombres. (1688-1690).

Une expression de la forme

$$(1) \qquad (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) + (p_2, p_1, \ldots, p_n, p_1) + \ldots + (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}),$$

où les p sont des nombres premiers, et où le symbole $(a, b, c, \ldots)$ représente le produit $\pm a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, est un non-multiple de $p_{1,2,\ldots,n}$, c'est-à-dire n'est divisible par aucun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Mais la réciproque n'est pas vraie : tout non-multiple de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ne peut pas se mettre sous la forme (1). Le théorème suivant a pour objet, pour toute valeur de n, de trouver une limite au-dessous de laquelle tout non-multiple de $p_{1,2,\ldots,n}$ est décomposable, c'est-à-dire susceptible de revêtir la forme (1).

« Soient μ et L deux nombres positifs, le premier au moins égal à 1; si tout non-multiple de $p_{1,2,\ldots,n-1}$ inférieur à $\mu p_1 p_2 \ldots p_{n-1} + L$ est décomposable, tout non-multiple de $p_{1,2,\ldots,n}$ inférieur à

$$\mu p_1 p_2 \ldots p_n + p_1 p_2 \ldots p_{n-1} + p_n L$$

est décomposable aussi. »

On déduit de là que tout non-multiple de $p_{1,2,\ldots,n-1}$ est décomposable s'il est inférieur à

$$p_1 p_2 \ldots p_n \left(9 + \frac{1}{30} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right).$$

Ainsi, pour $n = 2$, la première impossibilité de décomposition apparaît à l'égard du nombre 53.

Poincaré. — Sur la théorie analytique de la chaleur. (1753-1759).

L'auteur montre que le problème du mouvement de la chaleur dans un milieu homogène et isotrope, rayonnant dans un milieu à zéro, est, d'après les équations de Fourier, toujours possible et déterminé.

Appell. — Sur les équations différentielles algébriques et homo-

gènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. (1776-1779).

La notion d'invariant, dont on connaît l'importance dans la théorie des équations différentielles linéaires, peut être étendue aux équations différentielles algébriques homogènes d'un degré quelconque par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées, équations qui jouissent aussi de la propriété de conserver la même forme lorsqu'on remplace la fonction inconnue y par $\eta_1 X$, X désignant une fonction de la variable x.

Ainsi, l'équation du second ordre et du second degré

$$By'y'' + Cyy'' + Dy'^2 + Eyy' + Fy^2 = 0$$

se ramène, en posant $y = \eta_1 X$ et en déterminant X de manière que le coefficient de $\eta_1\eta_1''$ soit nul, à la forme

$$B_1\eta_1'\eta_1'' + D_1\eta_1'^2 + E_1\eta_1\eta_1' + F\eta_1^2 = 0,$$

où les coefficients D_1, E_1, F_1 sont des semi-invariants. Il est possible de ramener la nouvelle équation à une forme réduite où ne figure qu'un invariant absolu.

En posant

$$\eta_1 = e^{\int \frac{dx}{v}},$$

on obtient une équation de la forme

$$\frac{dv}{dx} = \alpha v^3 + \beta v^2 + \gamma v + \delta,$$

qu'on ramène aisément à la forme réduite

$$\frac{dw}{d\zeta} = w^3 + J,$$

où J est un invariant absolu. Si cet invariant est nul, il existe entre quatre intégrales de l'équation en v une relation algébrique à coefficients constants.

De Polignac. — Sur une partition des nombres. (1779-1780).

Impossibilité de décomposer 53 en l'une des formes

$$2^x - 3^y, \quad 2^x - 3^y, \quad 3^y - 2^x.$$

Kœnigs. — Sur les surfaces principales des complexes de droites et les lignes asymptotiques de leur surface de singularités. (1824-18[illegible]).

[illegible] complexe quelconque, deux des surfaces principales qui [illegible] singulière sont engendrées par des droites singulières [illegible] surface de singularités suivant les deux lignes asym[illegible] de contact de cette surface avec la droite sin[illegible]

De là résulte que la connaissance des surfaces principales d'un complexe entraîne celle des lignes asymptotiques de sa surface de singularités.

Humbert (*G.*). — Sur les arcs de courbe. (1826-1827).

Généralisation du théorème de Chasles sur les arcs de conique :

« Si l'on mène les tangentes communes à un cercle et à une courbe algébrique de classe n, les $2n$ points de contact déterminent sur cette dernière courbe n arcs dont la somme algébrique est égale à la somme algébrique des longueurs des tangentes communes. »

Cette propriété est un cas particulier d'une propriété plus générale qu'on établit par le théorème d'Abel :

« Si l'on mène les tangentes communes à une courbe algébrique quelconque et à un faisceau tangentiel de courbes de direction homofocales, représentées en coordonnées tangentielles par l'équation

$$(u^2+v^2)\,F^2(u,v)-\lambda\,\varphi^2(u,v)=0,$$

les points de contact sur la courbe considérée décrivent, quand on fait varier le paramètre λ, des arcs dont la somme algébrique est une fonction rationnelle de λ. »

Réveille. — Détermination du rayon de courbure d'une trajectoire particulière d'un point faisant partie d'un solide invariable assujetti à quatre conditions. (1827-1829).

Painlevé. — Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre. (1829-1832).

Étant donnée une équation linéaire et homogène du troisième ordre, on peut toujours reconnaître, par un nombre limité d'opérations algébriques, si son intégrale est algébrique, ou ramener l'équation à une quadrature.

Desboves. — Sur les équations

$$aX^4+bY^4=cZ^2,\qquad aX^4+bY^4+dX^2Y^2=cZ^2.$$

(1832-1834).

Robin (*G.*). — Distribution de l'électricité sur une surface fermée convexe. (1834-1836).

Étant donnée une surface fermée convexe σ, on joint un de ses points aux divers éléments $d\sigma$ par des droites r faisant des angles φ avec la normale intérieure au point en question. Soit f une fonction continue arbitraire. Si l'on forme la suite d'intégrales

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{f\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma,\qquad f_2=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{f_1\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma,\qquad \ldots,\ \text{ad infinitum},$$

f_n tend vers la densité de la couche en équilibre d'elle-même sur σ.

MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par *P. Mansion*, professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg*, professeur à l'Université de Liège. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars (1).

Tome V; 1885.

Petit-Bois (*G.*). — Sur l'évaluation approchée des aires planes. (5-7; 27-31).

Quand $f''(x)$ varie beaucoup pour une courbe $y = f(x)$ dont on veut trouver l'aire, entre les coordonnées extrêmes, la formule de quadrature de Simpson n'est plus la plus avantageuse. On peut, dans ce cas, remplacer la parabole de Simpson que l'on substitue à la courbe, par une hyperbole ayant une asymptote parallèle à l'axe des y. Autres formules. En Note, travaux sur l'approximation des aires, publiées dans les *Annales de Gergonne*, par Kramp, Berard, Ampère.

Cesàro (*E.*). — Remarques sur le cercle osculateur à l'ellipse. (7-9).

Relation entre les trajectoires des foyers d'une ellipse assujettie à avoir un contact du deuxième ordre avec un cercle fixe en un point donné.

Halsted. — Volume d'un prismatoïde. (3-10).

Démonstration très simple du théorème de Steiner (*Werke*, II, p. 312-320). Le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones parallèles B, b, pour section moyenne β et pour hauteur h, est $\frac{1}{6}h(B + 4\beta - b)$.

D'Ocagne. — Note sur les raccordements paraboliques. (26-27).

Deux nouvelles solutions pratiques, l'une au moyen du foyer, permettant un tracé continu.

Cesàro (*E.*). — Sur l'hélice osculatrice. (32-33).

L'hélice osculatrice d'une courbe est celle qui a même courbure et même [illegible] donnée.

Mansion (*P.*). — Définition d'un nombre incommensurable. (49-53).

---

(1) [illegible] XI [illegible] 5-229. Ce Recueil paraît en livraisons mensuelles de [illegible] avec supplément. Prix : 7fr,50 pour la Belgique; 9fr [illegible]

D'après DEDEKIND, *Statigkeit und irrationale Zahlen* (Braunschweig, 1872). Suivant I. Carbonnelle, *Les nombres et la philosophie.* (*Revue des Questions scientifiques*, t. XVII, p. 567-505), on ne peut donner une théorie rigoureuse des nombres incommensurables, sans partir de l'idée des grandeurs incommensurables.

Brocard (*H.*). — Questions de licence. (54-55; 130-131; 156; 169; 224-225).

Intégration de diverses équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Cesàro (*E.*). — Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers. (55-56).

Démonstration de la formule symbolique $s_p = \frac{(n+\mathrm{B})^{p+1} - \mathrm{B}^{p+1}}{p+1}$.

Bergmans (*C.*). — Théorèmes sur la parabole. (71-72; 95-96; 175-180).

Quarante-trois théorèmes démontrés simplement; plusieurs de ceux qui sont relatifs au rayon de courbure sont remarquables.

Catalan (*E.*). — Sur les ombilics des surfaces. (73-74).

Modification de la méthode de Poisson pour établir les équations

$$r : (1+p^2) = s : pq = t : (1+q^2).$$

De Rocquigny. — Questions d'Arithmologie. (78-80).

Questions élémentaires, basées sur des identités.

Cesàro (*E.*). — Sur une loi symbolique remarquable. (81-84).

Diverses applications de la formule

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = f(\mathrm{N} - u_1, \mathrm{N} - u_2, \ldots, \mathrm{N} - u_n),$$

f étant une fonction symétrique des n quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qui sont, par hypothèse, les mêmes que $\mathrm{N} - u_1, \mathrm{N} - u_2, \ldots, \mathrm{N} - u_n$.

Neuberg (*J.*). — Question 257. (89-92).

Théorie de la *cochléoïde*, $\rho\omega = a \sin\omega$ (inverse de la *quadratrice*) imaginée par M. Catalan en 1857 et dont MM. Benthem et Falkenburg se sont occupés aussi.

Mansion (*P.*) et *Kronecker* (*L.*). — Sur le second théorème de la moyenne. (97-102).

Traduction géométrique de l'une des démonstrations de P. du Bois-Reymond

(*Crelle*, t. 69, p. 82); par le premier auteur : démonstration complète, par le second, au moyen de la transformation d'Abel.

Kronecker (*L.*). — Une équivalence algébrique. (102).

L'équivalence

$$x^3 - 2 = \left(x - \frac{1}{18}z^4\right)\left(x + \frac{1}{2}z - \frac{1}{36}z^3\right)\left(x - \frac{1}{2}z - \frac{1}{36}z^3\right).$$

plus un multiple de $(z^4 + 108)$, remplace la considération de $\sqrt[3]{2}$.

Lemoine (*E.*). — Propriétés diverses du cercle et de la droite de Brocard. (103-108).

Soient :

Ω, Ω' les points de Brocard du triangle ABC,
K le point de Lemoine,
G le centre de gravité,
H l'orthocentre,
O le centre du cercle circonscrit,
(I, I_a, I_b, I_c) les centres des cercles inscrits et exinscrits.

Voici les résultats principaux auxquels parvient M. Lemoine.

1. Condition pour que la droite ΩΩ' (*droite de Brocard*) soit : perpendiculaire à CK ou à CO, ..., $a = b$; parallèle à CK, ..., $2c^2 = a^2 + b^2$; parallèle à CG, ..., $2c^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$; parallèle à CO, ..., $c^2(a^2 + b^2 - 2c^2) = (a^2 - b^2)^2$; perpendiculaire à CG, ..., $ab + c^2 \cos C = 0$; perpendiculaire à BC, ..., $b^4 + c^4 = a^2(b^2 + c^2)$. Dans le dernier cas, l'angle de Brocard est égal à $90° - A$; Ω est situé sur BH et Ω' sur CH; CG et BH, BG et CH se coupent sur AK; le milieu de OK est sur AG.

2. L'angle de Brocard ne peut être égal à un angle de ABC; il est égal à $\frac{1}{3}A$, lorsque $b^2c^2(b^2 + c^2) = a^4 - 2a^2b^2c^2$.

3. Soient (x, y, z) et (x', y', z') les distances de Ω, Ω' aux côtés de ABC. On a $xyz = x'y'z'$, mais on ne peut avoir $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ que si le triangle ABC est isoscèle.

Conditions pour que AB soit symétrique de AΩ ou AΩ' par rapport à AH : $b^4 = a^2(b^2 + c^2)$, $b^2 = a^2 + c^2 - a^2c^2(a^2 + c^2)^{-1}$.

4. Le centre du cercle de Brocard n'est jamais sur I_bI_c; il est sur AI_a, lorsque $b = c$; il n'est sur AK ni sur AH que lorsque AK et AH se confondent (triangle isoscèle ou rectangle).

Le cercle de Brocard ne touche jamais CG ni CI. Il touche : CK en K, lorsque $2c^2 = a^2 + b^2$; BC au pied de la bissectrice AI, lorsque $a^2 = 2bc$; I_bI_c, lorsque $2(c^2 + ab)\sqrt{ab} = a^3 + b^3$.

5. Lorsque $c^2 = ab$, M. Lemoine dit que le triangle ABC est *moyen en* C. Un tel triangle jouit de propriétés assez curieuses : Ω et Ω' sont situés sur la bissectrice CI et se confondent avec les sommets A_1, B_1 du premier triangle de

Brocard; le cercle de Brocard touche AΩ en Ω, BΩ′ en Ω′; AG et BK, AK et BG se coupent sur CI.

6. Les points A, B, C, Ω, Ω′ sont sur une hyperbole qui ne peut jamais passer par l'un des points H, G, I, I_a. Lorsque $c^2 = ab$, cette hyperbole se décompose en deux droites, qui sont BC et AI.

De Tilly. — Sur les équations différentielles linéaires simultanées. (121-124).

Cas d'intégrabilité divers des deux équations simultanées linéaires sans second membre, comprenant celui qui a été signalé par M. Ibach, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 172-181; 1884.

De Tilly. — Sur les constructions dans le plan et dans l'espace avec la droite seule. (124-127).

L'auteur suppose que l'on puisse mener une droite par deux points et porter sur une droite donnée une longueur donnée. Cela posé, il résout les problèmes fondamentaux suivants : Par un point mener une parallèle à une droite; construire la bissectrice d'un angle; mener une perpendiculaire à une droite par un point extérieur à la droite, ou pris sur la droite (dans un plan déterminé par la droite et un autre point). Diviser une droite en parties proportionnelles à des longueurs données. Construire dans une position donnée une figure égale ou semblable à une figure donnée. Abaisser d'un point une perpendiculaire sur un plan (non construit) donné par une droite et un point.

Intersection d'une droite ou d'un plan, avec un autre plan.

Cesàro (*E.*). — Remarques de Géométrie élémentaire. (128-129).

Si un triangle est inscrit à un triangle semblable, les projections de ses côtés sur les côtés homologues du triangle circonscrit sont respectivement égales aux moitiés de ces côtés. Autres théorèmes.

De Tilly. — Sur l'axe central et l'axe instantané glissant. (145-152).

Cette Note est une reproduction améliorée et complétée de certaines parties de trois Notes antérieures (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 2ᵉ série, t. 35, p. 24-30; 1873; *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. I, p. 36-41; 1875. *Bulletins, etc.*, 3ᵉ série, t. V; p. 401-403). Elle contient une étude approfondie de la question de l'existence de l'axe central et de celle de l'axe instantané glissant.

Weill. — Quelques problèmes élémentaires relatifs au jeu de dés. (152-154).

Cas divers du problème suivant : Probabilité de tirer une fois la lettre *a* d'une urne qui contient A lettres *a*, B lettres *b*, ..., L lettres *l*, en *k* tirages, en remettant chaque fois la lettre tirée.

EU $= u$ les perpendiculaires abaissées de E sur a, b, c, d. On a

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} = \frac{Q}{2m^2}, \tag{1}$$

Q étant l'aire ABCD et m^2 la somme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Chacun des rapports (1) peut être désigné par $\frac{1}{2}\tan\omega$. Alors ω est un angle auxiliaire, qui a reçu le nom d'*angle de Brocard*. M. Tucker a donné les formules

$$\cot^2\omega = 1 + \cot^2 DAB + \cot^2 ABC, \operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 DAB + \operatorname{cosec}^2 ABC.$$

Soient F, G les milieux de AC, BD. Les angles E'FE", E'GE" sont égaux à 2ω ou $\pi - 2\omega$.

E est le point dont la somme des carrés des distances aux côtés de ABCD est minimum.

2. Le quadrilatère XYZU a pour centre des moyennes distances le point E, et il est circonscriptible à une circonférence, de centre E; ses côtés sont perpendiculaires et proportionnels à BF, CG, DF, AG; les côtés opposés se coupent sur AC et BD.

Les médianes BF, CG, DF, AG sont à une même distance $2R\cos DAB\cos ABC$ du centre O du cercle ABCD.

3. Si l'on transforme par inversion (par rayons vecteurs réciproques) les sommets A, B, C, D d'un quadrilatère harmonique, on obtient les sommets A_1, B_1, C_1, D_1 d'un nouveau quadrilatère harmonique. Lorsque le pôle d'inversion P est sur le cercle O, on obtient quatre points harmoniques en ligne droite. Lorsque ce point P est quelconque, on peut prendre pour A_1, B_1, C_1, D_1 les seconds points de rencontre de la circonférence O avec les droites AP, BP, CP, DP. On peut alors trouver deux positions de P telles que A_1, B_1, C_1, D deviennent un carré : ces points sont à l'intersection de la droite OE avec la circonférence qui a pour centre la projection de E sur sa polaire E'E" et qui coupe orthogonalement la circonférence O.

On peut inscrire au cercle O une infinité de quadrilatères harmoniques ayant même point de Lemoine : il suffit de prendre pour les diagonales AC, BD deux droites conjuguées par rapport au cercle. Ces couples de droites marquent sur la polaire de E une involution telle que les segments de deux points homologues sont vus sous un angle droit des deux points qui, étant pris pour pôles d'inversion, servent à transformer tous ces quadrilatères harmoniques en carrés.

4. Le cercle décrit sur EO comme diamètre prend le nom de *cercle de Brocard;* il rencontre les perpendiculaires élevées au milieu de a, b, c, d en des points M, N, P, Q qui sont les sommets de triangles isoscèles semblables construits sur a, b, c, d; l'angle à la base de ces triangles égale ω. Les droites AM, BN, CP, DQ concourent en un point Ω du cercle de Brocard; les droites BM, CN, DP, AQ concourent en un second point Ω' de ce cercle. Les points Ω, Ω', appelés *points de Brocard*, sont les foyers d'une ellipse (*ellipse de Brocard*) inscrite à tous les quadrilatères harmoniques qui ont même point de Lemoine E, et sont inscrits au cercle O.

5. Désignons par f_a, f_b, f_c, f_d quatre figures directement semblables, construites sur AB, BC, CD, DA comme lignes homologues.

Le cercle de Brocard rencontre les diagonales AC, BD en leurs milieux F, G; F est le point double de f_a et f_d, f_b et f_c; G est le point double de f_a et f_b, f_c et f_d. Le cercle de Brocard rencontre aussi les droites EE', EE'' en des points H, I qui sont respectivement les points doubles de f_a et f_c, f_b et f_d.

Le quadrilatère MNPQ est appelé *premier quadrilatère de Brocard;* les droites MP, NQ sont parallèles à FG.

FGHI est le *second quadrilatère de Brocard.*

Quatre droites homologues de f_a, f_b, f_c, f_d forment un quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ semblable à ABCD et dont les diagonales A_1C_1, B_1D_1 passent respectivement par F, G et se coupent en un point E_1 du cercle de Brocard de ABCD. Le centre de similitude des quadrilatères ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ appartient aussi à ce cercle.

Quatre points M', N', P', Q' divisant a, b, c, d dans un même rapport jouissent de la propriété que les droites M'M, N'N, P'P, Q'Q concourent en un point h du cercle de Brocard : h appartient aussi aux circonférences BM'N', CN'P', DP'Q', AQ'M'.

Sur la perpendiculaire élevée au milieu de FG, on peut trouver quatre points homologues de f_a, f_b, f_c, f_d.

6. Si l'on fait tourner le faisceau (Ω, ABCD) d'un certain angle autour de Ω, et le faisceau (Ω, BCDA) du même angle, mais en sens contraire, autour de Ω, les rayons de ces faisceaux rencontreront les côtés a, b, c, d du quadrilatère ABCD en huit points (α, β, γ, δ), (β', γ', δ', α') appartenant à une même circonférence (*circonférence de Tucker*). Les quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sont égaux entre eux et semblables à ABCD.

Les cercles de Tucker ont leurs centres sur la droite EO et ils ont pour enveloppe l'ellipse de Brocard.

Les droites $\alpha\delta'$, $\delta\alpha$, $\gamma\beta$, $\delta\alpha$ sont les côtés d'un quadrilatère A'B'C'D' homo- [illegible] ABCD [illegible] à E; les côtés opposés, tels que AB et C'D', des [illegible] A'B'C'D' se coupent sur une même droite. Un cas [illegible] A'B'C'D' est celui où ce polygone se réduit au [illegible] α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' sont déterminés par des [illegible] d : le cercle $\alpha\beta\gamma\delta$ prend alors le nom de [illegible]

[illegible] sont les côtés d'un quadrilatère, homothétique [illegible] forme par les tangentes en A, B, C, D au cercle [illegible] quatre par E, ce qui donne un cas parti- [illegible] Tucker, appelé *second cercle de Lemoine.*

[illegible] théorème de M. Mansion. (248-250).

[illegible] deux déterminants, du théorème suivant : [illegible] l'élément est une fonction $F(r, s)$ du [illegible] et s est égal à $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. [illegible] égalité

[illegible] $f(b) + f(c) + \ldots$

[illegible] du plus grand commun diviseur de [illegible] *de Belgique*, 1878, 2e série, t. XLVI.

Mansion (*P.*). — Caractère général de convergence. (270-277).

Démonstration minutieuse du théorème de Cauchy, dont Abel a fait un si grand usage dans son Mémoire sur le binôme : *Une quantité variable dont les oscillations ont pour limite zéro a une limite finie*, ou plus explicitement : *Si* $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ *sont les valeurs successives d'une quantité variable, telles que, pour toute quantité positive* ε *donnée d'avance, on puisse déterminer* n *de manière que l'on ait, en valeur absolue,*

$$s_{n+1} - s_n < \varepsilon, \qquad s_{n+2} - s_n < \varepsilon, \qquad s_{n+3} - s_n < \varepsilon,$$

et, en général, $s_{n+p} - s_n < \varepsilon$, *quel que soit* p, *la suite* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *tend vers une limite finie.* Comparaison de la théorie des limites de Lipschitz avec celle qui est employée ici et ailleurs par l'auteur.

Suppléments.

Neuberg (*J.*). — Mémoire sur le tétraèdre. (172).

Ce travail a paru en tirage à part en 1884; il a été publié comme Supplément à *Mathesis*, en février 1885; enfin il fait partie du tome XXXVII des *Mémoires de l'Académie de Belgique*. L'auteur s'y est d'abord proposé d'étendre au tétraèdre les propriétés des points et cercles de Lemoine et de Brocard. Cette étude l'a conduit à approfondir certaines notions peu répandues et lui a fourni un grand nombre de nouveaux théorèmes plus ou moins remarquables.

Après quelques généralités sur les points conjugués isogonaux ou conjugués isotomiques par rapport à un triangle ou un tétraèdre de référence (couples de points dont les coordonnées normales ou barycentriques sont de la forme $\alpha, \beta, \ldots$ et $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \cdots$), M. Neuberg étudie le point L dont la somme des carrés des distances aux faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est minimum. Ces distances sont proportionnelles aux aires des faces correspondantes; le plan mené par une arête et le point L divise l'arête opposée en deux segments proportionnels aux carrés des faces passant par la première arête; le point L et le centre de gravité G du tétraèdre sont les foyers d'un ellipsoïde de révolution inscrit au tétraèdre; les projections (h_1, h_2, h_3, h_4) et (G_1, G_2, G_3, G_4) de h et G sur les faces sont sur une même sphère, le plan $h_1h_2h_3$ est perpendiculaire à la droite A_4G_4, etc.; L est le centre des moyennes distances des points h_1, h_2, h_3, h_4; cette propriété subsiste aussi pour le point du minimum de la somme des carrés des distances à n plans donnés. Ce point L jouit donc d'une partie des propriétés du point de Lemoine (ou point de Grebe).

Comme étant l'analogue du théorème de Ceva, on peut considérer la proposition suivante : Soient Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 quatre points des faces d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et q_1, q_2, q_3 les points de rencontre des droites A_4Q_1, A_3Q_2, A_2Q_3 avec les arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; si les droites A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4 sont hyperboloïdiques (les quatre génératrices d'un même système, d'un hyperboloïde), les droites A_1q_1, A_2q_2, A_3q_3 concourent en un même point, ou

$$\frac{q_1A_2}{q_1A_3}\,\frac{q_2A_3}{q_2A_1}\,\frac{q_3A_1}{q_3A_2} = -1.$$

et une pareille relation a lieu en chacun des autres sommets du tétraèdre. La réciproque est également vraie. Au moyen de ce théorème, on trouve immédiatement les quadruples hyperboloïdiques suivants : les hauteurs, les droites joignant A_1, A_2, ... aux centres des cercles inscrits aux faces opposées ou aux points de Lemoine de ces triangles ou aux points de contact des faces opposées, soit avec la sphère inscrite, soit avec la sphère exinscrite correspondante. Les points de contact d'une face avec les huit sphères tangentes aux faces du tétraèdre sont, deux à deux, conjugués isogonaux par rapport à cette face. Un théorème de Steiner peut être généralisé ainsi : Si les perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre T sur les faces homologues d'un tétraèdre T' sont hyperboloïdiques, les perpendiculaires abaissées des sommets de T sur les faces correspondantes de T jouissent de la même propriété.

Les quadruples hyperboloïdiques se changent en quatre droites concourantes, lorsqu'il existe certaines relations entre les éléments du tétraèdre. M. Neuberg a été amené à étudier deux tétraèdres particuliers, qu'il appelle respectivement *isodynamique* et *isogone*.

Posons $A_2A_3 = a_1$, $A_3A_1 = a_2$, $A_1A_2 = a_3$, $A_4A_1 = a_4$, $A_4A_2 = a_5$, $A_4A_3 = a_6$ et employons les mêmes lettres pour les dièdres correspondants. Soient aussi O le centre de la sphère circonscrite à $A_1A_2A_3A_4$; I le centre de la sphère inscrite touchant les faces en I_1, I_2, I_3, I_4; $B_1B_2B_3B_4$ le tétraèdre formé par les plans tangents à la sphère O en A_1, A_2, A_3, A_4. Enfin appelons sections antiparallèles de $A_1A_2A_3A_4$ les sections d'un angle trièdre de ce solide par un plan parallèle à la face correspondante de $B_1B_2B_3B_4$. Le tétraèdre isodynamique $A_1A_2A_3A_4$ défini par les relations

$$a_1a_4 = a_2a_5 = a_3a_6 \qquad \text{ou} \qquad \sin a_1 \sin a_4 = \sin a_2 \sin a_5 = \sin a_3 \sin a_6$$

jouit de nombreuses propriétés : 1° les sections antiparallèles sont des triangles équilatéraux; 2° les droites qui joignent un sommet aux centres du cercle inscrit à la face opposée concourent en un même point; 3° les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4A_4 passent par les centres des sections antiparallèles correspondantes, par les points de Lemoine des faces et se coupent en un même point K (point de Lemoine du tétraèdre); 4° les coordonnées normales de K sont proportionnelles aux rayons des cercles circonscrits aux faces; 5° si $C_1C_2C_3C_4$ est un tétraèdre homothétique à $A_1A_2A_3A_4$ par rapport à K, les arêtes de chacun de ces tétraèdres sont coupées par les faces du second en douze points, sommets de quatre triangles équilatéraux inscrits à une même sphère; 6° si $D_1D_2D_3D_4$ est un tétraèdre homothétique à $B_1B_2B_3B_4$ par rapport à K, les faces de ce tétraèdre coupent les trièdres de $A_1A_2A_3A_4$ suivant quatre triangles équilatéraux inscrits à une même sphère; 7° il existe deux points (centres isodynamiques du tétraèdre) qui, étant pris pour pôles d'inversion, servent à transformer le tétraèdre isodynamique en un tétraèdre régulier, et chacun de ces points est le sommet d'un tétraèdre isodynamique construit sur une face quelconque de $A_1A_2A_3A_4$.

Un tétraèdre isogone $A_1A_2A_3A_4$ est celui dans lequel les droites joignant un sommet au point de contact de la face opposée avec la sphère inscrite concourent en un même point. Dans un tel tétraèdre,

$$\cos\tfrac{1}{2}a_1 \cos\tfrac{1}{2}a_4 = \cos\tfrac{1}{2}a_2 \cos\tfrac{1}{2}a_5 = \cos\tfrac{1}{2}a_3 \cos\tfrac{1}{2}a_6,$$

$$IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3 = IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_4 = IA_1 \cdot IA_3 \cdot IA_4 = IA_2 \cdot IA_3 \cdot IA_4,$$

$$I_1A_1 \cdot I_2A_2 \cdot I_3A_3 = I_1A_1 \cdot I_2A_2 \cdot I_4A_4 = I_1A_1 \cdot I_3A_3 \cdot I_4A_4 = I_2A_2 \cdot I_3A_3 \cdot I_4A_4,$$

et les angles $A_1I_4A_2$, $A_2I_4A_3$, $A_3I_4A_1$, ... sont égaux à 120°. Lorsque la base $A_1A_2A_3$ est fixe, le point A_4 se meut sur une hyperbole.

La généralisation de certaines propriétés du tétraèdre isodynamique conduit au tétraèdre *involutif*, caractérisé par la relation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a_1^2+a_4^2 & a_1^2a_4^2 \\ 1 & a_2^2+a_5^2 & a_2^2a_5^2 \\ 1 & a_3^2+a_6^2 & a_3^2a_6^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les plans perpendiculaires aux milieux des arêtes du tétraèdre involutif rencontrent les arêtes opposées a_1, a_2, ... en six points v_1, v_2, ..., situés dans un même plan (plan d'involution). Les sphères qui ont pour centres les points v_1, v_2, ... et passent par les extrémités de l'arête opposée a_4, a_5, ... se coupent en deux points A_3, A_3' (centres involutifs), situés sur la perpendiculaire abaissée de O sur le plan d'involution. L'hyperboloïde des hauteurs de $A_1A_2A_3A_4$ passe par le point O.

Lorsque la base $A_1A_2A_3$ est fixe, le sommet A_4 du tétraèdre involutif décrit une surface remarquable du troisième ordre.

Le quadrangle plan involutif, caractérisé par la relation (1), jouit de la propriété assez curieuse que les droites joignant un sommet au centre du cercle qui passe par les trois autres sommets concourent en un même point.

Rectifications. — L'auteur nous prie de signaler quelques erreurs dues à la hâte de la rédaction. Page 7, ligne 15, lire : G *est le centre d'homologie de* $E_1E_2E_3$, $F_1F_2F_3$. Page 13, lignes 15 et 16, lire :

$$A(\delta_1\delta_1 \pm \delta_4\delta_3) + B(\delta_4\delta_2 \pm \delta_1\delta_3) + \dots.$$

Cette surface passe par les points δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 *ou par* I *et les centres des sphères inscrites aux combles.* Page 13, ligne 24, lire $\delta_4\delta_1 \pm \delta_2\delta_3$, ... Page 15, ligne 7, lire : $A(\mu_4\mu_1 \pm \mu_2\mu_3) + \dots$. Page 50, § 44, supprimez le troisième alinéa, et remplacer dans le deuxième alinéa les mots *division harmonique* par *division dont le rapport anharmonique égale* 3, et les mots *milieux de hauteur* par *au tiers de la hauteur.*

Mansion (*P.*). — Discours sur les travaux mathématiques de M. Eugène-Charles Catalan. (1-38).

Extrait du tome XII des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège.*

De Tilly (*J.*). — Sur l'équation de Riccati et sa double généralisation. (1-20). Sur une lacune qui semble exister au début de l'enseignement de la Géométrie descriptive. (21-30).

Le premier Mémoire est extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. IX, p. 216-236; le second des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 9e année, 1884-1885, IIe Partie, p. 95-104.

Neuberg (*J.*). — Sur les figures semblablement variables. (Sup-

plément de *Mathesis;* extrait des *Proceedings of the London Mathematical Society,* t. XVI, p. 135-188).

M. H.-M. Taylor avait étudié les relations entre les intersections d'un cercle avec les côtés d'un triangle ABC (*Proc. of the London Math. Soc.*, vol. XVI, n° 244). M. Neuberg précise et complète ces relations en les rattachant à la théorie des figures semblablement variables et à celle des podaires obliques d'un foyer d'une conique.

1. Soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle variable sous les conditions de rester constant de forme et inscrit au triangle fixe ABC. Les cercles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ se coupent en un point fixe F qui est un *centre permanent de similitude* des triangles $\alpha\beta\gamma$. De ce point, on voit les côtés de $\alpha\beta\gamma$ sous les angles $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ et les côtés de ABC sous les angles $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$.

2. Soient M, N, P les projections de F sur BC, CA, AB; MNP est le minimum du triangle variable $\alpha\beta\gamma$. Les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ enveloppent trois paraboles ayant pour foyer commun F et pour tangentes au sommet MN, NP, PM.

Tout point du triangle variable $\alpha\beta\gamma$ (orthocentre, centre du cercle circonscrit, ...) décrit une droite; toute droite de ce triangle (médiane, bissectrice, ... de $\alpha\beta\gamma$) enveloppe une parabole de foyer F.

3. Le cercle $\alpha\beta\gamma$ rencontre BC, CA, AB en trois nouveaux points α', β', γ', sommets d'un triangle de forme constante ayant pour centre permanent de similitude l'inverse F' de F par rapport à ABC. L'enveloppe du cercle $\alpha\beta\gamma$ est une conique inscrite à ABC et ayant pour foyers F et F', pour cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre le cercle MNP.

4. Les cas particuliers les plus remarquables correspondent aux hypothèses

(I) $\qquad \alpha = A, \quad \beta = B, \quad \gamma = C,$

(II) $\qquad \alpha = B, \quad \beta = C, \quad \gamma = A.$

Dans le premier cas, F est le centre du cercle circonscrit à ABC et l'orthocentre de $\alpha\beta\gamma$; F' est l'orthocentre de ABC et le centre du cercle inscrit à $\alpha'\beta'\gamma'$. Dans le second cas, F et F' sont les points de Brocard de ABC; F est aussi un point de Brocard de $\alpha\beta\gamma$, F' un point de Brocard de $\alpha'\beta'\gamma'$.

5. Les droites $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$ forment un triangle A'B'C', les droites $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ forment un autre triangle A"B"C". Les directions de ces droites restent constantes, et les sommets des triangles A'B'C', A"B"C" glissent sur trois droites fixes NA, NB, NC. De là deux autres moyens de déterminer la série des cercles $\alpha\beta\gamma$.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XII; 1888. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse; T. I. 1887. — 48-59.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3e série, T. III, 1886. — 18-25.

Annali di Matematica pura ed applicata; 2e série, T. XIII (suite), XIV, 1886-1887. 152-157.

Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles; 1884-1886. — 30-37.

Atti della reale Accademia dei Lincei; 4e série, Rendiconti, T. II, 1886. — 88-98.

Bulletin de la Société mathématique de France; T. XIV, 1886. — 42-48.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; T. CIII, 1886. — 59-76; 105-117; T. CIV, 1887. — 170-197.

Journal für die reine und angewandte Mathematik; T. XCVII, 1883. — 117-127.

Mathesis. — Recueil mathématique publié par Mansion et J. Neuberg. — 198-208.

Nieuw Archief voor Wiskunde; T. XI, XII, XIII, 1884-1887. — 26-30.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 3e série, T. VI, 1887. — 98-105; 165-170.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London; Vol. 175, 176, 177; 1884-1886. — 140-148.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo; T. I, 1884-1887. — 157-164.

Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; T. II, 1883. — 1884. 1er semestre. — 5-18. — 1884. 2e semestre. — 76-88.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

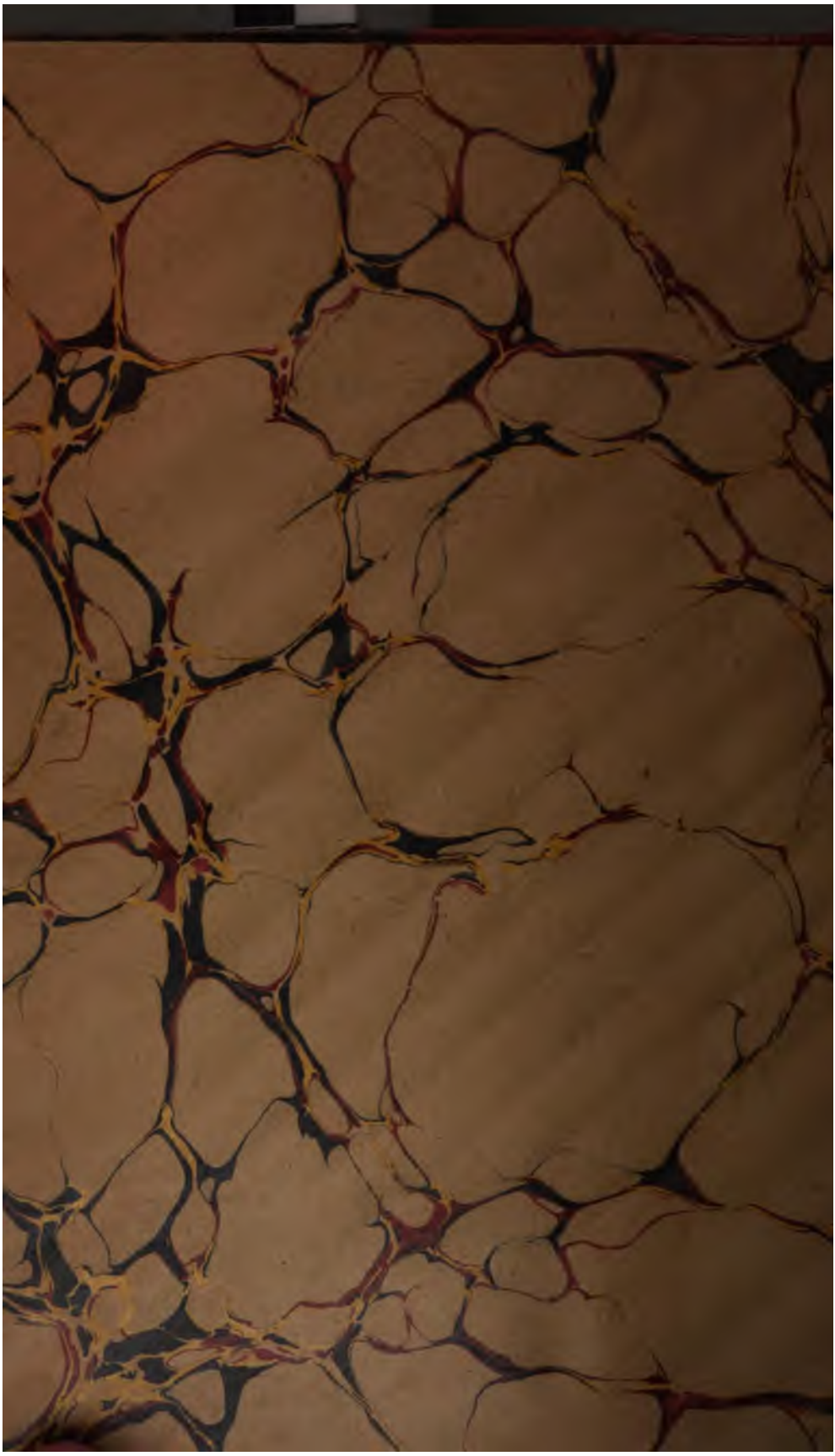
Abetti. 88.
Adam. 114.
Albeggiani (M.-L.). 158, 164.
Alexander (P.). 131, 133.
Ameseder. 120.
Amigues. 178, 188.
Andoyer. 58, 193.
Antomari. 178, 181.
Appell. 18, 50, 74, 117, 165, 170, 195.
Autonne. 65, 116, 181, 192.
Baily (Walter.). 138.
Balitrand. 99.
Barisien. 166.
Beek (J.-C. van). 31.
Berg (F.-J. van der). 27.
Bergmanns (C.). 199.
Bertini (E.). 96.
Bertrand (J.). 169.
Berzolari (L.). 153.
Besso (D.). 94.
Bianchi (L.). 89, 97, 153, 154, 156.
Biehler (Ch.). 98, 100, 102, 103, 167, 169.
Bierens de Haan (E.). 26, 27, 37, 38, 41.
Bioche (C.). 42.
Blasendorff (M.). 123.
Boer (F. de). 31, 38.
Bonnet (O.). 166.
Bordiga. 72, 75.
Bortniker (Mlle). 181.
Bourget. 190.
Boussinesq. 73, 166.
Boys (C.-V.). 138.
Brill. 132.
Brillouin (M.). 58.
Brioschi. 64, 90, 91, 96, 152, 157.
Brocard (H.). 199.
Buys-Ballot (C.-H.-D.). 30, 34.
Buchheim (A.). 130, 133, 134, 139.
Burbury. 138.
Burnside. 135.
Callandreau. 69, 105, 111, 170.
Cantone (A.). 158.
Capelli (A.). 157, 158, 159.
Carr (G.-S.). 134.
Cardinaal (J.). 30.
Caspary (F.). 123, 177, 188, 190.
Cassani (P.). 93.
Catalan. 161, 199, 202.
Cayley. 129, 132, 134, 150, 151.
Cerruti (V.). 92.
Cesàro (E.). 94, 99, 103, 155, 156, 157, 162, 163, 164, 198, 199, 201, 202, 204.
Chistoni (C.). 91, 93.
Chizzoni (F.). 93.
Chrée (Ch.). 128, 139, 149.
Christine (Lady Franklin). 128.
Clausius. 78.
Cockle (Sir J.). 151.
Collin (J.). 103.
Connell (Mc.). 145.
Conti (I.). 162.
Crès (A. de). 166.
Cunyngham (H.). 138, 139.
Darboux (G.). 75, 166, 180, 182.
Dautheville. 44.
Demartres. 173.
Deruyts. 47.
Desboves. 184, 195, 197.
De Volson Vood. 137.
Dewulf. 22, 25.
Diesen (G. von). 39.
Dixon (A.-C.). 151.
Donders (F.-C.). 31.
Drouet. 165.
Droz (A). 170.
Duhem. 172.
Edgeworth. 138, 140.
Edmonson (J.). 137.
Ekama (K.). 30.
Einthoven (W.). 34.
Elliott (E.-B.). 128, 132.
Engelmann (Th.-W.). 31.
Ferrers. 136.
Fisher (O.). 138.

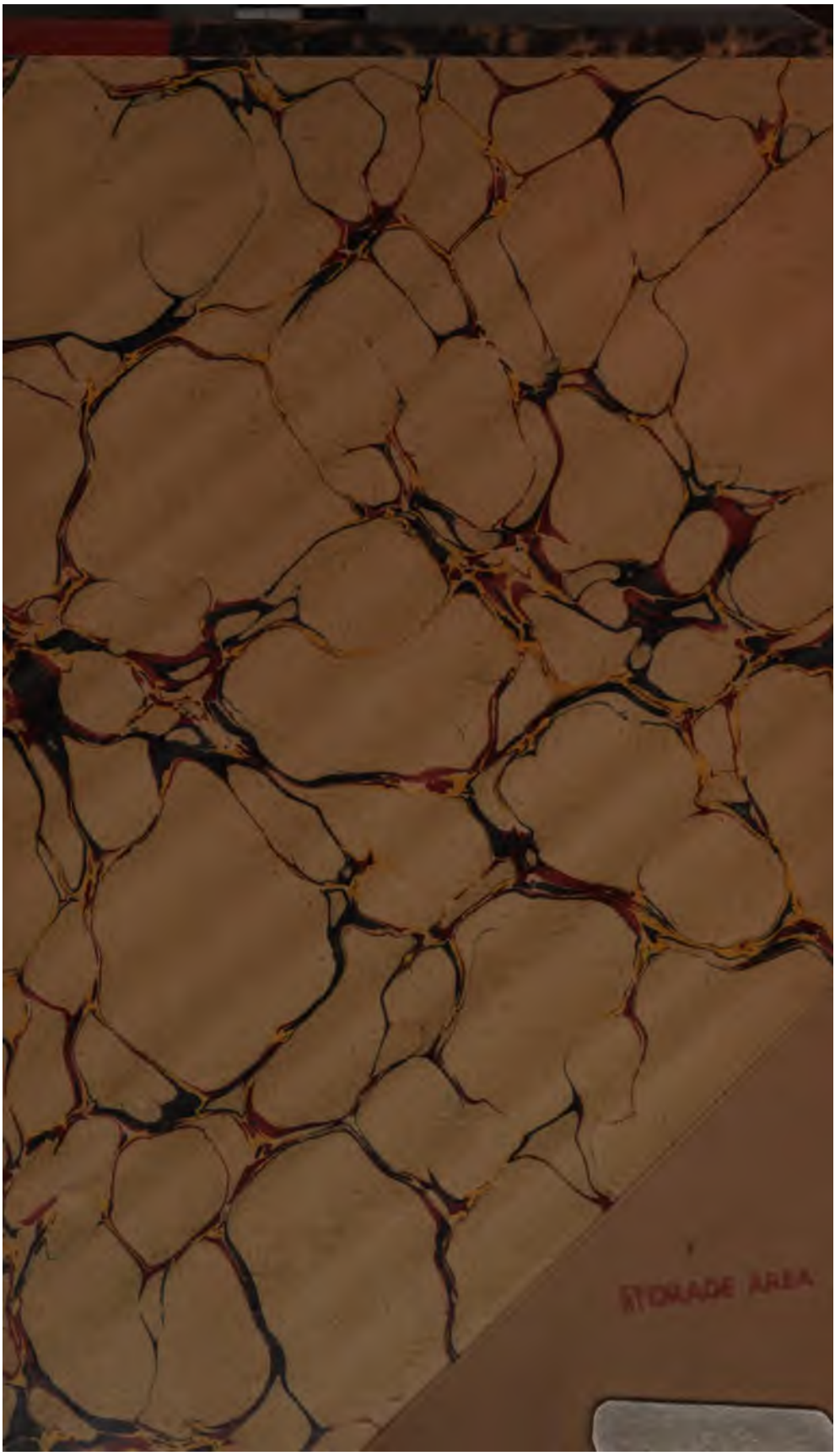
Fleming (J.-A.). 137.
Forsyth (A.-R.). 129, 130, 131, 135, 148.
Fouret, 42, 47, 68, 115.
Frattini (G.). 90.
Frœbenius. 118, 124.
Fuchs. 78, 84.
Fujisawle (R.). 130.
Garbe. 58.
Gebbia. 158, 164.
Geer (P. van). 26, 29.
Genty. 99, 167.
Gerbaldi. 164.
Gerono. 102.
Giacomelli (F.). 92.
Gilbert. 117, 173.
Giltay (J.-W.). 31, 33, 37.
Giudice (F.). 158, 162.
Glaisher (J.-W.-L.). 127, 128, 130, 134, 135, 136.
Godefroy. 70.
Goffart (N.). 167.
Goldstein. 12.
Gomes Teixeira. 24, 99.
Goossens B.-J.). 34.
Goursat (E.). 20, 54, 62, 114, 168, 184, 191.
Gray (Th.). 137.
Greenhill. 134, 135, 149, 150.
Grinwis (C.-H.-C.). 30, 36, 38, 39, 41.
Gros. 69.
Guccia. 108, 157, 158, 159, 160, 164.
Guichard. 23, 193.
Guyon, 65.
Halphen. 182.
Halsted. 198.
Hart (A.-S.). 151.
Haton de la Goupillière. 109.
Hauck (G.). 125.
Heath. 140.
Heaviside (O.). 136, 139.
Helmholtz. 13, 79, 83, 121, 126.
Hennessy (H.). 139.
Hermann (R.-A.). 151, 152.
Hermes (O.). 123.
Hess. 74.
Hicks. 140, 142.
Hill. 142.
Hirst (T.-A.). 158.
Hoff (J.-H. van t'). 34.
Hopkinson. 145.
Hugoniot. 73, 113, 115, 116.
Humbert (G.) 112, 169, 187, 197.
Jamet. 178, 183.
Janse (L.-Bz.). 26.
Jensen. 189.
Jenkins (M.). 133, 134.
Jessop (C.-M.). 149.
Johnson (A.-R.). 130, 133, 134, 149, 150, 152.
Jonquières (de). 106, 108.
Jordan (C.). 166.
Jung (G.). 89, 97.
Kempe (A.-B.). 132, 144.
Kirchhoff. 12, 17, 18, 23, 83.
Kœnig. 83.
Kœnigs (G.). 53, 54, 55, 107, 179, 183, 196.
Kohlrausch. 80.
Korteweg (D.-J.). 32, 36, 37.
Kronecker. 5, 8, 13, 7, 6, 80, 85, 113, 120, 122, 199, 200.
Kundt. 80.
Lachlan (R.). 131, 133, 134, 135, 145.
Laguerre (E.). 59.
Laurent (H.). 98, 104, 165, 167.
Lazzeri (G.). 94, 95.
Léauté. 69, 73.
Lecornu. 175.
Lemoine, 46, 170, 200.
Lester Woodbridge (J.). 139.
Lévy (M.). 169.
Lindelöf, 171.
Liouville (R.). 106, 194.
Lipschitz. 69, 76, 176.
Lloyd Tanner (H.-W.). 132.
Lodge (A.). 140.
Longchamps (G. de). 180, 186.
Lorentz (H.-A.). 31, 33, 35, 39, 40.
Loria (G.). 148.
Macfarlane (A.). 136.
Mac Mahon (P.-A.). 139, 149.
Maisano. 157, 158, 159.
Mannheim. 64, 65, 67, 69, 128.
Mansion. 68, 134, 177, 198, 199, 202, 206, 207.
Mantel (W.). 27.
Marchand. 21.
Markoff. 20.
Marks (Sarah.). 136.
Martinetti (V.). 153, 157, 161.
Mathews (G.-B.). 130.
Mathiessen. 73.
Maupin (G.). 167.
Michaëlis (G.-J.). 33, 37, 38, 40.
Milinowski, 126.
Millosevich. 88, 90, 92, 93, 97.
Montesano (D.). 157.
Moon (R.). 137.
Morghen (A.). 96.
Morley (F.). 132, 135.
Mouchot. 188.
Muir (Th.). 138.
Neu. 46.

Neuberg (J.). 199, 202, 205, 207.
Nieuwenhuyzen Krusemann (J.). 40.
Niewenglowski (B.). 101.
Nœther. 110, 124.
Ocagne (M. d'). 42, 45, 73, 169, 176, 186, 192, 198, 202.
Oudemans (J.-A.-C.). 37, 39, 41.
Padova (E.). 90.
Painlevé. 70, 194, 197.
Paolis (R. de). 97.
Pellet. 45, 195.
Perrin. 66, 172, 174, 175, 188, 190.
Petit Bois. 198.
Petot. 72, 73.
Pezzo (P. del). 160, 162.
Picard (E.). 48, 63, 66, 67, 107, 108, 110, 171, 185.
Picquet. 44.
Pieri (M.). 91, 94.
Piers (C.-W.). 129.
Pincherle. 97.
Pinczon. 187.
Pirondini (G.). 101.
Pizzetti (P.). 94.
Pliny Earle Chase. 136.
Poincaré. 44, 60, 61, 71, 73, 74, 110, 111, 171, 178, 195.
Polignac (de). 195, 196.
Poynting. 142, 143.
Presle (de). 46, 47, 48.
Pucci (E.). 157.
Quincke. 12.
Raffy (L.). 184.
Rayleigh (Lord). 138, 140.
Re (A. del). 163.
Resal. 62, 70, 73, 100.
Respighi (L.). 92, 97.
Réveille. 197.
Reye (Th.). 125.
Reynold (W.). 148.
Reynolds (O.). 145.
Ricci (G.). 96, 156.
Ricco (A.). 88.
Richarz. 83.
Roberts (R.). 128, 131.
Robin. 25, 197.
Rocquigny (de). 199.
Rouché (E.). 101, 168.
Rücker (W.). 148.
Runge (C.). 127.
Sabatier. 53, 58.
Sabinine. 156.
Sarrau (E.). 168.
Sauvage. 24.
Schaik (W.-C.-L. van). 37,
Scheeffer (L.). 124.
Schols (Ch.-M.). 34, 39, 40.
Schoute (P.-H.). 29, 33, 40, 188,
Schouten (G.). 29, 41.
Segre (C.). 91, 121, 161.
Serret (P.). 114, 115.
Sharpe (H.-J.). 151.
Shan (H.). 144.
Siemens. 80.
Sissing (R.). 34.
Smith (F.-J.). 139.
Sparre (de). 72.
Stahl (W.). 122.
Stieltjes. 22, 32, 39, 40, 73, 102, 116.
Stok (J.-P. van der.). 32.
Stokes. 148.
Study (E.). 118.
Sturm (R.). 117, 119.
Sutherland (W.). 137, 139.
Sylvester. 60, 61, 74, 76, 106, 130, 189.
Tacchini (P.). 82, 89, 90, 91, 92, 96, 97.
Tait. 138.
Tannery (J.). 19.
Tannery (P.). 42.
Taylor (C.). 132, 133, 135.
Thomson (J.). 143.
Thomson (Sir William). 139.
Tilly (J. de). 201, 207.
Tisserand. 106, 175.
Tomlinson. 148.
Torelli (A.). 152.
Tucker (R.). 134.
Vanecek (L.-S.). 156.
Vanecek (M.-N.). 156.
Visalli (P.). 95.
Volterra. 96.
Walton (William). 151.
Weierstrass. 20.
Weill. 46, 48, 100, 102, 103, 201.
Weingarten. 10.
Wilsing (J.). 136.
Woolsey Johnson (W.). 134.
Workmann (W.-P.). 150.
Zeuthen (H.-G.). 156.
Zona (T.). 88.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XII.

13747 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55




STORAGE AREA